

# Ein Beitrag zur Perspektive mit gekippter Grundebene

Von

Georg GLAESER, Wien

*Herrn Prof. Dr. E. Frisch zum 65. Geburtstag gewidmet.*

## Zusammenfassung

Die Perspektive mit gekippter Grundebene wird wegen ihres erhöhten Schwierigkeitsgrades im Unterricht aus Zeitgründen meist nur stiefmütterlich behandelt. Hier soll eine Methode präsentiert werden, die es ermöglicht, solche Perspektiven mit relativ geringem Aufwand anzufertigen. Dabei wird im wesentlichen die Methode von HOHENBERG zum *Umzeichnen von Perspektiven* herangezogen; diese wird jedoch linienmäßig stark reduziert, was wegen der überlappenden Bilder wichtig erscheint. Die vereinfachte Konstruktion erlaubt eine Interpretation als perspektivisches Einschneideverfahren aus zwei Parallelrissen. Der Schüler (Student) kann bereits nach wenigen Unterrichtseinheiten allgemeine Perspektiven erstellen bzw. entzerren.

## 1 Einleitung

F. HOHENBERG hat in einem Aufsatz<sup>1</sup> ausführlich beschrieben, wie zwei Perspektiven mit waagrechter oder gekippter Grundebene<sup>2</sup> mit geringem Aufwand ineinander übergeführt („umgezeichnet“) werden können.

Insbesondere können normalaxonometrische Bilder und Militäraxonometrien in allgemeine Perspektiven umgezeichnet werden und umgekehrt (Rekonstruktion!). Weil die Konstruktion solcher Axonometrien von Schülern und Studenten im allgemeinen ohne Schwierigkeiten erlernt wird, kann man auf vorhandenen Fertigkeiten aufbauen und umso schneller Erfolgserlebnisse erzielen. Deswegen scheint es erstaunlich, daß diese Methode in Lehrbüchern über Darstellende Geometrie kaum berücksichtigt wird.

## 2 Umzeichnen von Normalaxonometrien

Gegeben sei eine auf der gekippten Grundebene  $\gamma$  ruhende Szene und deren Normalprojektion auf die Bildebene  $\pi$  (Abb. 1). Der Kippwinkel  $\alpha$  der Grundebene ist bei einer „Stechzirkelaxonometrie“<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> *Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern*, Elem. d. Math. **X**/3, 57–61, Birkhäuser/Basel, 1955, siehe auch: HOHENBERG: *Konstruktive Geometrie*, 2. oder 3. Auflage, Springer/Wien, 1966.

<sup>2</sup> Auch Perspektive mit lotrechter bzw. geneigter Bildebene.

<sup>3</sup> vgl. W. WUNDERLICH: *Darstellende Geometrie II*, B.I./Mannheim, 1966.

vorgegeben, sonst mittels eines Seitenrisses zu ermitteln. Die Normalprojektion soll jetzt in eine Perspektive (Augpunkt  $O$ , Bildebene  $\pi$ , Distanz  $d$ ) umgezeichnet werden. Abb. 2a zeigt, wie nach HOHENBERG das perspektivische Bild  $P^c$  des Raumpunkts  $P(x, y, z)$  aus dem normalaxonometrischen Bild der  $z$ -parallelen Strecke  $P'P$  ( $\overline{P'P} = z$ ) ermittelt werden kann:

1. Die Projektionsstrahlen  $OP$  und  $OP'$  aus dem Augpunkt  $O$  bilden sich in der Normalprojektion auf die Bildebene  $\pi$  als „Kernstrahlen“  $O^n P^n = HP^n$  und  $O^n P'^n = HP'^n$  durch den Hauptpunkt  $H$  („Kernpunkt“) ab.
2. Das perspektive Bild  $P'^c$  des Grundrisses  $P'$  kann gefunden werden, indem man  $P'$  längs einer Fallgeraden  $f$  der Grundebene  $\gamma$  auf die Grundlinie  $g$  schiebt (Hilfspot  $P'^f \in g \subset \pi$ ), was einer Projektion aus dem Fernpunkt  $F_u$  von  $f$  gleichkommt.  $P'^c$  liegt dann auf dem perspektiven Bild  $f^c = P'^f F_u^c$  von  $f$ .
3. Das perspektive Bild  $P^c$  von  $P$  liegt auf der Verbindung von  $P'^c$  mit dem Fluchtpunkt  $Z_u^c$  der  $z$ -Richtung.

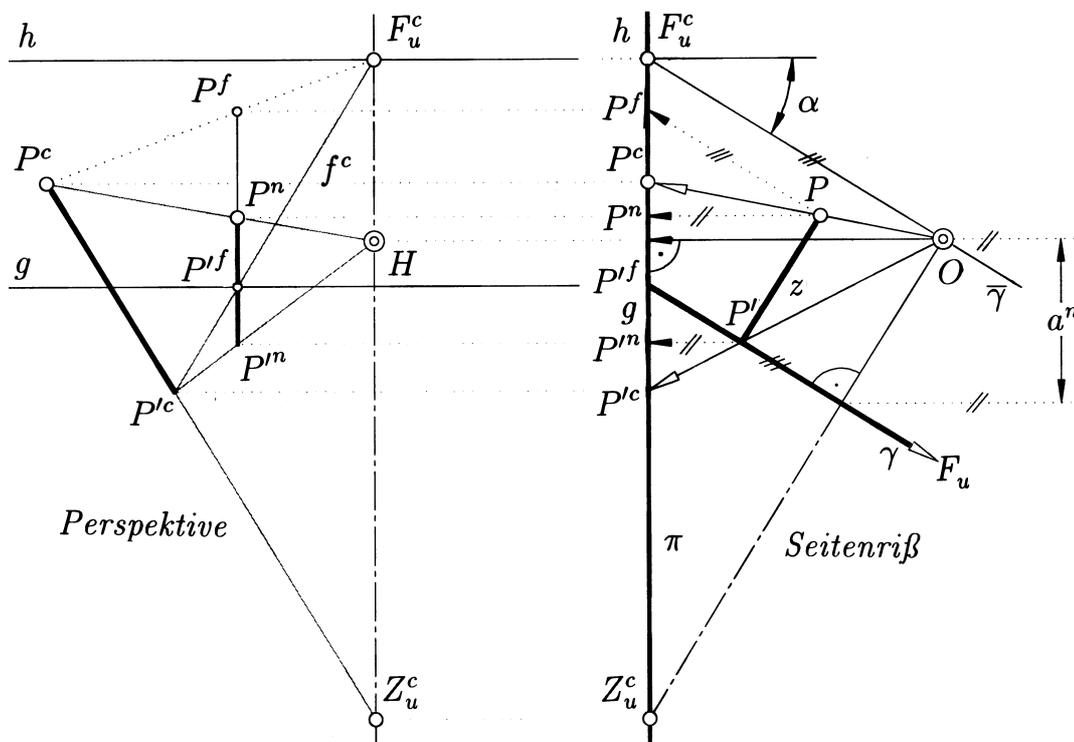


Abbildung 1: Die Raumsituation im Seitenriß

Weil das normalaxonometrische Bild und die entsprechende Perspektive einander am Zeichenblatt überlappen, führt selbst dieses einfache Verfahren schon nach wenigen Anwendungen zu einer gewissen Verwirrung. Die Konstruktion kann jedoch beträchtlich entlastet werden, wenn man auch den Punkt  $P$  aus  $F_u$  projiziert (Abb. 1). Diese Projektion  $P^f \in \pi$  liegt genau über  $P'^f$  und es ist  $z^f = \overline{P'^f P^f} = z / \cos \alpha$ . Zusammen mit  $\overline{P'^n P^n} = z^n = \cos \alpha \cdot z$  gilt:

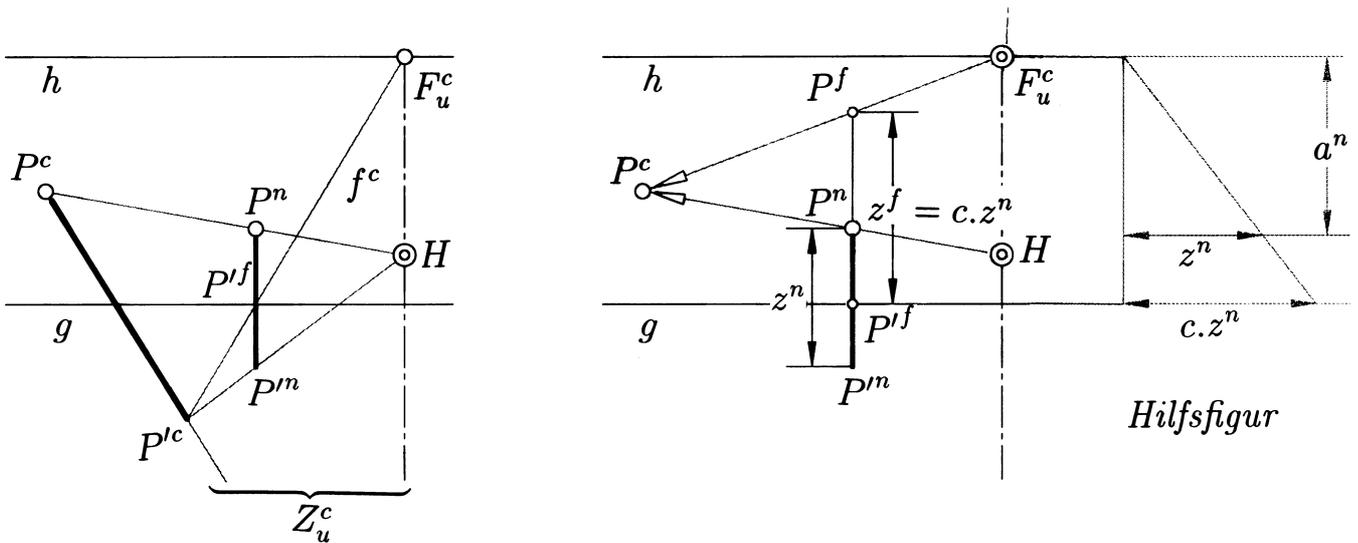


Abbildung 2: a) Umzeichnen nach HOHENBERG, b) liniensparendes Umzeichnen

$$z^f = c \cdot z^n \quad \text{mit} \quad c = 1 / \cos^2 \alpha = \text{const.}$$

Nun lautet die Konstruktionsvorschrift (Abb. 2b):

1.  $P^c$  liegt (wie vorhin) auf dem Kernstrahl  $HP^n$ .
2.  $P^c$  liegt auf  $P^f F_u^c$ , wobei  $P^f$  auf dem Ordner durch  $P^n$  liegt, und zwar im Abstand  $z^f = c \cdot z^n$  über der Grundlinie  $g$ .

Der Abstand  $z^f$  kann konstruktiv in einer Hilfsfigur (siehe Abb. 2b bzw. Abb. 1) ermittelt werden. Im Fall einer Isometrie ( $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = 35,264^\circ$ ) ergibt sich für die Konstante  $c$  der bequeme Wert  $\frac{3}{2}$  (vgl. Abb. 3). Für die relativ großen Kippwinkel  $\alpha = 45^\circ$  bzw.  $60^\circ$  stellen sich für  $c$  die ganzzahligen Werte 2 bzw. 4 ein.

Besonders einfach ist die Konstruktion natürlich für die Punkte in der Grundebene  $\gamma$ , weil dann wegen  $z = z^f = 0$  die Punkte  $P'^f$  und  $P^f$  zusammenfallen.

Gegenüber der „Standard-Konstruktion“ von HOHENBERG ergeben sich mehrere Vorteile:

- Der normalaxonometrische Grundriß  $P'^m$  muß nicht unbedingt eingezeichnet sein: Die verkürzte Höhe  $z^n$ , die in der Konstruktion vonnöten ist, kann oft an anderer Stelle abgelesen werden.
- Der Punkt  $P^c$  wird direkt konstruiert. Der bei kleinen Kippwinkeln meist schwer erreichbare Fluchtpunkt  $Z_u^c$  wird nicht benötigt.
- Die Konstruktion ist vergleichsweise genau (kaum schleifende Schnitte). Punkte, die in unmittelbarer Nähe von  $F_u^c H$  liegen, sollten allerdings horizontal verschoben werden.

Die vereinfachte Konstruktion erlaubt eine Interpretation als Einschneideverfahren im Sinn von ECKHART bzw. SZABÓ<sup>4</sup>: Der Punkt  $P^f$  kann ja als Parallelriß des Raumpunkts  $P$  auf die Bildebene gedeutet

<sup>4</sup> Die Erzeugung axonometrischer Risse durch Einschneiden zweier Parallelrisse geht auf ECKHART (1937) zurück. SZABÓ hat das Verfahren verallgemeinert: Unter gewissen Bedingungen können auch Perspektiven aus Parallelrissen bzw.

werden. Dieser Riß ist affin zu einem Seitenriß und kann anschaulich als „überhöhter Seitenriß“ angesprochen werden.

Abb. 3 zeigt ein isometrisches Bild, welches in eine Perspektive umgezeichnet wurde. Dabei sind *alle* Konstruktionslinien eingezeichnet! In der Zeichenpraxis wird man zunächst die Hauptfluchtpunkte  $X_u^c$  und  $Y_u^c$  am Horizont bzw.  $Z_u^c$  auf  $F_u^c H$  aufsuchen<sup>5</sup> und – sofern diese leicht erreichbar sind – in Kombination mit „strategisch wichtigen“ Punkten zur Konstruktion der restlichen Punkte heranziehen.

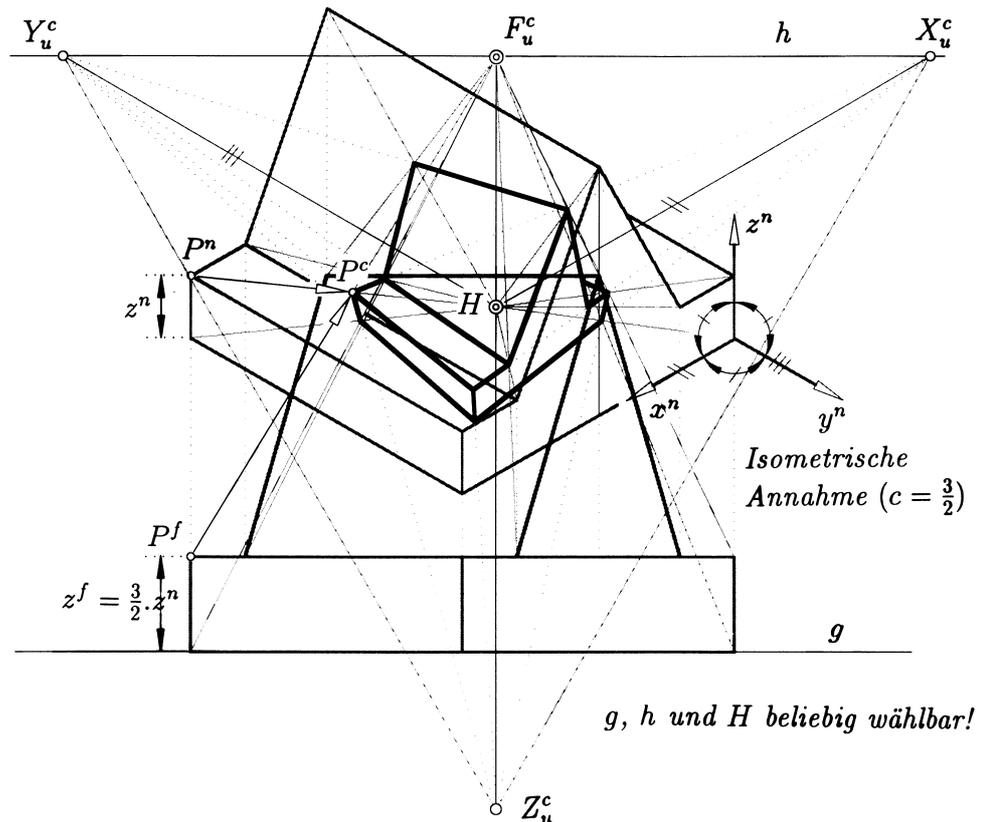


Abbildung 3: Umzeichnen einer normalen Axonometrie (Isometrie).

Zentralrissen erzeugt werden; siehe dazu: *Eine Verallgemeinerung des Eckhardtschen Einschneideverfahrens*. Publ. Math. Debrecen **14** (1967), 311–319. Die Bedingungen, die SZABÓ anführt, sind im vorliegenden Fall in trivialer Weise erfüllt.

<sup>5</sup> Das Fluchspurdreieck ist bei einer isometrischen Annahme gleichseitig; dies erspart die Einführung eines Seitenrisses zur Konstruktion von  $Z_u^c$ .

### 3 Umzeichnen von Militärrissen

Es sei wieder ein Szene gegeben, die auf einer um den Winkel  $\alpha$  gekippten Grundebene  $\gamma$  ruht. Diese Szene wird nun einerseits aus dem Augpunkt  $O$ , andererseits aus dem Fernpunkt  $S_u$  jener Drehsehnenrichtung auf die Bildebene  $\pi$  projiziert, welche  $\gamma$  gleichsinnig kongruent in  $\pi$  projiziert (Abb. 4). Diese Parallelprojektion ist somit eine Militäraxonometrie, weil sie zur Projektion in  $\gamma$  kongruent ist. Ein Raumpunkt  $P$  geht dabei in einen Bildpunkt  $P^s$  über, insbesondere entspricht dem Augpunkt  $O$  der Kernpunkt  $S_u^c = M_\gamma$ , also der Meßpunkt von  $\gamma$ . Das Verkürzungsverhältnis  $v_z$  der  $z$ -Werte ergibt sich gemäß Abb. 4 aus dem Seitenriß:  $v_z = \tan(45^\circ - \alpha/2)$ .

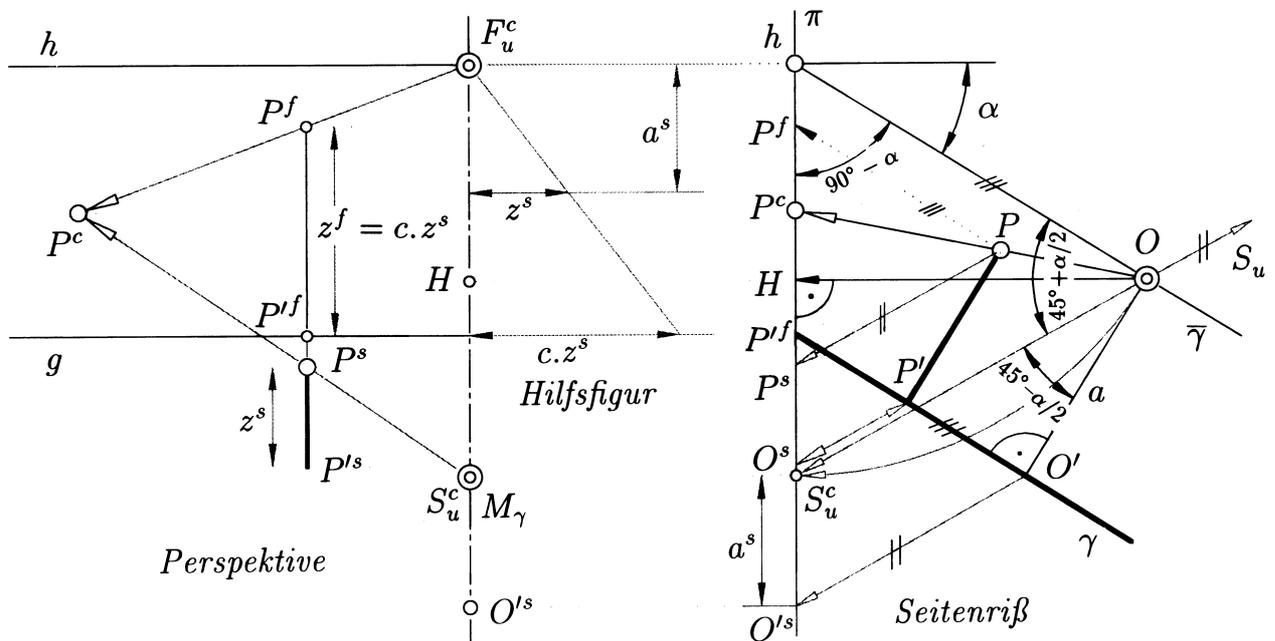


Abbildung 4: Liniensparendes Umzeichnen einer Militäraxonometrie.

Die Bildpunkte  $P^c$  und  $P^s$  des Raumpunkts  $P$  sind mittels der Kernstrahlen durch  $M_\gamma$  gekoppelt, welche die Spuren der Ebene  $OS_uP$  in  $\pi$  darstellen. Die Projektion der Strecke  $P'P$  aus dem Fernpunkt  $F_u$  der Falllinien  $f$  von  $\gamma$  liefert wie vorhin eine lotrechte Strecke  $P'^f P^f$  auf der Grundlinie  $g$  mit der Länge  $z^f = \overline{P'^f P^f} = z / \cos \alpha = z^s / (v_z \cdot \cos \alpha)$ . Es gilt somit

$$z^f = c \cdot z^s \quad \text{mit} \quad c = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \tan(45^\circ - \alpha/2)} = \text{const.}$$

Eine Konstruktionsvorschrift für das perspektive Bild  $P^c$  lautet daher:

1.  $P^c$  liegt auf dem Kernstrahl  $M_\gamma P^s$ .
2.  $P^c$  liegt auf  $P^f F_u^c$ , wobei  $P^f$  auf dem Ordner durch  $P^s$  liegt, und zwar im Abstand  $z^f = c \cdot z^s$  über der Grundlinie.

Die Multiplikation des verkürzten  $z$ -Wertes  $z^s$  mit dem konstanten Vergrößerungsfaktor  $c$  kann wieder zeichnerisch (Abb. 4) durchgeführt werden.

Bei einem Kippwinkel von  $\alpha = 0^\circ$  (Perspektive mit waagrechter Grundebene) ergibt sich bequemerweise  $v_z = c = 1$ . Für  $\alpha = 30^\circ$  stellt sich zwar der ganzzahlige Vergrößerungsfaktor  $c = 2$  ein, das Verzerrungsverhältnis ist mit  $v_z = \tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$  aber irrational. Günstige Werte für  $v_z$  und  $c$  stellen sich für  $\alpha = 36,870^\circ$  ( $v_z = 1/2$ ,  $c = 5/2$ ) und  $\alpha = 53,130^\circ$  ( $v_z = 1/3$ ,  $c = 5$ ) ein.

Die Konstruktion des Bildpunktes  $P^c$  aus den beiden Parallelrissen  $P^s$  und  $P^f$  erlauben analog zu vorhin eine Interpretation als Einschneideverfahren (vgl. Abb. 5).

## 4 Entzerrung von Perspektiven

Weil das Umzeichnen vom Militärriß in die Perspektive umkehrbar ist, kann man die Konstruktion auch verwenden, um eine Perspektive zu entzerren. Dasselbe gilt natürlich auch beim Umzeichnen einer Perspektive in eine Normalaxonometrie, allerdings müssen dort alle drei Koordinatenrichtungen entzerrt werden, während im Fall der Militäraxonometrie zwei Koordinaten (bei waagrechter Grundebene sogar alle drei) unverzerrt erscheinen.

Abb. 5 zeigt eine Rekonstruktion aus einer Perspektive. Man ermittelt zunächst wie gewohnt das Fluchtpundreieck  $X_u^c Y_u^c Z_u^c$  und den Hauptpunkt  $H$  als dessen Höhenschnittpunkt.  $F_u^c$  liegt auf der Höhe durch  $Z_u^c$ , der Meßpunkt  $M_\gamma$  am Thaleskreis über  $X_u^c Y_u^c$ .

Durch Umkehrung des Einschneideverfahrens erhält man dann ökonomisch einen Militärriß und den zugeordneten „überhöhten Seitenriß“. Zu beachten ist, daß die Höhen in keinem der Parallelrisse unverzerrt erscheinen.

Bemerkenswert ist die planimetrische Rekonstruktion der Höhe  $z$  aus der Strecke  $z^f = c \cdot z^s = z / \cos \alpha$ : Auf Grund des Strahlensatzes braucht man nur die Strecke  $z^f$  mittels des Fluchtpunktes  $F_u^c$  (oder eines beliebigen anderen Fluchtpunktes am Horizont) auf die Hilfsgerade  $g_0 \parallel g$  ( $\overline{h g_0} = a$ ) „zurückzuschieben“ ( $a$  ist aus dem Seitenriß bekannt).

Dies hat einen interessanten Sachverhalt zur Folge: *Man erhält die Höhe eines Punktes  $P$ , indem man das perspektive Bild  $P'^c$  seines Grundrisses aus  $F_u^c$  auf die Hilfslinie  $g_0$  „schiebt“ und die Lotrechte über diesem Hilfspunkt mit der Verbindung  $P^c F_u^c$  schneidet.* Dieses Verfahren erspart das Abmessen mittels des Meßpunktes der  $z$ -Richtung und stimmt außerdem im Grenzfall  $\alpha = 0^\circ$  (waagrechte Grundebene) mit der dort üblichen Konstruktion überein.

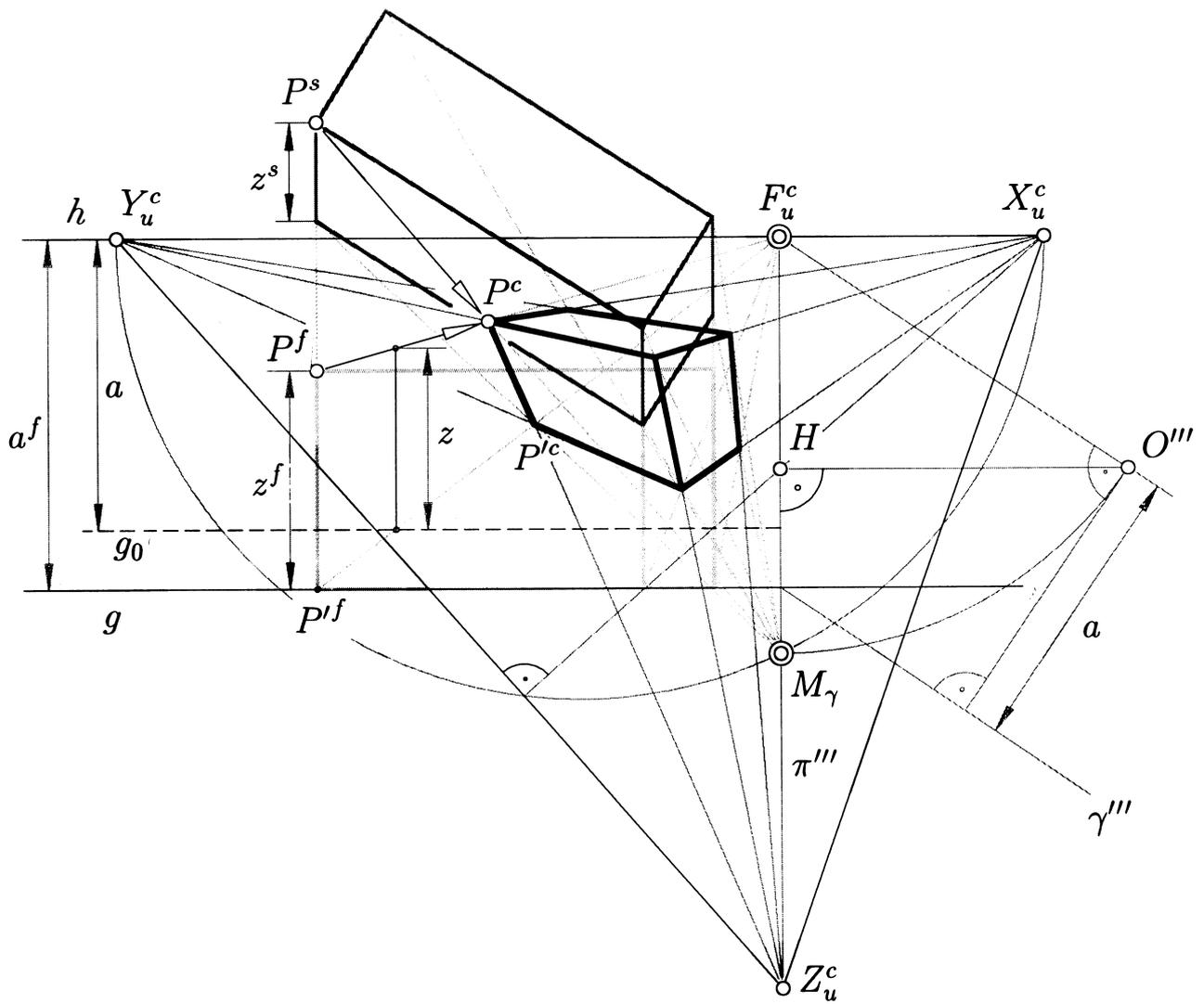


Abbildung 5: Entzerrung einer Perspektive durch Umzeichnen in einen Militärriß.