Über minutengenaue Sonnenuhren für die Mittlere Zeit

Georg Glaeser und Walter Hofmann, Wien

Kurzfassung: In dieser Arbeit werden Sonnenuhren zum Ablesen der Mittleren Zeit vorgestellt. Zwei Typen arbeiten mit Schatten von krummen Flächen auf Ableseskalen. Eine weitere Sonnenuhr leistet die Aufgabe mit Hilfe eines raffinierten Mechanismus. Es handelt sich um die Uhren von Oliver und Bernhardt, dazu eine Variation von Riegler, die Idee zu einer Uhr von Hofmann und die Uhr von Pilkington und Gibbs. Alle Uhren berücksichtigen die Zeitgleichung und sind bei sorgfältiger Ausfertigung in ausreichender Größe minutengenau. Die Berechnung der Zeiger und des erwähnten Mechanismus wird beschrieben.

Wahre und Mittlere Zeit

Sonnenuhren waren früher wichtige Zeitmesser, und auch heute noch üben sie eine große Faszination aus. Ihre Geschichte reicht ins Altertum zurück. Man teilte damals an jedem Tag die Zeitspanne zwischen Auf- und Untergang der Sonne mit Hilfe von Sonnenuhren in zwölf angenähert gleiche Teile. Dazu wurde der Sonnenstand durch den Schatten eines Stabendes, mitunter auch mit Hilfe einer Lochblende, auf eine Fläche mit einem Netz von Datums- und Stundenlinien abgebildet (Abb. 1). Eine Stunde war also eine variable, jahreszeitabhägige Zeitspanne. Man spricht heute von Temporalstunden.

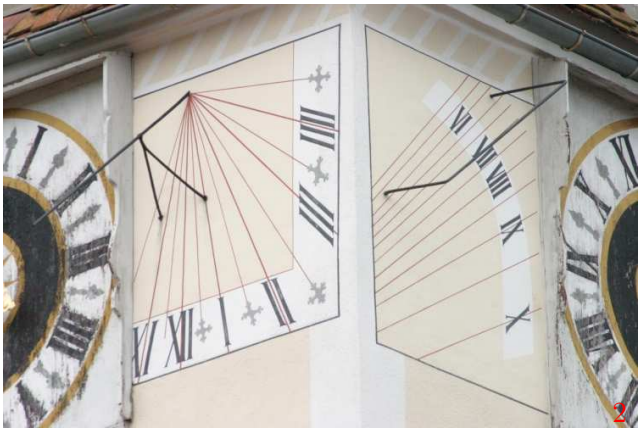
1

In der modernen Stundenteilung wird der Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Meridiandurchgängen der Sonne in 24 gleiche Teile geteilt. Der Meridian eines Beobachtungsortes ist, wird von den Polen abgesehen, der Großkreis der Himmelskugel durch den Zenit, den Nord- und den Südpunkt des Horizonts; der Mittelpunkt der Himmelskugel kann im Beobachtungsort angenommen werden, ihr Radius ist „unvorstellbar groß“. Wie noch gezeigt wird, variieren diese Tageslängen im Lauf des Jahres – das ist die Wahre Ortszeit. Heute wird die Mittlere Zeit, ein gleichförmiges Zeitmaß, verwendet. Am genauesten wird sie mit Atomuhren gemessen. Im Einklang mit dem Umlauf der Erde um die Sonne

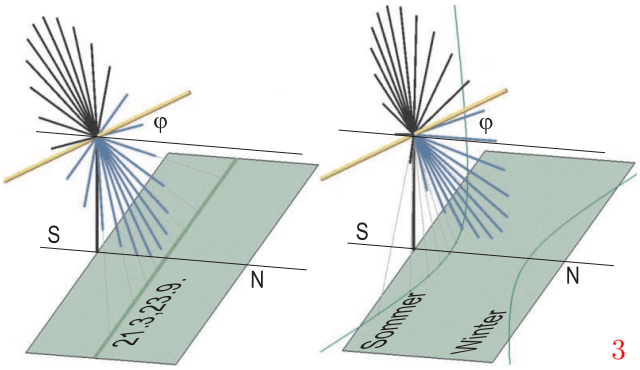
wird die Sekunde Mittlerer Zeit über die Perioden-dauer des 133Cs-Lichts definiert.
Zunächst wurde neben der Wahren Ortszeit eines Standorts die Mittlere Ortszeit betrachtet. Bereits das Eisenbahnwesen verlangte die Einführung von Zonenzeiten, mittleren Zeiten für größere Gebiete. So ist die Mitteleuropäische Zeit die Mittlere Ortszeit für Standorte 15° östl. Länge. Unsere Sommerzeit entspricht der Osteuropäischen Zeit (30° östl. Länge).
Sonnenuhren – wahre Analoguhren – messen die Wahre Zeit. Wir sprechen vom Wahren Mittag, wenn die Sonne genau im Süden steht. An vier Tagen im Jahr stimmen Wahre und Mittlere Zeit überein (Mitte April, Anfang Juni, Anfang September und Ende Dezember). Der Mittlere Mittag weicht vom Wahren Mittag im Laufe des Jahres um die Zeitgleichung ab, die noch besprochen wird, und bis zu 16 Minuten betragen kann.

Einfache Sonnenuhren

Von einem Standort auf der Erde aus betrachtet scheint sich der Himmel um einen Himmelspol zu drehen. Auf der nördlichen Himmelskugel befindet sich dort derzeit im Abstand von weniger als einem Grad der Polarstern. Die Achse der scheinbaren Drehung des Firmaments um unseren Standort weist auf den Himmelspol. Sie liegt in einer vertikalen Nord-Süd-Ebene und ist unter dem Winkel der jeweiligen geografischen Breite φ gegen die Horizontale geneigt. Die Achsen vieler Sonnenuhren weisen in diese Richtung (Abb. 2).

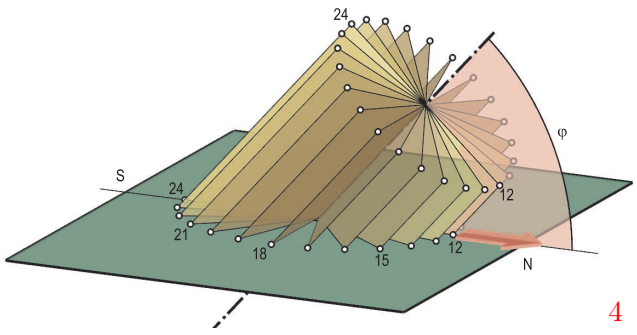

2

Die Erdachse ist zur Ebene der Erdumlaufbahn unter dem Komplementärwinkel zum Winkel ε=23,44° geneigt, der in sehr langen Zeiträumen nur geringen Schwankungen unterworfen ist. Zufolge des Umlaufes der Erde um die Sonne ändert sich der Winkel zwischen der Richtung von der Erde zur Sonne und der Erdachse, die weitgehend stabil im Raum liegt, ständig. Dieser Winkel beträgt 90° - δ; δ ist die Deklination der Sonne und liegt zwischen -ε und +ε. Im Lauf eines Tages ändert sich die Sonnendeklination nur gering – im Maximum um 0,4° zu den Tagundnachtgleichen. Man kann sagen: Im Laufe von wenigen Stunden überstreichen die Sonnenstrahlen durch einen festen Punkt der Erde einen Drehkegel mit festem Öffnungswinkel. Dieser Winkel hängt nur von der Jahreszeit, nicht aber von der geografischen Lage des Beobachtungsortes ab.



3

Die Spurkurve eines solchen Drehkegels in einer waagrechten Ebene ist ein Kegelschnitt, in nichtpolaren Gegenden immer eine Hyperbel, zu den Tagundnachtgleichen eine Gerade (Abb. 3). Derartige Spurkurven heißen Datumslinien.

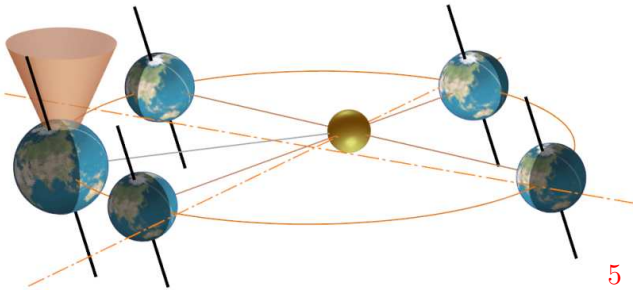


4

Wollen wir eine einfache Sonnenuhr konstruieren, müssen wir für die vollen Stunden ein Ebenenbüschel mit Ebenen von 15° zu 15° durch eine zur Himmelsachse parallele Gerade mit der Trägerfläche eines Zifferblatts schneiden (Abb. 4). Die Schnittlinien sind die Stundenlinien: Die Erde dreht sich ja in 24 Stunden um 360°.
Besondere Sonnenuhren sind äquatoriale Uhren, entweder mit ebenen, äquatorparallelen Zifferblättern oder mit drehzylindrischen Zifferblättern und zur Himmelsachse parallelen Erzeugenden. In beiden Fällen sind die Stundenlinien gleichmäßig verteilt.

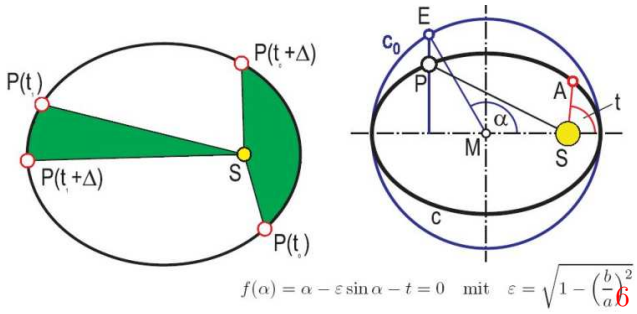
Die Zeitgleichung

Die Bewegung der Erde um die Sonne ist komplex. Um eine minutengenaue Sonnenuhr zustande zu bringen, muss man entweder mit Tabellen arbeiten, oder besser mit einer Computersimulation. Die Präzessionsbewegung der Erde (die Rotation der Achse im Lauf von rund 26000 Jahren) und die Nutation (kleine Störungen der Präzessionsbewegung) spielen bei Sonnenuhren keine Rolle.



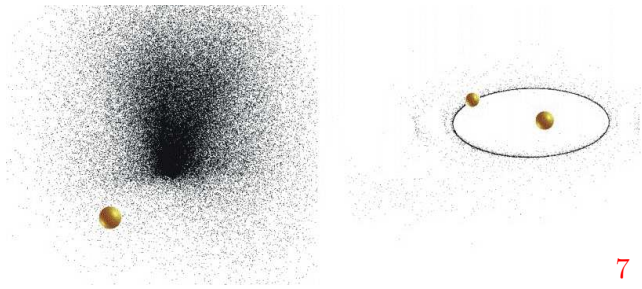
5

Abb. 5 ist eine „karikierte Darstellung“ der Stellungen der Erde zu den Tagundnachtgleichen und den Sonnenwenden. An der großen Kugel ist die Präzessionsbewegung veranschaulicht (die Erdachse überstreicht den Mantel eines Drehkegels).
Um nun eine Computersimulation zuwege zu bringen, müssen wir die Sache mit ein wenig physikalischem Vorwissen geometrisch durchschauen. Die bloße Anwendung der Keplerschen Regeln ist zwar möglich, aber nicht einfach zu implementieren: Die Bahnellipse der Erde muss nach der Zeit parametrisiert werden, was die fortgesetzte Lösung der transzendenten Keplergleichung erfordert (Abb. 6 mit ε als numerischer Exzentrizität der Ellipse). Besser kommt man mit dem Drehimpulserhaltungssatz zurecht, aus dem die Keplerschen Gesetze zwangläufig folgen.



6

Man bekommt differentialgeometrisch die Bahnkurve mit ihren physikalischen Eigenschaften aus der Kenntnis der Anfangsgeschwindigkeit und der zugehörigen Bewegungsrichtung. Der Drehimpuls wird bezüglich jener Achse durch die Sonne berechnet, welche auf die Bahnebene der Erde senkrecht steht.



7

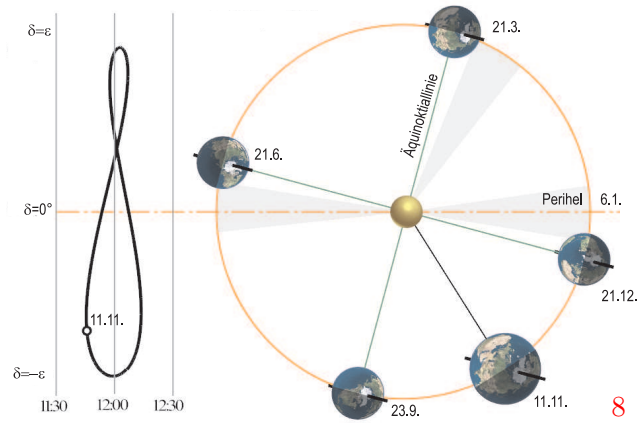
Abb. 7 zeigt Ausgangslage und Ergebnis einer Computersimulation, bei der Reste einer Supernova nahe an einer Sonne vorbeiziehen: Die Sonne wird Teile der Bruchstücke „einfangen“ und in eine elliptische Umlaufbahn zwingen, wo sich das Material durch Zusammenstöße verdichtet und zu einem Planeten formt.
Die Erde bewegt sich nach dem Drehimpulserhaltungssatz auf einer elliptischen Umlaufbahn um die Sonne (erstes Keplersches Gesetz). Die numerische Exzentrizität der Bahnellipse ist recht klein (ε=0,017). Nach demselben Prinzip muss die Erde

dabei ständig ihre Bahngeschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit um die Sonne ändern. Bei Verkleinerung des Abstands zur Sonne nimmt die Winkelgeschwindigkeit quadratisch mit dem Verkleinerungsfaktor zu (zweites Keplersches Gesetz: Gleiche Zeiten – gleiche Flächen).

1. Die „physikalische“ Komponente
Während sich die Erde ungleichförmig um die Sonne bewegt, dreht sie sich mit annähernd konstanter Winkelgeschwindigkeit um die eigene Achse, gegenüber dem Fixsternhimmel an einem Tag in etwa 23 Stunden und 56 Minuten. Die restlichen vier Minuten braucht sie, um die inzwischen erfolgte Drehung um die Sonne wettzumachen (die Sonne soll ja wieder im Süden stehen). Weil die Bewegung um die Sonne aber nicht konstant ist, variiert diese Zeitspanne, und jeden Tag gibt es eine kleine Abweichung, die einen Beitrag zur Zeitgleichung – der täglichen Differenz „Wahre minus Mittlere Ortszeit“ – liefert.

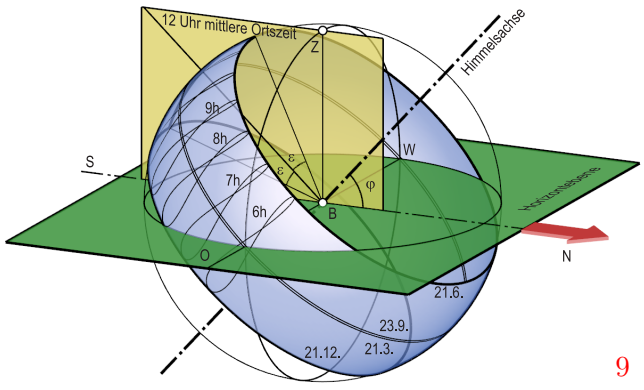
2. Die „geometrische“ Komponente
Die Zeitgleichung hat aber noch eine erheblichere Komponente, die durch die Neigung der Erdachse zustande kommt. Die Drehung um die Sonne und die Eigendrehung haben windschiefe Drehachsen. Beide Drehungen kann man sich also nicht in einer gemeinsamen Ebene vorstellen! Ein kreisrundes äquatorparalleles Zifferblatt mit einer regelmäßigen Stundenteilung bildet sich bei Normalprojektion auf die Bahnebene der Erde leicht elliptisch verzerrt ab. Der Zeigerschatten auf dem Zifferblatt der Uhr kreist also in dieser Normalprojektion nicht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit!
Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Erde drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit von 1° pro Tag um die Sonne. Dann müsste jeden Tag auf der elliptisch verzerrten Stundenskala ein Winkel von 1° nachgeholt werden, um dieselbe Relativposition der Sonne zu erreichen. Der Umlauf des Schattens auf der kreisförmigen Uhr wäre dann nicht gleichförmig!

3. „Äquinoktiallinie“ und Bahnellipse
Zu den beiden Äquinoktien (Tagundnachtgleichen) geht die Eigenschattengrenze der Erde durch die beiden Pole. Die Sonnenstrahlen treffen die Erdachse im rechten Winkel. Die Verbindungsgerade der beiden entsprechenden Stellen der Erdbahn, die Äquinoktiallinie, schließt einen Winkel mit der Hauptachse der Bahnellipse ein, der sich zufolge der Präzessionsbewegung und der Periheldrehung (Drehung der Ellipsenscheitel) langsam ändert, innerhalb Menschengedenkens aber kaum. Der Winkel beeinflusst ebenfalls die Werte der Zeitgleichung, wenn auch nicht gravierend.



8

In Abb. 8 wurde für die Daten der Erde die Zeitgleichung berechnet. Jeder Position der Sonne zum Mittleren Mittag entspricht ein Punkt der Achterschleife. Beträgt der Winkel zwischen der Äquinoktiallinie und der Hauptachse der Bahnellipse 90°, ist die Achterschleife axial symmetrisch. Abb. 8 zeigt auch die Eigenschattengrenzen der Erde.

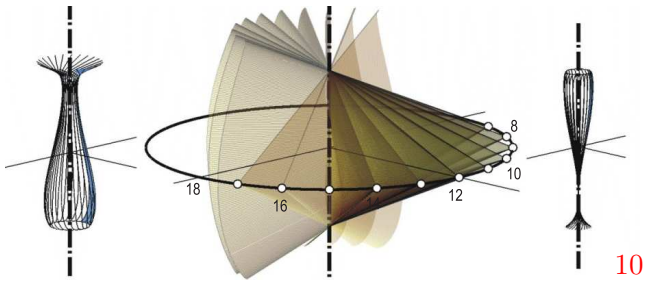


9

Abb. 9 zeigt ein verkleinertes Bild der Himmelskugel, auf welche die Gestirne projiziert gedacht werden. Eingetragen sind die Ebene des Horizonts für 48° nördlicher Breite (Wien), der Zenit Z, die Himmelsachse, die Ebene des Ortsmeridians, der Himmelsäquator (Doppellinie) und die beiden Wendekreise. Weiters sind die achterförmigen sphärischen Kurven für die vollen Stunden Mittlerer Ortszeit zu sehen. Sie entstehen durch Drehung der Stundenlinie für den Mittleren Mittag um Vielfache von 15°. *Bemerkung*: Die Computersimulation erlaubt für jeden denkbaren Ort eines Planetenystems und beliebige numerische Exzentrizitäten und Achsenneigungen Zeitgleichungen zu berechnen. Es ergeben sich die verschiedensten Schleifenformen, die auch symmetrisch sein können und nicht notwendig einen Doppelpunkt besitzen.

Die Bernhardt-Uhr

Betrachtet man alle jene 365 Sonnenstrahlen, die einen festen Punkt der Erde im Laufe eines Jahres täglich zum Mittleren Mittag treffen, dann liegen diese auf einem Kegel, der auf der Himmelskugel besagte Achterschleife der Zeitgleichung als Leitkurve hat („Achterkegel“). Betrachten wir nun einen Kreis in einer äquatorparallelen Ebene (Abb. 10). Seine Achse geht durch den Himmelspol. Wir markieren nun 24 Punkte auf dem Kreis im Abstand von je 15° und beschriften die Punkte mit 0, 1, ..., 23, 24=0. Durch den Punkt 12 werden zunächst Strahlen zur Achterschleife auf der Himmelskugel für den Mittleren Mittag gelegt. Damit dieser Kegel nicht von der Kreisachse geschnitten wird, wird der Punkt 12 aus der tiefsten Lage etwas gegen Osten gedreht (die Richtungen zur Achterschleife bleiben dabei erhalten).



10

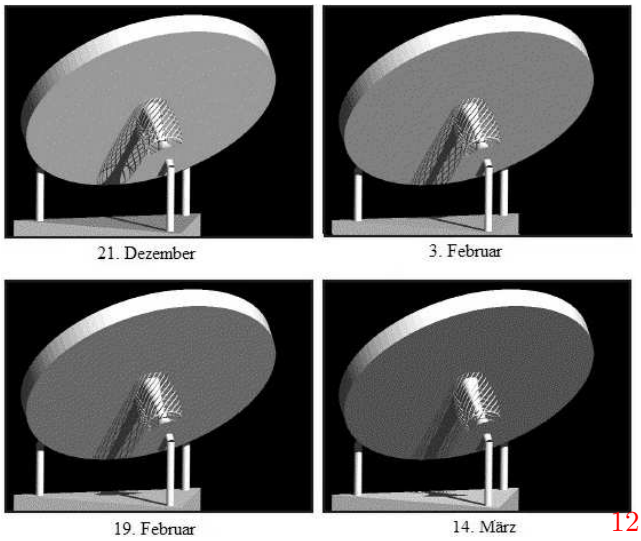
Im Lauf des Tages dreht sich ein Lichtstrahl, der dem Achterkegel durch 12 angehört, gleichmäßig um die Kreisachse und hüllt dabei i. Allg. ein Drehhyperboloid ein (Rolf Wieland: Äquatoriale Sonnenuhren mit automatischem Zeitausgleich. Rundschr. 26 und 27 d. Arbeitsgr. Sonnenuhren im Österr. Astron. Verein 2003/04). Die vom rotierenden Achterkegel (oder aber auch von allen Hyperboloiden) eingehüllte Drehfläche kann dann als krummflächiger Zeiger einer Sonnenuhr für die Mittlere Zeit dienen. Die Drehfläche ist *Brennfläche* jener Strahlkongruenz, die von allen den Kreis treffenden Lichtstrahlen gebildet wird. Der Kreis selbst ist Brennlinie der Kongruenz.

11

Alle Lichtstrahlen, die genau zum Mittleren Mittag den krummen Zeiger berühren und den Kreis treffen, gehen nach Konstruktion durch den Punkt 12. Die Zeitgleichung ist damit berücksichtigt. Damit statt der Ortszeit eine Zonenzeit auf der Sonnenuhr abgelesen werden kann, wird die kreisförmige Stundenskala um den Winkel gedreht, um den sich die geografischen Längen des Standorts und des Zonenmeridians unterscheiden.

Die beschriebene Idee stammt von *Oliver* (1892) und wurde von *Bernhardt* vor rund 40 Jahren verbessert. Das Problem, dass die auftretende Hülldrehfläche aus zwei Mänteln besteht, weil sie ja von einem Achterkegel erzeugt wird, wird an dieser Uhr mit zwei verschiedenen Drehflächen gelöst, die zu den Sonnenwenden gewechselt werden. Die eine Fläche dient das eine Halbjahr, die zweite das andere Halbjahr als Zeiger. Kritisch sind die Randbereiche der Drehflächen zu den Sonnenwenden, weil sich da

die einhüllenden Hyperboloide überdecken. Um die Sonnenwenden ist die Zeit nicht minutengenau abzulesen.

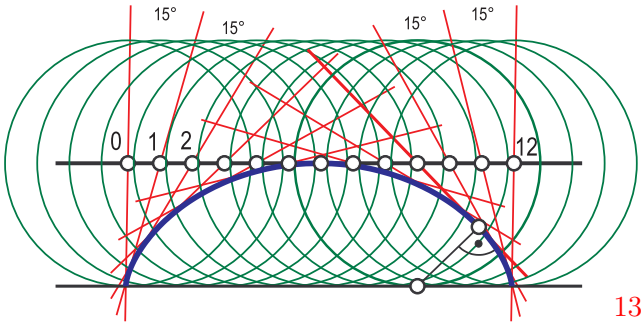


12

Riegler hat die Idee von *Oliver* (*Bernhardt*) variiert, indem er beide Mäntel der Drehfläche fest mit der Platte der beiden Zifferblätter verbindet (Abb. 11). Der äußere Mantel ist als Gitter ausgebildet, der innere als geschlossene Fläche. Je nachdem, in welchem Halbjahr man abliest (jedes Halbjahr geht von Sonnenwende zu Sonnenwende), wird man den Schatten des Innenteils bzw. Außenteils der Fläche zur Zeitbestimmung heranziehen (Abb. 12). Überdies zeigt der Schatten der Zifferblattscheibe auf dem Gitter des äußeren Mantels das jeweilige Datum an.

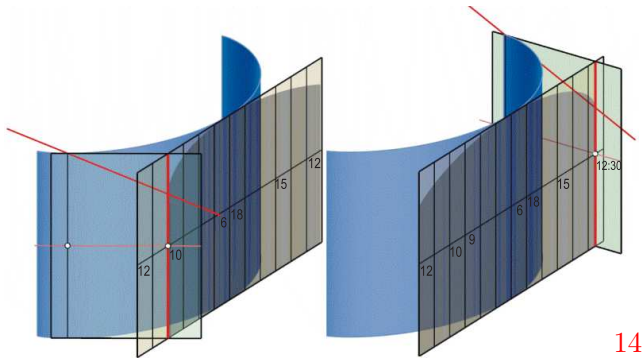
Zykloidenuhr für die Mittlere Zeit

Über Internet erreichte uns aus den U.S.A. die Frage, ob es einen Sonnenuhrzeiger gibt, dessen Schatten auf einem zur Himmelsachse parallelen ebenen Zifferblatt mit geraden Stundenlinien die Mittlere Zeit anzeigt. Werden auf einer solchen Ebene Datumslinien und achterförmige Stundenlinien eingetragen, so können Mittlere Zeiten etwa mit Hilfe einer Lochblende abgelesen werden. Das war aber nicht im Sinn des Fragestellers.



13

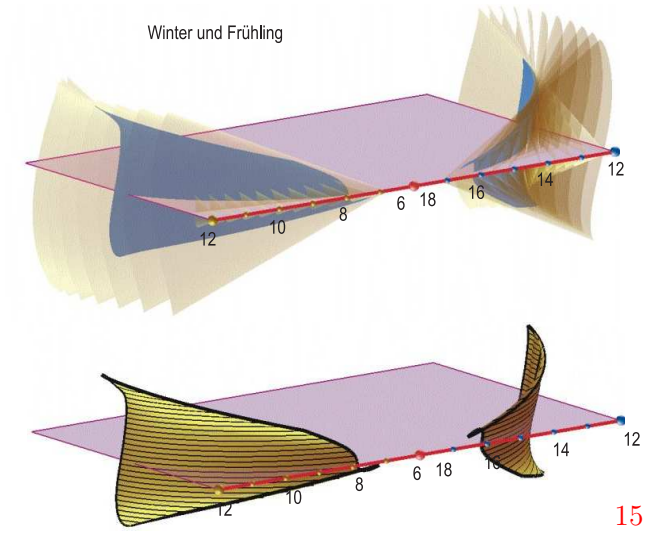
Eine schöne Sonnenuhr zur Anzeige der Wahren Zeit beschreibt Fred Sawyer (The Cycloid Polar Sundial. Compendium, North American Sundial Society, Volume 5, No. 4, pp. 21-24, 1998): Rollt in einer Ebene ein Kreis auf einer Geraden, so hüllt ein Durchmesser des Kreises eine gemeine Zykloide ein (Abb. 13). Ein Zylinder mit zur Himmelsachse parallelen Erzeugenden, die einen Bogen einer gemeinen Zykloide in einer äquatorparallelen Ebene treffen, kann daher als Zeiger für die Wahre Zeit dienen, wenn die Stundenskala auf der Scheiteltangente des Zykloidenbogens liegt.



14

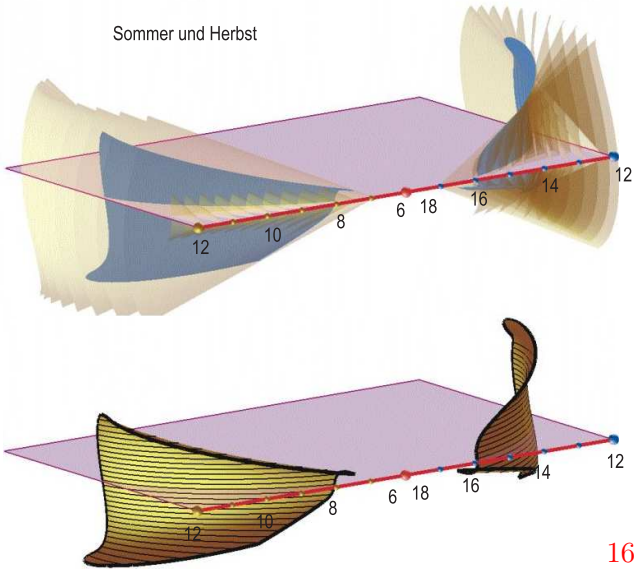
Die Uhr kann so aufgestellt werden, dass die Scheiteltangente von Osten nach Westen gerichtet ist. Die Wahre Ortszeit von 6 Uhr bis 12 Uhr ist dann auf einer Halbtangente, die von 12 Uhr bis 6 Uhr abends auf der anderen abzulesen (Abb. 14). Die Stundenpunkte sind von Stunde zu Stunde in gleichen Abständen voneinander angeordnet. So kann die Sonnenuhr durch eine einfache Verschiebung der Stundenskala auf ihrer Trägergeraden für die Wahre Ortszeit eines Zonenmeridians eingerichtet werden.

Nun wird einer der beiden Sonnenstrahlenkegel, wie sie für die Bernhardt-Uhr betrachtet wurden, wie folgt geführt: Seine Spitze wird entlang der Stundenskala der Zykloidenuhr bewegt, seine Erzeugenden für die Zeitgleichung Null berühren den Mantel des Zykloidenzylinders, und der Strahl der Tagundnachtgleiche behält die Deklination 0°.
Es ergibt sich eine Hüllfläche (Abb. 15, Abb. 16), die als Zeiger für die Mittlere Zeit verwendet werden kann. Selbstschnitte treten sowohl in den Bereichen um die Sonnenwenden als auch in der Nähe der Zykloidenspitzen auf. Gute Anzeigen sind ab 7 Uhr und bis 17 Uhr Mittlerer Ortszeit zu erwarten. Der dazwischen liegende Bereich des Zeigers braucht nicht für eine Anzeige ausgebildet zu werden. Hier können Zeiger und Zifferblatt miteinander verbunden werden.
Verschiebungen der Stundenskala ermöglichen ein Ablesen von Zonenzeiten, insbesondere der Sommerzeit. Wie bei der Bernhardt-Uhr gibt es zwei Zeigerflächen, die jeweils zu den Sonnenwenden zu tauschen sind.



15

Die Berechnung dieser Sonnenuhr erfolgte mittels der Software *Open Geometry*. In regelmäßigen Intervallen wurden die Charakteristiken der Fläche berechnet, indem zwei benachbarte Achterkegel – etwa im Abstand von einer Minute – geschnitten wurden. Damit war die Fläche durch eine Schar von Charakteristiken festgelegt. Die Verbindungsfläche von je zwei benachbarten Charakteristiken wurde interpoliert.

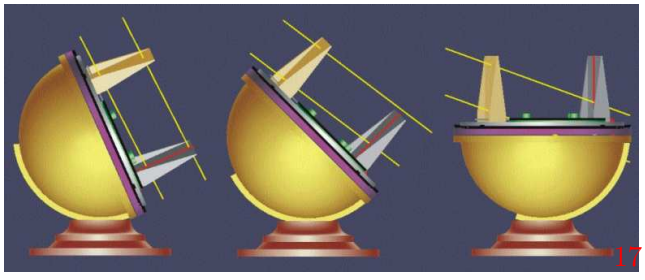


16

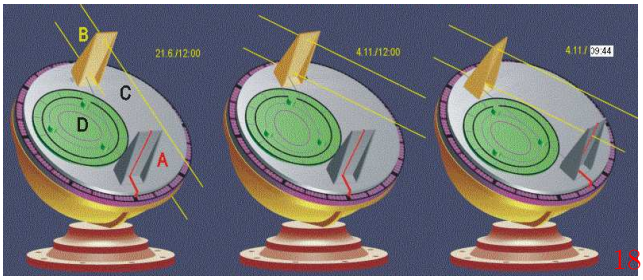
Die Sonnenuhr ist optisch beeindruckend, ihr Bauplan kann aber nur als Antwort auf die eingangs gestellte Frage angesehen werden. Eine Herstellung wäre sehr teuer, Mittlere Zeiten werden auf anderen Sonnenuhren besser angezeigt.

Die Pilkington-Gibbs-Uhr

Einen anderen Ansatz eines minutengenauen Heliochronometers verfolgten 1906 Pilkington und Gibbs, Gibbs als Erfinder, Pilkington als Hersteller. Sie statteten eine schwenkbare Kreisscheibe so aus, dass sie in Gegenden außerhalb der Rossbreiten nach dem Einnorden sofort äquatorparallel gedreht werden kann (Abb. 17). In Äquatornähe muss die Trägerhalbkugel an einer Schrägen angebracht werden.

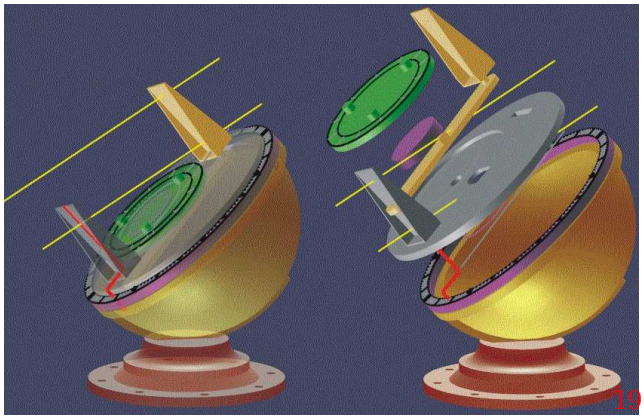

17

Die Kreisscheibe C (grau), die als Ziffernblatt einer 24-Stunden-Uhr fungiert, ist in sich verdrehbar (Abb. 18). An ihr ist ein Aufsatz A mit einem (roten) Ablesestrich fix montiert. Ein zweiter Aufsatz B (gelb) ist beweglich montiert: Er kann eingeschränkt auf einem Kreisbogen (realisiert durch eine Schlitzführung in der Scheibe) bewegt werden, dessen Mitte die Normalprojektion des Ablesestrichs A auf die Kreisscheibe ist (vgl. Explosionszeichnung Abb. 19 sowie Abb. 20). Durch zwei kleine Bohrungen im Aufsatz B können Lichtstrahlen den Ablesestrich treffen. Die Aufsätze sind so dimensioniert, dass zu jeder Jahreszeit zumindest durch eine der beiden Bohrungen Licht auf den Ablesestrich fallen kann.

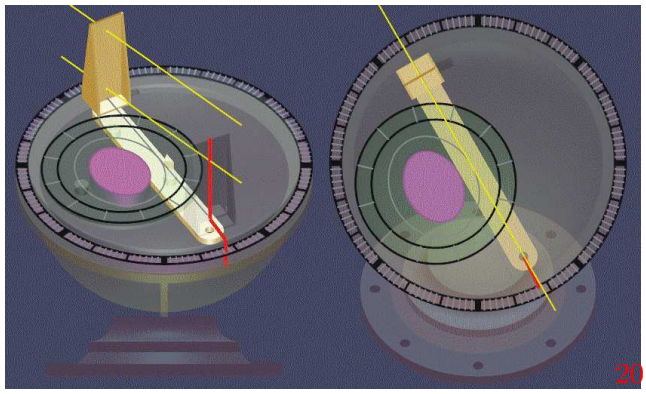


18

Die Uhr wird auf ihrem Standort eingenordet und seiner geografischen Breite φ angepasst. Nun lautet die sehr einfache Bedienungsanleitung wie folgt: Man stelle zunächst mit einem kleinen (grünen) Rad D das aktuelle Datum ein (Abb. 18 Mitte, z.B. 4. Nov.) und verdrehe dann die Kreisscheibe, bis einer der Lichtstrahlen den Ablesestrich trifft (Abb. 18 rechts). Jetzt kann auf Stundenskala die exakte Zeit abgelesen werden (im konkreten Fall 09:44 – ohne Zeitgleichung wäre es 10:00).
Lägen die beiden Aufsätze immer genau diametral, dann bliebe die Zeitgleichung unberücksichtigt. Hat man die Kreisscheibe so weit gedreht, dass das einfallende Licht den Ablesestrich trifft, dann könnte man die Zeit schon einigermaßen genau ablesen: Jeder Stunde Abweichung vom Wahren Mittag entspricht ja eine Verdrehung der Scheibe um 15°.


19

Um nun die Zeitgleichung einzubeziehen, muss Aufsatz B mit den beiden Löchern – abhängig vom Datum – zusätzlich geringfügig verdreht werden. Das geschieht – und geschah im obigen Beispiel – mit Hilfe einer exzentrischen Drehscheibe im Inneren der Halbkugel. Die beiden Aufsätze sind durch eine Stange (Gerade) miteinander verbunden. Die Stange wird von einer Feder an die exzentrische Scheibe gedrückt. Verdreht man diese Scheibe, dann presst sie die Stange in die eine oder andere Richtung (Abb. 20).


20

Die Dimensionierung der Scheibe muss so vorgenommen werden, dass der Verdrehungswinkel und die erforderliche Position mit dem zugehörigen Datum übereinstimmen. Dies geschah früher nach Tabellen, heute kann man die Scheibe mit dem Computer berechnen. Das Profil ergibt sich bei unendlich dünner Stange als Einhüllende einer Geradenschar,

das tatsächliche Profil ist eine Parallelkurve dazu (Abb. 20).

Literatur

Zur Astronomie allgemein:
Helmut Zimmermann, Alfred Weigert: *ABC-Lexikon Astronomie*. Spektrum Akad. Verlag Heidelberg, 1995

Relevante Internetseiten
Zu den Zeitgleichungsschleifen:
`http://www.uni-ak.ac.at/geom/sonnenstand`
Zur Bernhardt-Uhr:
`http://www.praezisions-sonnenuhr.de/`
Zur Riegler-Uhr:
`http://riegler.home.cern.ch/riegler/sundial/hauptseite.htm`
Zur Pilkington-Gibbs-Uhr:
`http://homepage.ntlworld.com/jmikeshaw/page12.html`
Zu Open Geometry:
`http://www.uni-ak.ac.at/geom/opengeom/`
Dieser Aufsatz ist mit Einverständnis der Verlage auch zu finden in
Georg Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Spektrum Verlag - Elsevier / Heidelberg 2005.