

Wann steht die Sonne im Westen?

Geometrische Betrachtungen zum Lauf der Sonne am Firmament

Georg GLAESER, Wien

Dieser Aufsatz soll die relative Position der Sonne im Lauf des Kalenderjahres bzw. im Laufe eines Sonnentages mittels der Methoden der Darstellenden Geometrie beleuchten. Die folgenden Fragen werden erörtert und mit brauchbarer Genauigkeit gelöst:

- Wann und wo geht die Sonne auf bzw. unter?
- Von wo kommt das Sonnenlicht an einem speziellen Tag zu einer bestimmten Zeit?
- Wie kann man bei Sonnenschein mittels einer Armbanduhr exakt die Himmelsrichtungen bestimmen?
- Wann steht die Sonne genau im Westen?

Es stellt sich heraus, daß die erste und die letzte Frage völlig gleichwertig zu behandeln sind. Die Ergebnisse werden näherungsweise durch Formeln ausgedrückt und mittels eines Pascal-Programms ausgewertet. Die Güte der Näherung wird anhand astronomischer Tabellen überprüft.

1. Einleitung

Die Sonne geht bekanntlich nur an zwei Tagen des Jahres genau im Westen unter. Im Winterhalbjahr verschwindet sie – zumindest in unseren Breiten – irgendwo zwischen Südwesten und Westen, im Sommerhalbjahr zwischen Westen und Nordwesten.

Ein Wohnzimmer sei genau nach Norden ausgerichtet. Zu welcher Jahreszeit und wieviele Minuten oder gar Stunden kann man trotzdem mit Morgen- bzw. Abendsonne im Zimmer rechnen? Diese Aufgabe führt genau auf die im Titel des Aufsatzes gestellte Frage. Die naive Annahme, die Sonne stehe exakt um 18^h wahrer Sonnenzeit im Westen – also in Wien etwa um 19^h Mitteleuropäischer Sommerzeit – erweist sich als falsch. Also wollen wir der Frage mit den Mitteln der Darstellenden Geometrie auf den Grund gehen. Im gesamten Text werden ergänzende Fakten, welche bei der didaktischen Aufbereitung erst im nachhinein erwähnt werden sollten, in Fußnoten gesetzt. Für zahlreiche „astronomische Hinweise“ möchte ich Herrn Dr. E. Göbel von der Universitätssternwarte in Wien danken.

2. Fakten und Vereinbarungen

Die Erde umrundet bekanntlich innerhalb eines Jahres (365,24 Tage) die Sonne und dreht sich dabei kontinuierlich um eine Achse a mit fester Richtung (Polarstern!). Die Zeit für eine volle Umdrehung beträgt etwas weniger als 24 Stunden¹. Die Bahnkurve der Erde ist eine nahezu kreisförmige Ellipse². Die Normale der „Ekliptik“ (Trägerebene der Ellipse) schließt mit der Erdachse a den konstanten Winkel $\delta = 23,45^\circ$ ein³.

Die idealisierte Erdoberfläche wird gut durch eine Kugel angenähert⁴. Ein Punkt auf der Erdoberfläche ist durch seine geographische Länge λ bzw. Breite φ eindeutig bestimmt (Wien z.B. durch $\lambda = 16,3^\circ$, $\varphi = 48,2^\circ$).

Um den Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung zu mindern, verwenden wir folgende Vereinfachungen, welche – wie wir noch sehen werden – durchaus vertretbar sind:

¹ Nämlich etwa $23^h 56^m$. Weitere 4^m werden benötigt, um die Rotation der Erde um die Sonne („Revolution“) wettzumachen.

² Für die große Halbachse a und die Exzentrizität e der Ellipse gilt die Beziehung $e \approx \frac{a}{60}$.

³ Auf Grund der „Präzessionsbewegung“ der Erde ändert sich dieser Wert im Laufe der Jahre (Jahrzehnte) geringfügig. In älteren Büchern findet man daher noch den Wert $23,50^\circ$.

⁴ Abplattung an den Polen ca. $\frac{1}{300}$ des Erdradius.

1. Zeitangaben betreffen i. allg. die „wahre Sonnenzeit“, d.h., die Sonne soll exakt um 12^h Mittag ihren Kulminationspunkt erreichen⁵.
2. Die Erdbahn wird durch einen Kreis angenähert (die maximale Abweichung von der Bahnellipse liegt unter 1,5% des Kreisdurchmessers).
3. Die Sonnenstrahlen sind wegen der großen Entfernung der Sonne parallel⁶.
4. Rechnet man jeden Monat mit 30 Tagen (360 Tage im Jahr), so dreht sich die Erde täglich um ca. 1° um die Sonne⁷. Für Betrachtungen, die nur einen Tag dauern, wird diese relativ kleine Ortsveränderung vernachlässigt.

3. Zwei wichtige Hilfssätze

Es gilt nun gemäß Abb. 1 für den Beobachter auf der Erde folgender erster Hilfssatz:

Die Normalprojektion der Erdachse a auf die horizontale Grundebene γ – also die Kugeltangentialebene im Beobachterstandpunkt B – weist zum geographischen Nordpol. Die Neigung der Achse stimmt mit der geographischen Breite φ des Beobachters überein. (Der Polarstern erscheint also unter dem Höhenwinkel φ .)

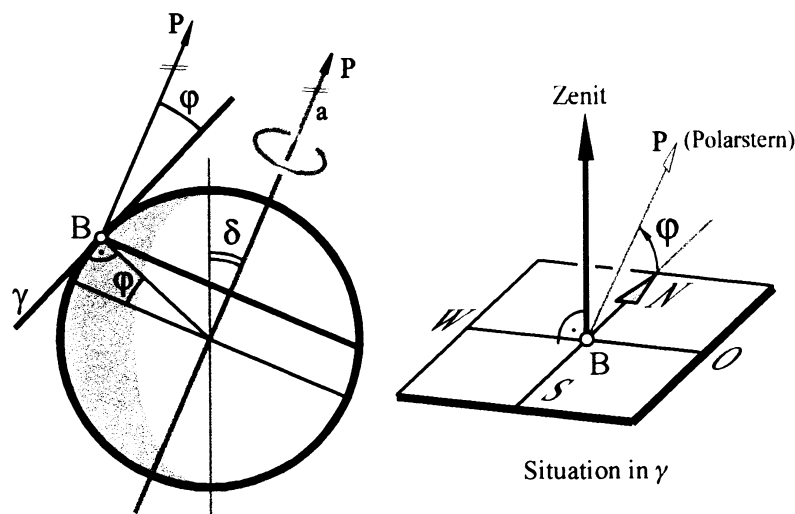


Abb. 1: Die Position des Polarsterns

Zufolge Vereinfachung 4 bleibt – heliozentrisch gesehen – die Lichtstrahlrichtung s während eines Tages unverändert. Geozentrisch gesehen erhält man damit einen zweiten Hilfssatz:

Die Lichtstrahlrichtung s dreht sich innerhalb eines Tages gleichmäßig um die Erdachse a und überstreicht dabei einen Drehkegel Σ mit der Achse a . Der halbe Öffnungswinkel σ dieses Drehkegels⁸ ist unabhängig von der geographischen Lage und variiert im Intervall $90^\circ - \delta \leq \sigma \leq 90^\circ + \delta$ (Abb. 2).

⁵ Die Zeitdifferenz zwischen zwei Kulminationszeiten schwankt ständig und beträgt nicht exakt 24 Stunden. Folglich müsste man die Uhren täglich verstellen, um die Sonne exakt um 12^h kulminieren zu sehen. Die täglichen Fehler summieren sich auf, sodaß im Lauf der Wochen Abweichungen von etwa ± 15 Minuten zustandekommen ([1]). Dies ist auf das zweite Keplersche Gesetz („Flächenregel“) zurückzuführen: Der Radialstrahl von der Sonne zur Erde überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

⁶ Dadurch rechnet man im Näherungsmodell mit dem Sonnenmittelpunkt. Man bedenke allerdings, daß die Sonne trotz ihrer Entfernung (≈ 150 Mio. km) wegen ihres enormen Durchmessers ($\approx 1,4$ Mio. km) am Firmament unter einem Schinkel von $\approx 0,5^\circ$ erscheint.

⁷ Auch dieser Wert ändert sich nach dem zweiten Keplerschen Gesetz ständig, wenn auch geringfügig. Die Erde hat im Winter eine größere Winkelgeschwindigkeit als im Sommer. Dadurch ist auch das Winterhalbjahr 6 Tage kürzer als das Sommerhalbjahr!

⁸ In der Astronomie ist meist vom Komplementärwinkel von σ die Rede, welcher „Sonnendeklination“ genannt wird ([4]).

Zur geometrischen Ermittlung des halben Öffnungswinkels σ denken wir uns den Bahnkreis k der Erde E in der Grundrißebene π_1 und die Erdachse a parallel zur Aufrißebene π_2 . Die „Nullposition“ der Lichtstrahlrichtung sei bei Frühlingsbeginn (21. März) erreicht und zweitprojizierend.

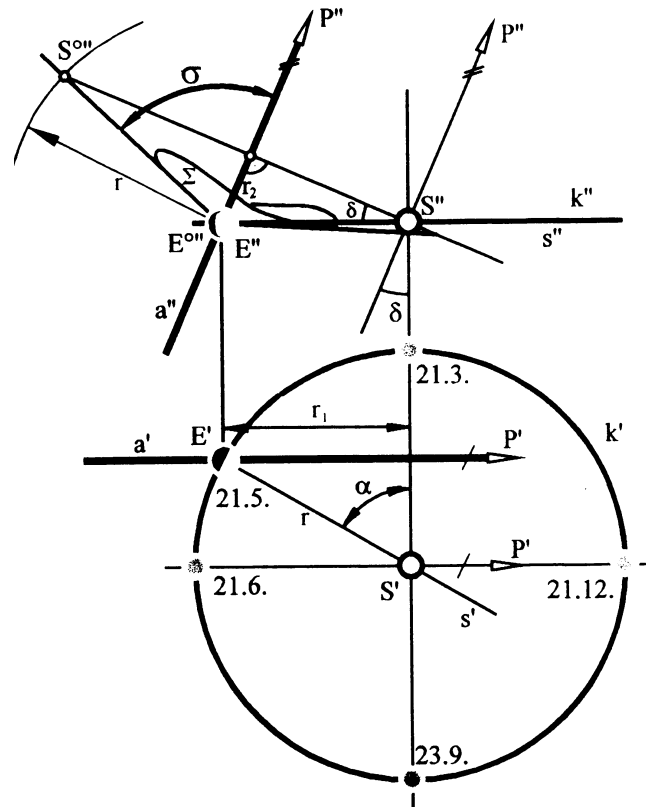


Abb. 2: Die Ermittlung des charakteristischen Winkels σ

Zu jedem bestimmten Datum – also etwa zum 21. Mai – gibt es einen bestimmten Öffnungswinkel des Drehkegels Σ . Dieses Datum sei α Tage nach Frühlingsbeginn – im konkreten Beispiel sind es 60 Tage. Die Erde E befindet sich dann etwa α° vor der Nullposition⁹.

Der gesuchte halbe Öffnungswinkel σ des Drehkegels Σ ergibt sich nun darstellend geometrisch durch Paralleldrehen der Lichtstrahlrichtung $s = ES$ um die Erdachse a im Aufriß: Die Drehachse ist Frontalgerade, sodaß der Drehkreis von S zweitprojizierend erscheint. Die wahre Länge r der Strecke ES ist aus dem Grundriß bekannt ($\Rightarrow \overline{E''S''} = r$).

Die Sonnendeklination $90^\circ - \sigma$ kann natürlich auch astronomischen Tabellen entnommen werden. In [4] wird an Hand von Tabellen gezeigt, daß der Fehler bei der Ermittlung von σ unter Vernachlässigung der Keplerschen Gesetze relativ gering ist ($\pm 1^\circ$, also am Firmament maximal 2 Sonnendurchmesser).

⁹ Wir rechnen ja der Einfachheit halber *alle* Monate mit 30 Tagen und treffen damit zwei Fliegen auf einen Schlag: Erstens erhalten wir dadurch 360 Tage im Jahr – sodaß jedem Tag ein Grad entspricht – und zweitens werden die Tage im Sinn der Keplerschen Flächenregel „gewichtet“. Unser vermeintlich willkürlicher Kalender (Februar nur 28 Tage, Juli und August je 31 Tage) gleicht nämlich die Unterschiede zwischen Winter- und Sommerhalbjahr einigermaßen aus.

4. Sonnenaufgang bzw. -untergang

Nun wollen wir die Tageslänge bzw. Sonnenaufgang und Sonnenuntergang für unser gewähltes Datum an einem Ort mit der geographischen Breite φ (z.B. $\varphi = 48,2^\circ$) bestimmen. Abb. 3 zeigt, wie dies in einfachster Aufstellung geschehen kann: Die Achse a des Drehkegels Σ wird lotrecht angenommen. Die Schichtenkreise von Σ erscheinen dann im Grundriß unverzerrt. Die horizontale Grundebene γ schließt gemäß Hilfssatz 1 mit a den Winkel φ ein. Sie schneidet aus einem beliebigen Schichtenkreis (etwa jenem mit dem Radius 1 Einheit) zwei Punkte S_1 und S_2 aus, die dem Sonnenaufgang bzw. Sonnenuntergang entsprechen.

Die zugehörigen Kreisbögen lassen sich als Tageslänge bzw. Nachtlänge interpretieren. Durch Eintragen eines 24-stündigen „Zifferblatts“ auf dem „Einheitskreis“ lassen sich die zu S_1 und S_2 gehörigen Zeitpunkte direkt ablesen. Die Tageslänge ist in den diversen Tabellen stets um etwa 15 Minuten länger als der theoretische Wert angeführt. Sonnenaufgang bzw. Sonnenuntergang sind nämlich so definiert, daß sie dem subjektiven Empfinden des Beobachters entsprechen. Daher geht die Sonne bereits auf, wenn die ersten Sonnenstrahlen (und nicht der Sonnenmittelpunkt) den Horizont erreichen. Analoges gilt für den Sonnenuntergang.

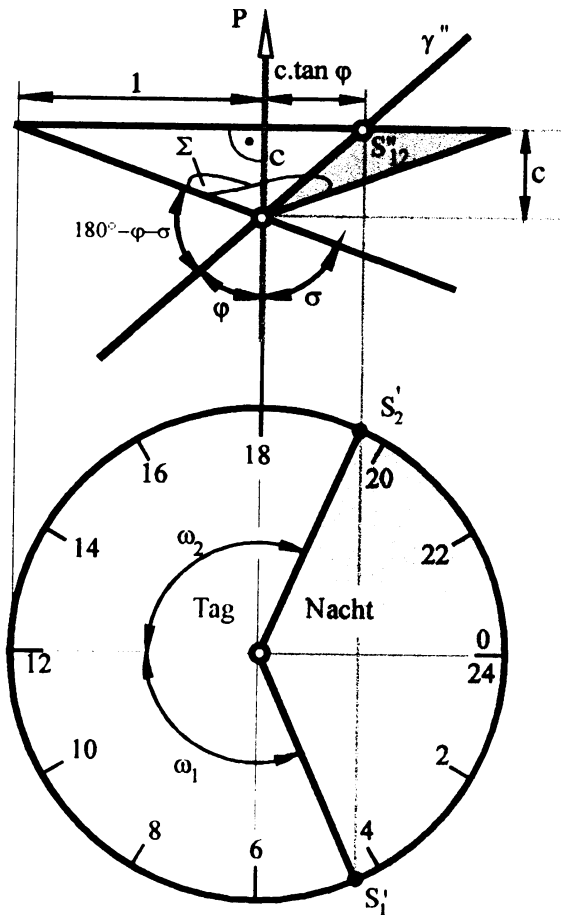


Abb 3: Sonnenaufgang bzw. Sonnenuntergang

Außerdem werden die Sonnenstrahlen beim Übergang vom Vakuum des Weltalls in die optische immer dichter werdende Atmosphäre zum Lot gebrochen, sodaß man die Sonne (immer röter werdend, weil rot am stärksten gebrochen wird) noch am Horizont sehen kann, obwohl sie theoretisch schon untergegangen sein müßte. Aus Abb. 3 sieht man übrigens unmittelbar: Die Sonne erscheint zu Mittag unter dem maximalen Höhenwinkel $180^\circ - \varphi - \sigma$.

5. Der Lichteinfall zu einem vorgegebenen Zeitpunkt

Mit dem bisherigen Wissen ist es nun nur noch ein kleiner Schritt, die Lichteinfallrichtung zu *jeder beliebigen Zeit eines vorgegebenen Datums* zu bestimmen. Diesmal zeichnen wir den Kegel $\Sigma(a; \sigma)$ nicht in spezieller Aufstellung ($a \perp \pi_1$), sondern der Polarsternrichtung angepaßt (die Nordrichtung sei die y -Richtung unseres Koordinatensystems). Abb. 4 zeigt, wie mittels eines Seitenrisses die Situation von Abb. 3 wiederhergestellt werden kann. In diesem Riss kann auf dem Zifferblatt die vorgegebene Zeit (Hilfspunkt H''' auf dem Lichtstrahl s''') eingetragen und nach den Regeln der Darstellenden Geometrie in den Aufriß bzw. Grundriß übertragen werden ($\rightarrow H'' \in s''$ bzw. $H' \in s'$).

Auf Grund der Konstruktion erkennt man nebenbei: Die Sonne steht genau im Westen (bzw. Osten), wenn der y -Wert des Hilfspunkts H verschwindet (in der Zeichnung mit W beschriftet).

Denken wir uns nun den Kegel Σ um -90° um die x -Achse gedreht, sodaß er zur geographischen Breite $\varphi - 90^\circ$ „gehört“, so übernimmt der mitgedrehte Punkt W für den neuen Kegel die Rolle jenes Punktes S_2 , der den Zeitpunkt des Sonnenuntergangs markiert. Es gilt also:

Die Sonne steht am Breitenkreis mit der geographischen Breite φ genau dann im Osten bzw. Westen, wenn sie am „komplementären Breitenkreis“ der anderen Erdhälfte auf- bzw. untergeht.

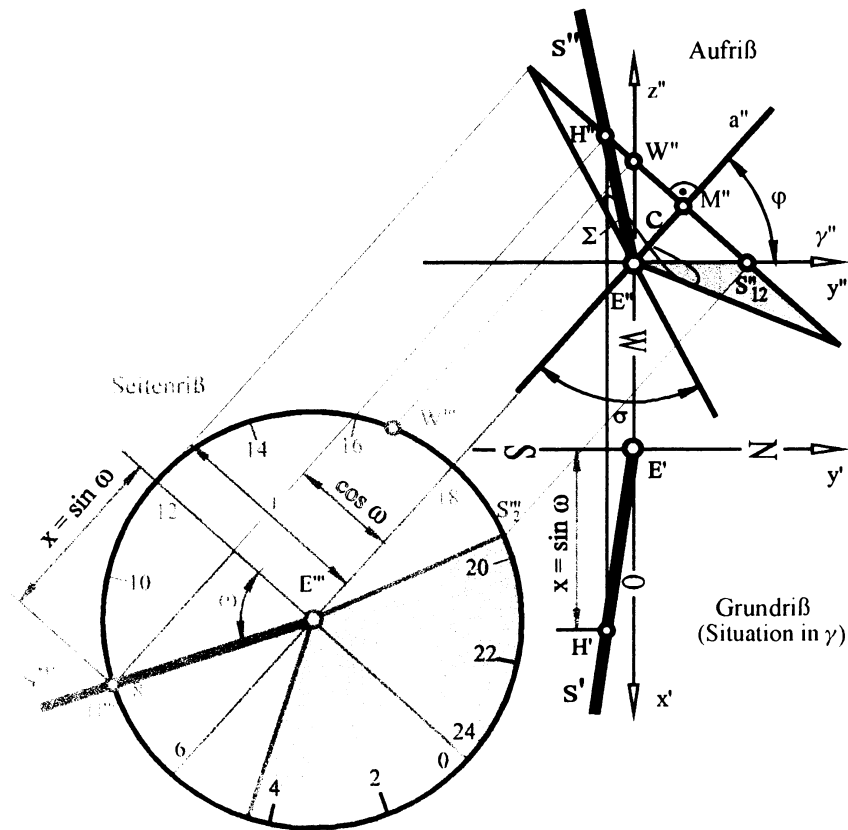


Abb. 4: Konstruktion des Lichtstrahls zu geg. Datum und geg. Uhrzeit

6. Wo ist Süden?

Abb. 4 läßt sich auf eine interessante Art deuten. Interpretieren wir das 24-stündige Zifferblatt als Uhr, so erkennt man: Der Stundenzeiger dieser Uhr (zugehörig zum Zentriwinkel ω) ist die Normalprojektion der Lichtstrahlrichtung auf das Zifferblatt, während die 12^h-Markierung (Zentriwinkel 0) zur Normalprojektion der Südrichtung zeigt.

Denkt man sich nun das übliche 12-stündige Zifferblatt, dann ist auf diesem der Zentriwinkel $\bar{\omega}$ von der aktuellen Uhrzeit zur 12^h-Markierung doppelt so groß wie auf dem 24-stündigen Zifferblatt in Abb. 4 ($\bar{\omega} = 2\omega$). Die Südrichtung wird somit durch jenen Zeitpunkt markiert, welcher genau zwischen der aktuellen Zeit und 12^h liegt.

Damit läßt sich bei Sonnenschein mittels jeder analogen Armbanduhr die Südrichtung wie folgt bestimmen: Vorerst geht man nach folgender weithin bekannten „Pfadfinderregel“ vor: Man denkt sich jenen Zeitpunkt \mathbb{S} markiert, der zwischen dem momentanen Zeitpunkt und dem Kulminationspunkt der Sonne (also 12^h bzw. 13^h bei Sommerzeit¹⁰) liegt.

Nun dreht man die abgenommene Armbanduhr so lange, bis der Stundenzeiger in Sonnenrichtung zeigt. Der Zeiger zum markierten Zeitpunkt \mathbb{S} weist dann relativ genau nach Süden.

Zur exakteren Bestimmung der Südrichtung muß jetzt noch die Uhr verkantet werden: Man stellt sich so auf, daß man zum provisorisch ermittelten Süden blickt und der Stundenzeiger zur Zeit \mathbb{S} ebenfalls dorthin gerichtet ist. Nun verkantet man das Zifferblatt zum Körper hin um $90^\circ - \varphi^\circ$ (in unseren Breiten etwa 42°) und wiederholt den Vorgang. Durch das Aufkanten ergibt sich natürlich eine leicht modifizierte Südrichtung. Der Fehler ohne Nachkorrektur durch Aufkanten ist umso größer, je früher am Morgen bzw.

¹⁰ Es muß zudem auch die geographische Länge berücksichtigt werden: Pro Längengrad verschiebt sich der Kulminationspunkt um 4 Minuten, sodaß etwa in Bregenz (10° ö.L.) 20 Minuten zu addieren sind (vgl. [5])! Nicht zu vergessen ist weiters die durch die Flächenregel bedingte Abweichung des Kulminationspunkts von 12^h („Zeitgleichung“), die mit bis zu ± 15 Minuten zu Buche schlägt.

später am Abend wir die Pfadfinderregel anwenden bzw. je weiter südlich wir uns befinden. So müßte etwa nach dieser Regel die Sonne *immer* um 18^h im Westen stehen!

7. Die zugehörigen Formeln

Wir wollen nun die geometrische Lösung mathematisch nachvollziehen. Mit den Bezeichnungen von Abb. 2 erhalten wir zunächst

$$r_1 = r \sin \alpha, \quad r_2 = r_1 \sin \delta = r \sin \delta \sin \alpha \quad (1)$$

und damit

$$\cos \sigma = \frac{r_2}{r} = \sin \delta \sin \alpha, \quad (2)$$

woraus sich der halbe Öffnungswinkel des Drehkegels Σ – in Abhängigkeit vom Datum, nämlich α Tage nach Frühlingsbeginn – ergibt:

$$\sigma = \sigma(\alpha) = \arccos(\sin \delta \sin \alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin \delta \sin \alpha). \quad (3)$$

Nun gelten „für hinreichend kleine Winkel“ x folgende Beziehungen:

$$x \approx \sin x \approx \arcsin x. \quad (4)$$

In unserem Fall ist $|x| < \delta = 0,409$ (der Neigungswinkel δ der Erdachse wird ab jetzt im Bogenmaß gerechnet!). Weil der Wert von σ wegen der getroffenen Vereinfachungen ohnehin nur ein Näherungswert ist, wollen wir den Ausdruck (3) durch

$$\sigma(\alpha) \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin(\underbrace{\sin \delta \sin \alpha}_{\approx \delta}) \approx \frac{\pi}{2} - \delta \sin \alpha \quad (\text{im Gradmaß: } \sigma = 90^\circ - 23,45^\circ \sin \alpha) \quad (5)$$

ersetzen. Diese Näherung ist tatsächlich so gut, daß die Funktionsgraphen von $\sigma(\alpha)$ aus Gleichung (3) und Gleichung (5) optisch gar nicht zu unterscheiden sind (maximaler relativer Fehler 1%).

Das einfache Ergebnis aus Gleichung (5) läßt sich dahingehend interpretieren, daß sich unser Drehkegel Σ „harmonisch“ öffnet und schließt.

Wegen $\sigma \in [\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta]$ bleibt die Qualität der Näherung auch für $\cot \sigma$ erhalten und es gilt für den Wert c aus Abb. 3:

$$c = c(\alpha) = \cot \sigma(\alpha) \approx \cot(\frac{\pi}{2} - \delta \sin \alpha) = \tan(\delta \sin \alpha) = \tan(0,409 \sin \alpha). \quad (6)$$

Nun zur Ermittlung von *Sonnenaufgang* und *Sonnenuntergang*. Zunächst geben wir jene linearen Transformation an, welche die Umrechnung des Zenitwinkels ω auf dem 24-stündigen Zifferblatt (gemessen von 12^h) in die zugehörige *Tageszeit* z und umgekehrt ermöglichen:

$$z(\omega) = 12 + \frac{12}{\pi} \omega \quad \text{bzw.} \quad \omega(z) = \frac{\pi}{12}(z - 12) \quad (7)$$

Gemäß Abb. 3 gilt nun für die Zenitwinkel ω_1 und ω_2 der konstruierten Punkte S_1 und S_2 die Beziehung

$$\cos \omega_{1,2} = -c(\alpha) \tan \varphi \quad (8)$$

und daher

$$\omega_{1,2} = -\arccos[c(\alpha) \tan \varphi]. \quad (9)$$

Sonnenaufgang bzw. Sonnenuntergang finden dann zu den Zeiten $z_1 = z(\omega_1)$ und $z_2 = z(\omega_2)$ statt. Die *Tageslänge* $T = z_2 - z_1$ läßt sich zusammen mit Gleichung (6) explizit in Abhängigkeit von Jahreszeit (Abstand α Tage vom Frühlingsbeginn) und geographischer Breite φ berechnen:

$$T = T(\alpha, \varphi) \approx \frac{24}{\pi} \arccos[-\tan(\delta \sin \alpha) \tan \varphi] \quad (10)$$

Die *minimale* bzw. *maximale Tageslänge* stellt sich in Formel (10) für $\alpha = \pm 90^\circ$ (21. Dezember bzw. 21. Juni) ein:

$$T_{max}(\varphi) = \frac{24}{\pi} \arccos(-\tan \delta \tan \varphi) \approx 7,64 \arccos(-0,434 \tan \varphi). \quad (11)$$

Am 48. Breitenkreis ist übrigens der längste Tag etwa 16 Stunden¹¹.

Das Diagramm in Abb. 5 illustriert, wie die Tageslänge von Jahreszeit und geographischer Breite φ abhängt. In den nicht-polaren Zonen fällt eine große Verwandtschaft zur Sinuslinie auf. Tatsächlich kommen größere Abweichungen von der Sinuslinie erst nördlich des 60. Breitenkreises zustande, sodaß es durchaus legitim ist, in tropischen und gemäßigten Zonen die Tageslänge durch

$$T(\alpha) \approx 12 + (T_{max} - 12) \sin \alpha \quad (12)$$

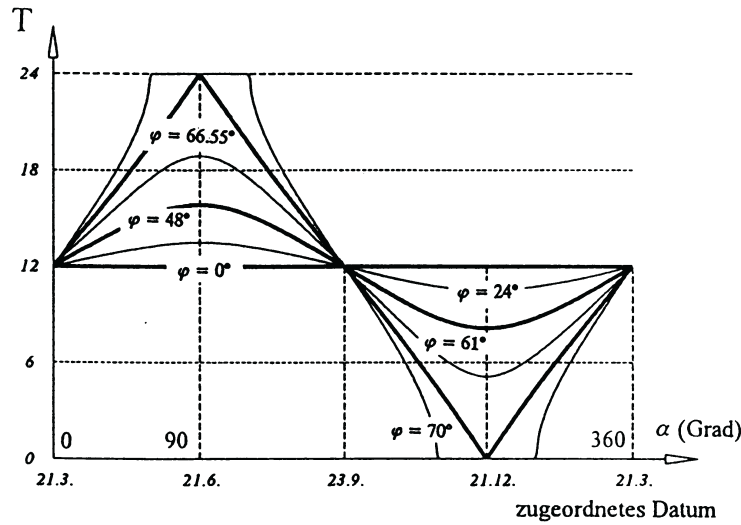


Abb. 5: Tageslängen im Lauf des Kalenderjahres, abhängig von der geographischen Breite φ

abzuschätzen.

Formel (12) zeigt, daß etwa 30 Tage vor bzw. nach den Zeitgleichen (21. März und 23. September) bereits die Hälfte des Zuwachses (der Abnahme) der Tageslänge erreicht ist ($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$). In unseren Breiten ist also am 21. April bzw. 23. August die Tageslänge ca. 14 Stunden und am 21. Februar bzw. 23. Oktober ca. 10 Stunden¹².

Die *vektorielle Darstellung eines allgemeinen Lichtstrahls* ergibt sich schließlich aus Abb. 4:

$$\vec{s} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EM''} + \overrightarrow{M''H''} + \overrightarrow{H''H} = c(\alpha) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}}_{\text{Achsenrichtung}} + \cos \omega \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\text{Achsennormale}} + \begin{pmatrix} \sin \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Damit haben wir zu vorgegebener geographischer Breite φ eine Parameterdarstellung des Lichtstrahlvektors \vec{s} in Abhängigkeit von der Jahreszeit (α Tage nach Frühlingsbeginn) und dem Tageszeitpunkt z gefunden:

$$\vec{s} = \vec{s}(\alpha, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \sin \omega(z) \\ c(\alpha) \cos \varphi - \cos \omega(z) \sin \varphi \\ c(\alpha) \sin \varphi + \cos \omega(z) \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (14)$$

mit $c(\alpha) \approx \tan(0,409 \sin \alpha)$ und $\omega(z) = \frac{\pi}{12}(z - 12)$. Das Verschwinden der z -Komponente dieses Vektors führt ebenfalls auf die „Sonnenuntergangsbedingung“ (9).

Auch die Frage, um wieviel Uhr die Sonne genau im Osten bzw. Westen steht, läßt sich leicht mathematisch beantworten: Für die entsprechenden Zenitwinkel ω_3 und ω_4 muß dann die y -Komponente von \vec{s} verschwinden, also

$$c(\alpha) \cos \varphi - \cos \omega_{3,4} \sin \varphi = 0 \quad (15)$$

gelten. Mit Formel (9) ist

$$\omega_{3,4}(\varphi) = \arccos[c(\alpha) \cot \varphi] = \omega_{1,2}(\varphi - 90^\circ). \quad (16)$$

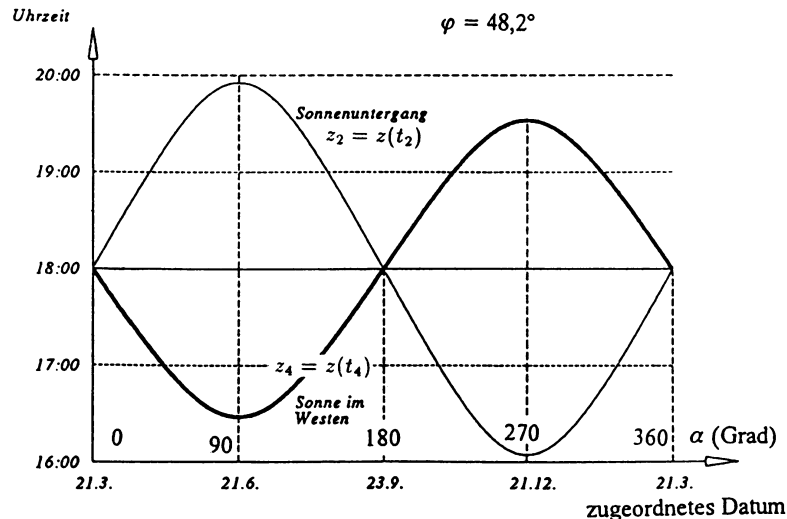
Im Diagramm in Abb. 6 sind die Zeiten $z_4 = z(\omega_4)$ und $z_2 = z(\omega_2)$, zu denen in unseren Breiten ($\varphi = 48,2^\circ$) die Sonne im Westen steht bzw. untergeht, abzulesen.

Im Winterhalbjahr ist die Sonne schon vor Erreichen der Westrichtung untergegangen¹³. Die optische hnlichkeit zur Sinuslinie ist diesmal eher in den nördlicheren Breiten gegeben, während die Kurve in der Nähe des quators ähnliche Gestalt annimmt wie das Tageslängendiagramm nördlich des 60. Breitenkreises.

¹¹ Inklusive der zu addierenden 15 Minuten.

¹² Wie immer zuzüglich 15 Minuten!

¹³ Außerdem sollte natürlich wieder die geographische Länge und die Zeitgleichung berücksichtigt werden. Für Interessierte:

Abb. 6: Sonnenuntergang und exakte „West-Position“ für $\varphi = 48.2^\circ$

8. Ein Programm zum Austesten der Formeln

Die Güte der angegebenen Näherungsformeln testen wir mit einem Pascal-Programm (siehe Listing)¹⁴. Für eine vorgegebene geographische Breite φ soll eine Tabelle mit Sonnenaufgang, Sonnenuntergang, Sonnenhöchststand und Tageslänge während eines Jahres (im 3-Tages-Abstand) angegeben werden, welche dann mit einschlägigen Tabellen verglichen werden kann.

So zeigt sich, daß für unsere Breiten ($\varphi = 48^\circ$) kein Wert mehr als 4 Minuten von der Tabelle abweicht (meist aber nicht mehr als 2 Minuten). Bei einer durchschnittlichen Tageslänge von $12^h = 720^m$ ist dies ein vernachlässigbarer maximaler Fehler von etwa 0,5%, und das, obwohl wir zahlreiche Vereinfachungen getroffen haben!

```

1: program Tageslaenge; { Berechnet Sonnenaufgang und Sonnenuntergang sowie Tageslänge
2:   für jeden dritten Kalendertag. Wichtig: 1 Jahr = 12 Monate zu je 30 Tagen. Dies
3:   gibt den Monaten eine gute „Gewichtung“ }
4: function arc(x: real): real; begin arc := x * pi / 180; end;
5: function tan(x: real): real; begin tan := sin(x) / cos(x); end;
6:   { Die Funktion tan x ist nicht vordefiniert }
7: function arccos(x: real): real; { detto die Funktion arccos x ... }
8:   begin { Es gilt arccos x = pi/2 - arctan(x/sqrt(1-x^2)) }
9:     if x >= 1 then arccos := 0 else if x <= -1 then arccos := pi
10:    else arccos := pi / 2 - arctan(x / sqrt(1 - x * x));
11:   end;
12: var datei: text; { In diese Datei schreiben wir }
13: procedure SchreibeDatum(alpha: integer); { Winkel → Datum. z.B. alpha = 60° → 21. 5. }
14:   begin
15:     inc(alpha, 60 + 21); { Wir zählen ja vom 21. März }
16:     if alpha < 0 then inc(alpha, 360) else if alpha > 360 then dec(alpha, 360);

```

Der Graph der Zeitgleichung hat die Form einer überlagerten Sinusschwingung. Mitte Februar liegt ein absolutes Minimum vor ($\Delta z = -14$ Minuten, d. h., die Sonne kulminiert um 12^{14}), Anfang November ein absolutes Maximum ($\Delta z = +16$ Minuten). Nullstellen sind Mitte April, Mitte Juni und Ende Dezember zu finden.

Der Funktionsgraph wird durch die vom Verfasser empirisch ermittelte Gleichung

$$\Delta z \approx 0.143 [\sin(2\alpha) - \sin(\alpha + 1,36)] \quad (\text{Stunden}) \quad (17)$$

nahezu auf die Minute genau (verglichen mit den Daten von [3]) angenähert (α bezeichnet wieder den Datumsabstand vom Frühlingsbeginn und wird in Grad angegeben).

Durch das Zusammenwirken von Zeitgleichung und variabler Tageslänge wird es nicht – wie man spontan meinen möchte – am 21. Dezember am frühesten dunkel, sondern bereits am 13. Dezember! Deswegen heißt die Namensheilige am 13. Dezember auch *Lucia* („Lichtbringerin“).

¹⁴ Ein entsprechendes C++-Programm ist in [2] zu finden.


```

17:   write(datei, alpha mod 30 + 1:2, ', ', alpha div 30 + 1:2, ', .\_\_\');
18: end;
19: function SchreibeUhrzeit(z: real): string; { Übliche Schreibweise (z.B. 7,1 → 7:06) }
20:   var h, m: integer;
21:   begin
22:     h := trunc(z+0.001); m := trunc((60.0 * (z - h))); write(datei, h:2, ':');
23:     if m < 10 then write(datei, '0', m:1, '\_\_\_\_\') else write(datei, m:2, '\_\_\_\_\');
24:   end;
25: { ----- Hauptprogramm ----- }
26: var
27:   alpha: real; { Drehwinkel  $\alpha^\circ$  um die Sonne bzw. Anzahl  $\alpha$  der Tage nach Frühlingsbeginn }
28:   delta: real; { Neigung  $\delta$  der Erdachse }
29:   z1, z2, z0: real; { Sonnenaufgang, Sonnenuntergang, Sonnenkulmination }
30:   T, Delta_z, phi: real; { Tageslänge, Zeitgleichung  $\Delta z$ , Geograph. Breite  $\varphi$  }
31:   lambda, korrektur: real; { Geograph. Länge  $\lambda$ , Zeitkorrektur bzgl.  $\lambda=15^\circ$  }
32:   kalendertag: integer;
33: begin
34:   delta := arc(23.45);
35:   write('Geogr.\_Länge\_in\_Grad\_ (z.B.\_16\_für\_Wien:)\_'); readln(lambda);
36:   korrektur := 4 * (lambda - 15) / 60; { pro Längengrad 4 Minuten }
37:   write('Geogr.\_Breite\_in\_Grad\_ (-90\_bis\_+90,\_z.B.\_48\_für\_Wien:)\_'); readln(phi);
38:   assign(datei, 'sonne.dat'); rewrite(datei);
39:   writeln(datei, 'Sonnendaten\_für\_den_', phi:3:1, '-ten\_Breitenkreis\_und\_den_',
40:     lambda:3:1, '-ten\_Längengrad');
41:   writeln(datei, 'Mittleuropäische\_Zeit,\_Sommerzeit\_nicht\_berücksichtigt!');
42:   writeln(datei);
43:   writeln(datei, 'Datum\_Aufgang\_Untergang\_Tageslänge\_Kulmination');
44:   phi := arc(phi); kalendertag := - 60 - 21; { 1. Jänner }
45:   while kalendertag < 360 - 60 - 21 do begin { nächster 1. Jänner }
46:     alpha := arc(kalendertag); { Computer rechnet im Bogenmaß }
47:     Delta_z := 0.143 * (sin(2 * alpha) - sin(alpha + 1.36)); { Zeitgleichung Formel (17) }
48:     z0 := 12 - Delta_z - korrektur; { Kulminationszeit }
49:     T := 24 / pi * arccos(-tan(0.409 * sin(alpha)) * tan(phi)); { Tageslnge Formel (10) }
50:     T := T + 0.25; { Tag subjektiv um 15 Minuten länger! }
51:     SchreibeDatum(kalendertag); SchreibeUhrzeit(z0 - T/2); SchreibeUhrzeit(z0 + T/2);
52:     SchreibeUhrzeit(T); SchreibeUhrzeit(z0); writeln(datei);
53:     inc(kalendertag, 3); { Wir betrachten nur jeden dritten Tag }
54:   end; { while kalendertag }
55:   close(datei);
56:   write('Bitte\_Datei\_<sonne.dat>\_ansetzen\_bzw.\_ausdrucken!\_\_\_<return>'); readln;
57: end.

```

9. Rekonstruktion des Datums und der Uhrzeit bei gegebener Lichtrichtung

Sei im folgenden die Lichtstrahlrichtung s – etwa in Grund- und Aufriß – gegeben. Weiters seien die geographische Breite φ und die Nordrichtung bekannt. Dann lassen sich das zugehörige Datum (zweideutig) und Uhrzeit (eindeutig) wie folgt näherungsweise rekonstruieren:

1. Anlegen eines Seitenrisses, in dem die Rotationsachse a der Erde in der Bildebene liegt (vgl. Abb. 7). Lichtstrahl s in diesem Riß eintragen (Hilfspunkt $H \in s$) (a hat die Neigung φ zur Grundebene π_1).
2. Paralleldrehen von s um a in die Bildebene: $s \rightarrow s_0$, $H \rightarrow H_0$ liefert den datums-charakteristischen Winkel σ . Aus der in nicht-polaren Zonen gültigen Näherungs-Formel (5) ergibt sich

$$\sin(\alpha) \approx \frac{90^\circ - \sigma^\circ}{\delta^\circ} \quad (18)$$

Die beiden Lösungen $\alpha_1 = \alpha$ und $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha$ geben (vorzeichenbehaftet!) den zeitlichen Abstand vom Frühlingsbeginn (21. März) an. Die Ermittlung des Datums ist also zweideutig.

3. Beim Paralleldrehen fällt automatisch der Winkel ω an, der über die Tageszeit Aufschluß gibt: je 15° entsprechen einer Stunde. Aus der Grundrißrichtung des Lichtstrahls läßt sich schließen, ob die Zeitdifferenz von 12^h abzuzählen oder dazuzuzählen ist.

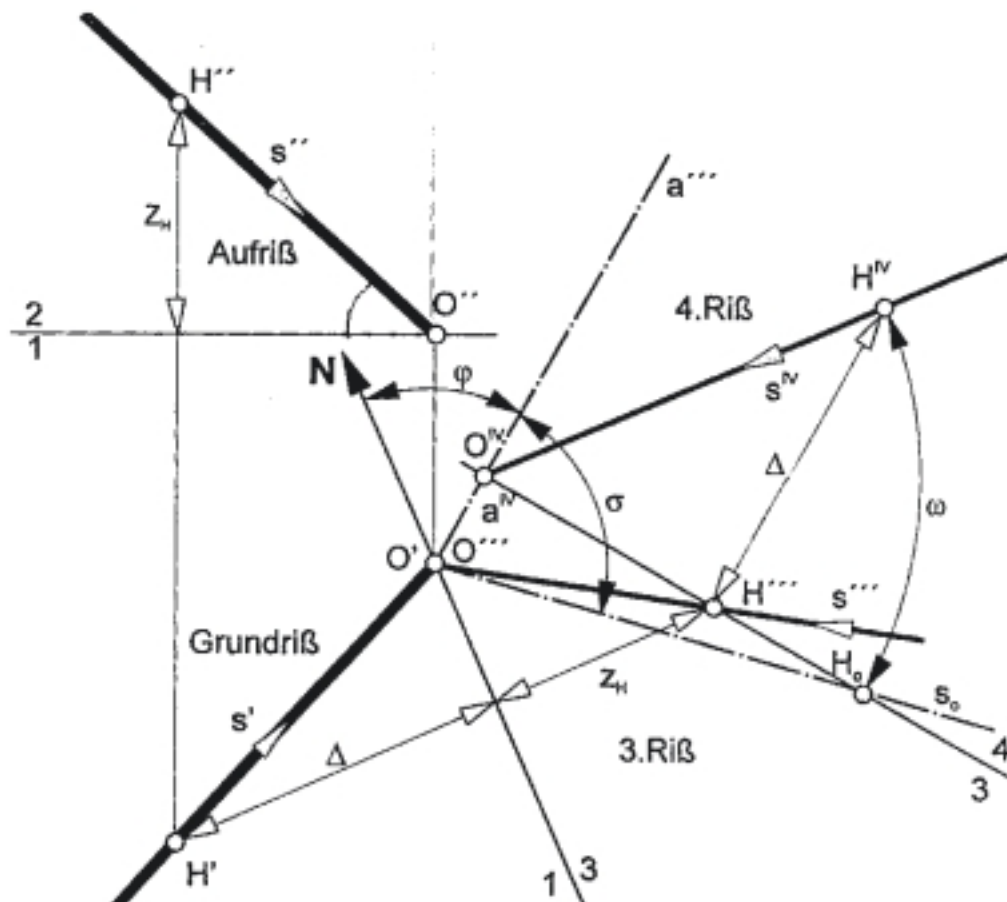


Abb. 7: Rekonstruktion von Uhrzeit und Datum bei geg. Lichtstrahl

Im konkreten Beispiel (Abb. 7) wurde der 53. Breitenkreis gewählt (z.B. Berlin). Zur eingezeichneten Lichtrichtung s' , s'' ergeben sich graphisch die Werte $\sigma \approx 77^\circ$, $\omega \approx 53^\circ$. Demtsprechend ist nach Formel (18)

$$\sin \alpha = \frac{90^\circ - 77^\circ}{23.45^\circ} = 0.554 \Rightarrow \alpha_1 \approx 34^\circ,$$

womit als Datum der 25. April (≈ 34 Tage nach Frühlingsbeginn) bzw. der 19. August (≈ 34 Tage vor Herbstbeginn) in Frage kommen. Wegen $\omega^\circ/15^\circ \approx 3.5$ und der Tatsache, daß die Sonne etwa im Südwesten steht (Nachmittag!), ergibt sich die wahre Sonnenzeit $\approx 15h30$ ¹⁵.

Literatur

- [1] Blatter, Ch.: *Von den Keplerschen Gesetzen zu einer minutengenauen Sonnenuhr*. El.Math. 49 (1994), pp.155-165.
- [2] Glaeser, G.: *Von Pascal zu C/C++*. Markt&Technik, München, 1993.
- [3] Keller, H.U.: *Das KOSMOS Himmelsjahr 1995*. Franckh-Kosmos, Stuttgart, 1994.
- [4] Mayerhofer, P. und Tschupik, J.P.: *Geometrische Ermittlung der Sonnendeklination*. IBDG 2/1982, pp.31-36.
- [5] Tschupik, J.P.: *Darstellende geometrische Sonnenstandsbestimmung*. IBDG 1/1994, pp.21-27.

¹⁵ In Mitteleuropa ist zu beiden Daten Sommerzeit, sodaß zur Ermittlung der Lokalzeit eine Stunde addiert werden muß. Weiters fällt natürlich die geographische Länge mit einigen Minuten ins Gewicht: die mitteleuropäische Zeit orientiert sich am 15. östl. Längengrad.