8.Kreisdarstellung in Perspektive

Kegelschnitte durch fünf Punkte

Wie wir bereits wissen, läßt sich ein Kegel grundsätzlich nach 4 verschiedenen Kurven schneiden: Kreis, Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Kreis und Ellipse sind geschlossene Kurven. Die Parabel (ein bekanntes Beispiel: Abb.1 drittes Bild von links) ist ihrer Form nach 'fast noch eine Ellipse', die sich erst im Unendlichen schließt. Sie stellt die Grenze zwischen den geschlossenen Kurven und den Hyperbeln (Beispiel: Bild rechts) dar. Hyperbeln besitzen stets zwei Äste und schmiegen sich im Unendlichen an zwei Geraden an (Asymptoten) - in Abb.1 sind die Asymptoten die x und die y-Achse. *Eine Hyperbel ist eine Kurve, die 99% ihres Lebens an den Asymptoten verbringt.* Man kann mathematisch zeigen, dass durch fünf

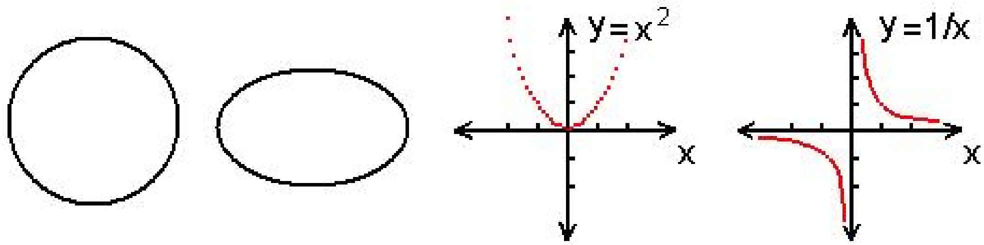

Abbildung 1: Beispiele für die vier Kegelschnittlinien

beliebige Punkte der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, genau ein Kegelschnitt festgelegt wird, der diese Punkte enthält (Abb.2). Mathematisch gesehen

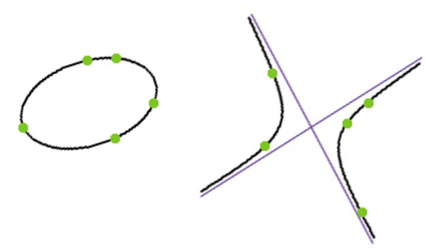

Abbildung 2: Ellipse und Hyperbel festgelegt durch 5 Punkte

enthält die Angabe eines Punktes die gleiche Information wie die Angabe einer

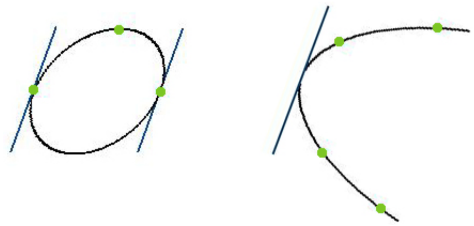

Abbildung 3: Ellipse und Parabel festgelegt durch 5 Angabestücke

Tangente (ihrer Lage), sodass man präziser sagen kann: durch insgesamt fünf Informationen (Punkte oder Tangenten) ist ein Kegelschnitt definiert. Abb.3 zeigt dazu zwei Beispiele mit verschiedenen Angabestücken: 3 Punkte und 2 Tangenten bzw. 4 Punkte und 1 Tangente. Obwohl es einer gewissen Übung bedarf, mit freier Hand die gewünschte Kurve durch die gegebenen Punkte und Tangenten einzupassen, sieht man intuitiv sofort ein, ob das gezeichnete Resultat passt oder nicht passt. Wir Menschen haben eine gewisse 'Ahnung' von diesen speziellen Kurven, weil uns die Bilder von Kreisen als Kegelschnitte erscheinen (übrigens bewegen sich auch die Planeten auch auf solchen Kurven). Es ist erstaunlich, dass tatsächlich alle vier Arten von Kegelschnitten, also Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel durch das Fotografieren eines Kreises am Foto entstehen können. Steht man etwa **vor** einem großen kreisförmigen Teich (siehe Abb.4), so wird das Foto eine Ellipse sein. Steht man **genau am Rand** des Teichs, so erscheint am Foto eine Parabel (wieder stellt die Parabel die Grenze zwischen *geschlossen* und *nicht geschlossen* dar). Wird das Foto **im Inneren** des Teichs geschossen, so wird der Kreis auf dem Foto als Hyperbel abgebildet. Ein Kreis ergibt sich übrigens bei einer Luftaufnahme des Teichs, senkrecht auf den Mittelpunkt gerichtet.

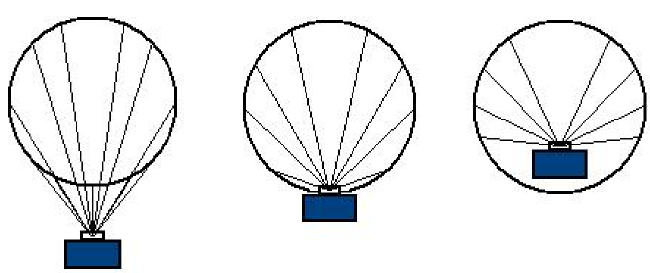

Abbildung 4: Kreis als Ellipse, Parabel und Hyperbel fotografiert (Grundriss)

Stehender Kreiszylinder in Perspektive

Ein Kreis läßt sich von einem Quadrat umschreiben. Also läßt sich jeder Kreiszylinder von einem quadratischen Prisma (umschriebene Box) umschreiben (Abb.5). Die Seitenverhältnisse des Bodenquadrates und die Höhe des Zylinders können geschätzt werden, der Rest der Box ergibt sich über die Fluchtpunkte F_1 und F_2. Durch die Idee der umschriebenen Box erhält man nicht nur die Mittelpunkte vom Grund. und Deckkreis (Diagonalenschnittpunkt der jeweiligen Quadrate), sondern zusätzliche die Berührpunkte mit den umschriebenen Quadraten, samt deren Tangenten (verbinde einfach die Mittelpunkte mit den Fluchtpunkten).
Beachte: zugeordnete Berührpunkte von Grund. und Deckkreis liegen auf gleichen Erzeugenden (z-parallel). Zeichne zuerst die untere Ellipse, dann die z-parallelen Ordner durch die Berührpunkte und die Umrisserzeugenden des Zylinders (das sind zusätzlich die vertikalen Tangenten), erst dann die obere Ellipse.

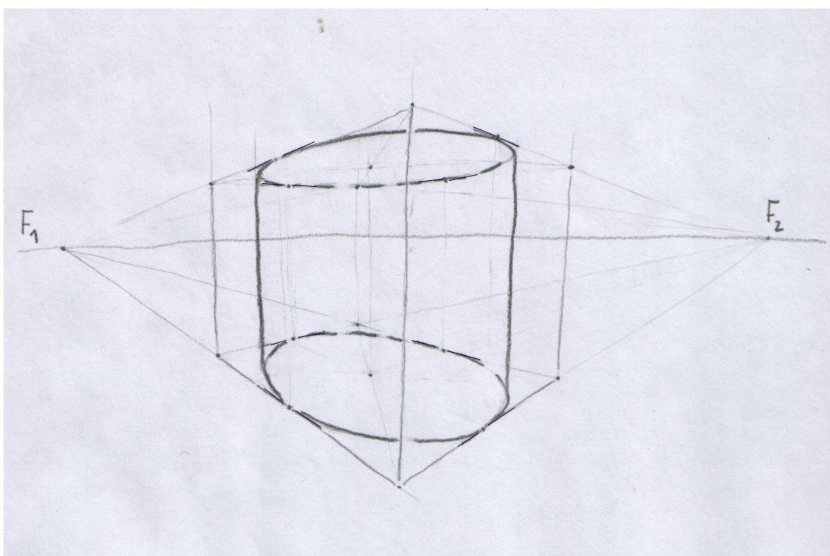

Abbildung 5: Stehender Kreiszylinder in Perspektive

Liegender Kreiszylinder in Perspektive

Der einzige Unterschied zum stehenden Zylinder besteht darin, dass die umschriebene quadratische Box nun liegt. Man zeichnet (schätzt) also zuerst das stehende Seitenquadrat, und geht analog zu vor wie oben beschrieben, siehe auch Abb.6.

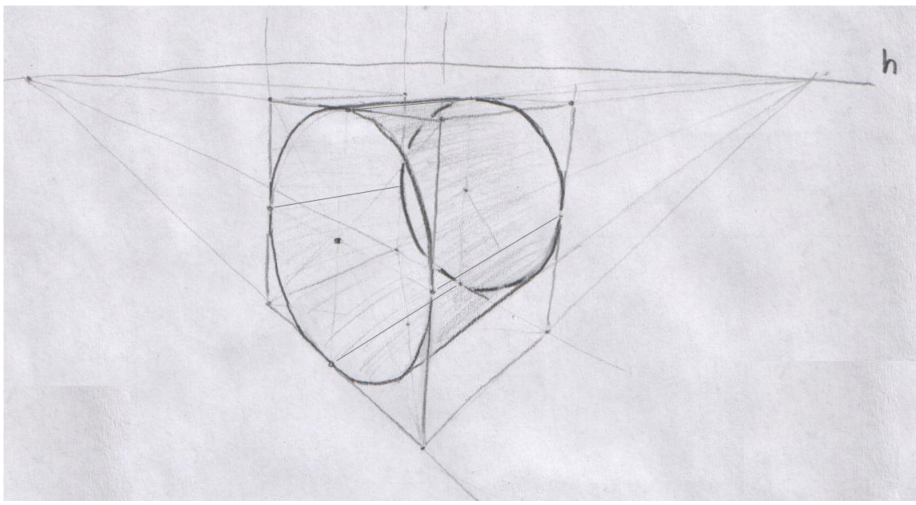

Abbildung 6: Liegender Kreiszylinder (Rohr) in Perspektive

Teilung einer Strecke in Perspektive

In Perspektive können Strecken nicht so einfach geteilt werden wie in Parallelprojektion. Man denke an eine fotografierte Hauswand mit vielen hintereinanderliegenden Fenstern. Die Fenster scheinen nach hinten hin immer kleiner zu werden, der Maßstab 'gestaucht'. Für Strecken, die parallel zur Grundebene liegen, gibt es eine sehr praktische Teilungsmethode, die anhand Abb.7 erklärt wird: um z.B. auf der perspektivisch verzerrten Gerade g eine Teilung im Verhältnis $3 : 1 : 5$ zu erhalten, wählt man einen beliebigen Punkt E auf dem Horizont h und eine beliebige, zum Horizont parallele Gerade e. Ein Punkt muss auf jeden Fall bekannt sein (hier wurde A frei gewählt), um einen Bezugspunkt zu haben. Verbindet man A mit E so ergibt sich A_1, von dem aus nun die Punkte B_1, C_1 und D_1 auf e im wahren Teilungsverhältnis $3 : 1 : 5$ aufgetragen werden dürfen. Verbindet man diese Punkte wieder mit E, so ergeben sich auf g die gesuchten, perspektivisch verkürzten Strecken (man sagt, man projiziert die Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 auf die Gerade g).

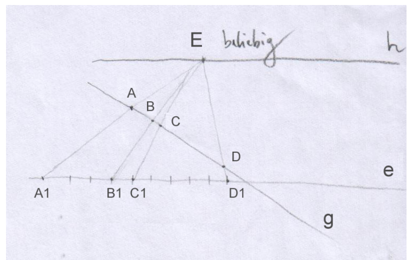

Abbildung 7: Streckenteilung in Perspektive

Hausübung

Zeichne eine Brücke mit mehreren Bögen (Abb.8) in perspektivischer Darstellung (Querformat).

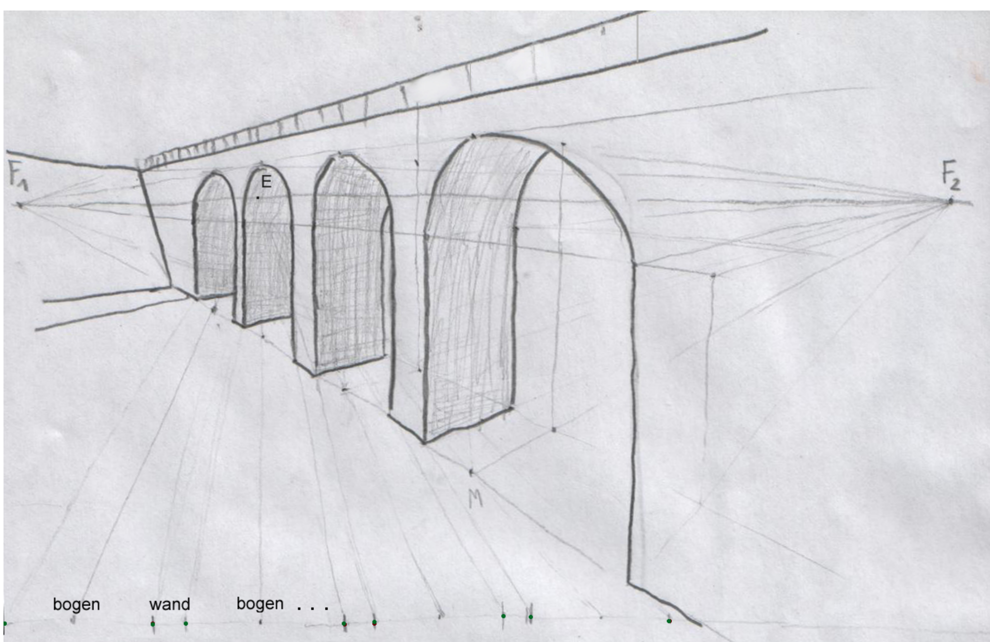

Abbildung 8: Brücke in Perspektive