Götter in Heißluftballonen
Foto und Kameraposition

Franz Gruber, Wien

Kurzfassung: Bildausschnitte ebenflächiger, maßbekannter Objekte lassen im Gegensatz zu ihren Originalfotos keinen eindeutigen Rückschluss auf die tatsächliche Kameraposition zu. Die möglichen Positionen lassen sich dennoch klar konkretisieren, was anhand der mystischen Wüstenlinienfotos von Nazca demonstriert wird.

Götter in Heißluftballonen?

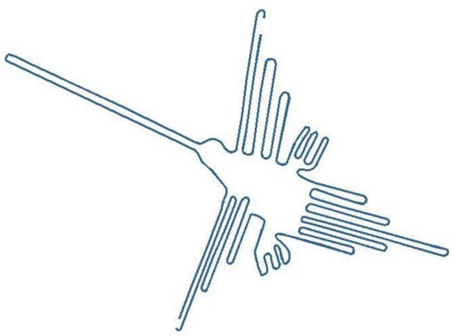

Abbildung 1: Grundriss und ...

Was haben die rätselhaften Wüstenlinien im peruanischen Hochland mit der Fragestellung nach der Kameraposition von Bildauschnitten zu tun?
Diese Linienbilder sind auf Grund ihrer Größe oft nur vom Flugzeug aus zu sehen. Die Grundrisse (z.B. Abb.1) der Tiermotive sind meist auffällig unsymmetrisch, während sie interssanterweise auf manchen Flugzeugaufnahmen annähernd symmetrisch wirken (Abb.2).

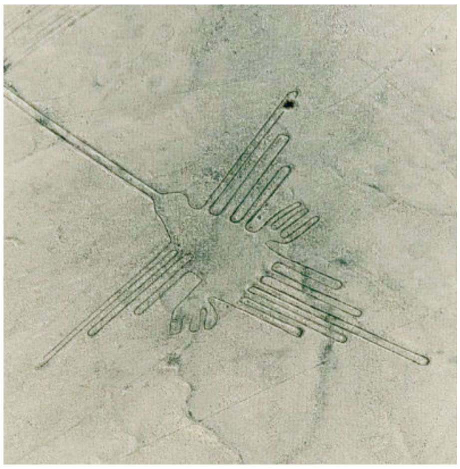

Abbildung 2: ... Foto des Kolibris

Dies legt die Spekulation nahe, dass die Figuren Zentralprojektionen von symmetrischen Zeichnungen sind. Aber wie haben die Nazcas vor etwa 2000 Jahren bis zu 300 m große Figuren auf den Boden projiziert? Und wozu, wenn man sie dann sowieso nicht sehen konnte? Es gibt Behauptungen ([6]), die Nazcas hätten bereits Heißluftballone gekannt, und die Figuren seien von großer Höhe aus angeleitet in den Wüstenboden gescharrt worden.
Etwas realistischer erscheint mir die Theorie ([1]), dass die Linien aus einer Kombination von Projektion und Skalierung entstanden sind. Wie auf der Illustration (Abb.3) von *Stefan Wirnsberger* könnte

ein Instruktor auf einem relativ kleinen Turm (z.B. 10 m hoch) mit der Zeichnung eines symmetrischen Tiermotivs Anweisungen gegeben haben, wie die Linien zu ziehen sind.

Abbildung 3: Projektion des Motivs

Aus seiner Sicht erscheint die Figur symmetrisch, am Boden jedoch ist sie, wie das Bild eines Diaprojektors, perspektivisch verzerrt. Die immense Größe der Figur wird erst im Anschluß durch eine zentrale Streckung, z.B. mit Seilen erreicht. Dadurch ändert sich nur mehr der Maßstab, nicht aber die Proportionen (Abb.4).

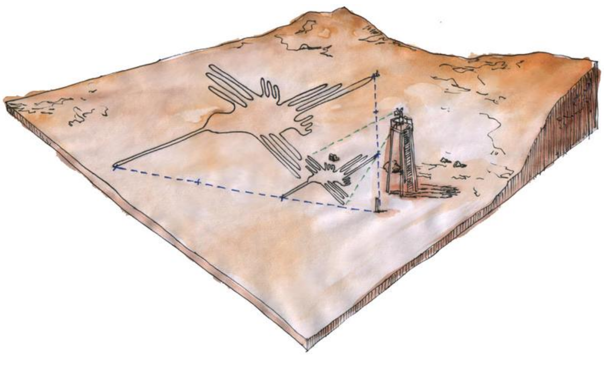

Abbildung 4: Streckung der Projektion

Auf die zweite Frage, wozu diese Linien dienten, werden religiöse Antworten vermutet ([7],[8]). Vielleicht sollten nur die Götter in der Lage sein, die Figuren zu sehen. Da der Sternenhimmel für die Nazca-Kultur bekanntlich große Bedeutung hatte, wäre es naheliegend, dass auch die jeweilige Blickrichtung auf das Motiv, also die relative Position des Turms zur projizierten Figur, eine wichtige Rolle spielt. Sie könnte die Blickrichtung, quasi den Wohnort einer Gottheit am Sternenhimmel, widerspiegeln.
Motiviert von dieser netten Spekulation entstand sowohl der Titel als auch die eigentliche Fragestellung: Wo war das Projektionszentrum (das Auge des Instruktors am Turm, oder der Heißluftballon bzw. das Flugzeug), das symmetrische Aufnahmen lieferte? Und: Ist das Zentrum eindeutig rekonstruierbar?

Fotoausschnitt und Kameraposition

Ausgehend von bekannten Grundrissplänen (zur Verfügung gestellt von der *Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden - Fachbereich Vermessungswesen/Kartographie [5]*) und Flugzeugaufnahmen, deren Hauptpunkte als nicht bekannt vorausgesetzt werden (also Fotoauschnitte sind), sollten die möglichen Kamerapositionen konstruiert werden. Wie aus der projektiven Geometrie bekannt ist, definieren vier beliebige Punkte A, B, C, D des Grundrisses und ihre korrespondierenden Fotopunkte A_1, B_1, C_1, D_1 eine eindeutige geradentreue Zuordnung (Kollineation) α zwischen Grundriss und Foto.
Die Bilder bzw. Urbilder der jeweiligen Ferngeraden sind i.Allg. endliche Geraden, hier mit g bzw. g_1 bezeichnet. Die Fernpunkte G u. G_1 dieser Geraden sind einander zugeordnet, da sie beide im Unendlichen liegen, aber auch unendlichen Punkten zugeordnet sind. Also gilt:

$$\alpha(G) = G1$$

Jede zu g parallele Gerade h ist einer zu g_1 parallelen Gerade h_1 zugeordnet, weil die Fernpunkte von g und g_1 zugeordnet sind. Aus dem selben Grund

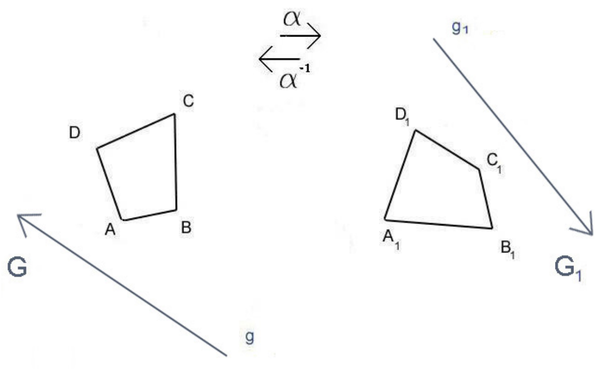

Abbildung 5: Grundriss und Foto

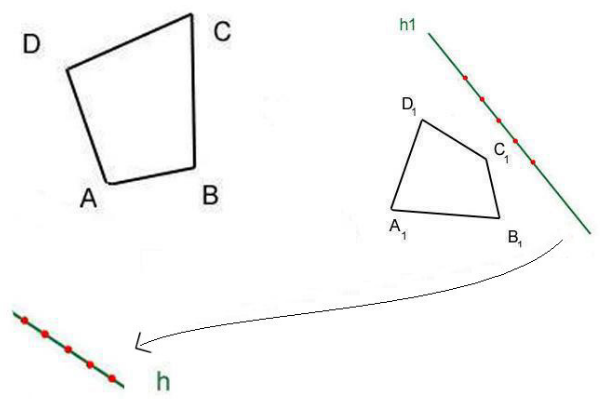

Abbildung 7: Kongruente Punktreihen → Fixpunktachse

geht die Doppelverhältnistreue auf h und h_1 in eine Teilverhältnistreue über.

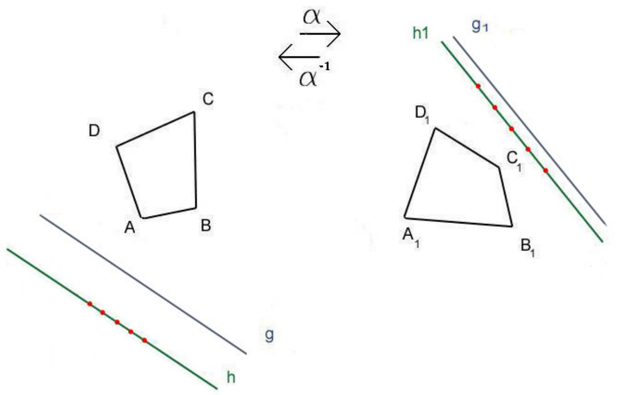

Abbildung 6: Teilverhältnistreue Punktreihen

Durch Skalierung einer der beiden Szenen kann man erreichen, das zugeordnete Punktreihen auf h bzw. h_1 kongruent werden (Abb.7).
h und h_1 werden nun zu einer Fixpunktgeraden, indem man das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ samt h_1 derart verschiebt, dass h und h_1 zur Deckung kommen.
Auf Grund des Satzes von Desargues ergibt sich wegen der vorliegenden Fixpunktachse zwangsläufig ein Zentrum.

Von der Ebene in den Raum

Was bis jetzt in 2 Dimensionen stattgefunden hat, geht nun in die dritte Dimension, indem man eines der beiden Vierecke um die Fixpunktgerade (=Kollineationsachse) rotieren läßt. Das Zentrum existiert nach wie vor (Satz von Desargues) und bewegt sich aus Symmetriegründen in einer Ebene ε. Dort beschreibt es, wie wir gleich sehen werden, eine Kreisbahn (Abb.8). Es gilt nämlich:

Rotiert man einen ebenen Schnitt einer perspektiven Kollineation um die Kollineationsachse, so wandert das resultierende Zentrum auf einer Kreisbahn. Die Kreisbahn steht im rechten Winkel zur Kollineationsachse und liegt symmetrisch zur Grundebene.

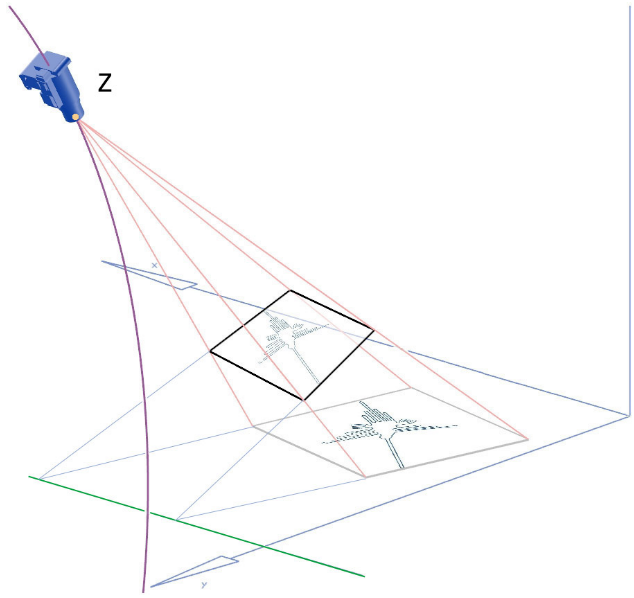

Abbildung 8: Zentrum wandert auf Kreisbahn

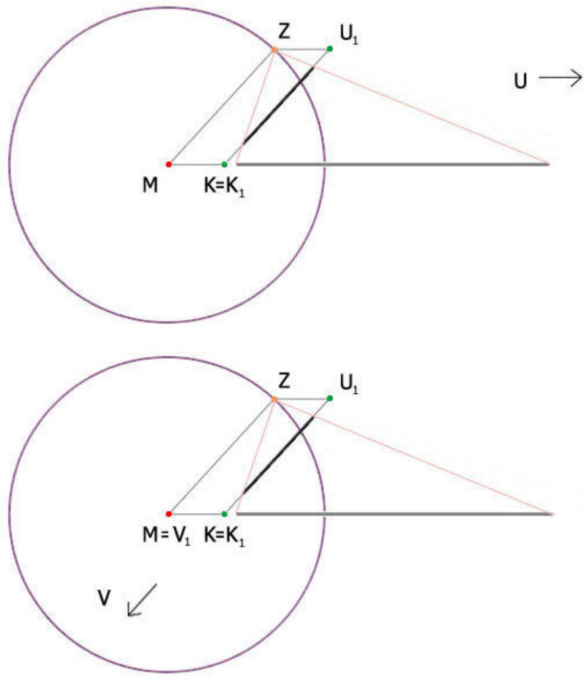

Abbildung 9: Projizierende Ansicht

Warum ist die Bahn eine Kreisbahn?

Betrachten wir die beiden Punkte K und U der Schnittgeraden von Basisebene und ε, wobei K auf der Kollineationsachse und U der Fernpunkt sei (Abb.9, oben). Ihre Zuordnungen auf der rotierenden Bildebene seien $K1$ ($= K$) und U_1. Sei M so definiert, dass MK_1U_1Z ein Parallogramm bilden.
Es gilt einerseits $\overline{MZ} = \overline{K_1U_1} = const.$, da K_1 und U_1 feste Punkte auf der rotierenden Ebene sind (Bijektion zu K und U). Analog dazu gilt $\overline{MK_1} = \overline{ZU1} = const.$, wenn man Bild.- und Basisebene vertauscht (Abb.9, unten).
Das Parallelogramm MK_1U_1Z ist somit ein Gelenkparalleogramm, und Z wandert bei seiner Bewegung auf einem Kreis um den Mittelpunkt M.

Was hat der Messpunkt damit zu tun?

Ein ganz anderer Zugang zu diesem Thema hat sich durch die Diskussion mit Prof. Gunter Weiß (Technische Universität Dresden, Institut für Geometrie) bei der Fortbildungstagung für Geometrie in Strobl 2005 ergeben:
Um die wahre Gestalt einer ebenen Figur Γ der Grundebene φ zu rekonstruieren, dreht man diese in die Bildebene π (Messpunktverfahren [3],[4]).
Geht man zunächst (Abb.10, links) von einem vorgegebenen optischen Zentrum Z und einer vorgegebenen Grundebene φ aus, so ergibt sich der zur Rekonstruktion benötigte Messpunkt (Drehsehnenfluchtpunkt) M als Schnitt des Kreises $k(C; \overline{ZM})$ mit der Bildebene π, wobei C (Falllinienfluchtpunkt) auf einer zu φ parallelen Ebene durch Z liegt. Die wahre Gestalt von Γ kann nun **eindeutig** rekonstruiert werden.

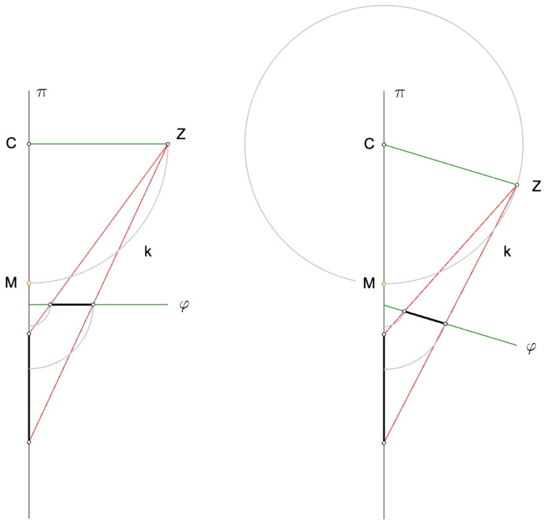

Abbildung 10: Messpunktverfahren

Es stellt sich die Frage, ob unsere anfänglichen Vorgaben Z und φ auch eindeutig aus C und M rekonstruiert werden können (Abb.10, rechts). Der vorliegende Messpunkt M verlangt lediglich, dass sich das Zentrum Z irgendwo auf dem Kreis k befinden muss. Die Grundebene φ beinhaltet die Grundlinie und liegt parallel zu ZC. Ihre Schnittpunkte mit den Projektionsstrahlen ergeben eine, auf Grund der Eindeutigkeit der Rekonstruktion, zu Γ kongruente Figur.

Literatur

[1] Georg Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik* Spektrum Verlag/Elsevier, Heidelberg, 2005.
[2] Fritz Rehbock: *Geometrische Perspektive* Springer, Berlin, 1979.
[3] H.Brauner: *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie* Springer - Verlag Wien New York 1986.
[4] W.Wunderlich; *Darstellende Geometrie 2* BI Hochschultaschenbücher 133/133a, Mannheim, 1967.
[5] www.htw-dresden.de/ teichert/teichert.htm
[6] http://www.onagocag.com/nazca.html
[7] http://www.htw-dresden.de/nazca/
[8] http://www.crystalinks.com/nazca.html