

# Tatlin's unmöglicher Turm

## 3D Rekonstruktion aus Bildern schlechter Qualität



Franz Gruber

*Ordinariat für Geometrie, Universität für angewandte Kunst Wien*

**Kurzfassung:** Der einst als utopisch geltende 400 m hohe Turm von Vladimir Tatlin und die Frage nach seiner heutigen Realisierbarkeit war der Ausgangspunkt für die folgende Arbeit. Um die 3D Daten des geplanten Bauwerks zu ermitteln, lagen ausschließlich alte Fotografien eines maßstabgetreuen Modells aus dem Jahre 1920 vor, welche den Bedingungen für die klassische, geometrische Bildrekonstruktion nicht genügten. Zur schlechten Bildqualität kam hinzu, dass bei der Bestimmung der Fluchtpunkte mit großen Ungenauigkeiten zu rechnen war. Es wird ein Algorithmus vorgestellt, der mittels numerischer Methoden und unter Verwendung mehrerer Fotos (Ansichten) des selben Objekts diese Unschärfen minimieren und eine möglichst genaue Rekonstruktion liefern kann.



## Vladimir Tatlin

Der russische Maler, Konstruktivist und Avantgarde Künstler *Vladimir Tatlin* entwirft 1919 einen gigantischen Glas-Stahl-Turm als ein *Monument für die Dritte Internationale*.

Der Turm sollte das Symbol für die soziale Revolution in Rußland werden und einer riesigen Maschine gleichen, mit drehbaren Konferenzräumen, einem Radiosender und Säulen im Inneren, die sich nach den Gestirnen ausrichten können. Das ehrgeizige Projekt wurde aus finanziellen Gründen nicht gebaut, gilt aber bis heute als Meilenstein der Architekturgeschichte.

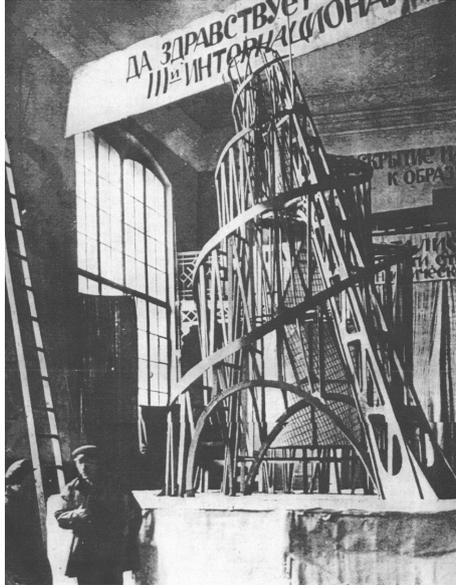


Abbildung 1: Ausstellungsmodell  $M$  1:100

## Problematik im vorliegenden Fall

Eine Gruppe von Studenten am Institut für Architektur der Universität für angewandte Kunst stellte sich die Frage, ob dieses Bauwerk mit heutigen Mitteln und Materialien baubar wäre. Das vorwiegend statische Problem setzt eine genaue Kenntnis der Geometrie des Turms voraus. Da keine Pläne vorlagen, musste die Rekonstruktion auf der Basis von etwa zehn, sehr alter Fotografien (s. Abb.1) eines nachgebauten Modells erfolgen.

Die klassisch geometrischen Verfahren ([4],[5]) unter Verwendung der Hauptfluchtpunkte wurden zwar prinzipiell von neueren, numerischen Methoden ([2],[3]) abgelöst, zeigten aber bei der Herleitung eines Algorithmus für den speziellen Fall gewisse Vorteile.

Unsere Methode leitet sich grundsätzlich vom klassischen Messpunktverfahren ab. Dieses benötigt ursprünglich nur ein einziges Foto zur Rekonstruktion, setzt dafür allerdings *ideale Verhältnisse*, wie die Kenntnis der drei Hauptfluchtpunkte und die am Foto sichtbare Zuordnung eines Punktes  $P$  zu seinem Fußpunkt  $P'$  auf der Grundrissebene (Abb.4), voraus. Während die Fluchtpunkte auf einigen Fotos zumindest geschätzt werden konnten, war der Grundriss der zu rekonstruierenden Punkte (aufgrund der schiefen Bauweise des Turms) auf den Fotos nicht zuordenbar. Um das Problem zu lösen, musste man also mindestens zwei Bilder kombinieren, auf denen ein und dasselbe Referenzsystem wie z.B. eine quaderförmige Ecke, abgebildet war.

Für unsere Rekonstruktion eigneten sich genau zwei Fotos (Abb.2), wobei die (rechte) Fensterecke als gemeinsamer Referenzpunkt diente. Die vorliegende Bildretuschierung im linken Bild stellte übrigens für die Rekonstruktion kein zusätzliches Hindernis dar. Im folgenden werden die angesprochenen Probleme detaillierter beschrieben.

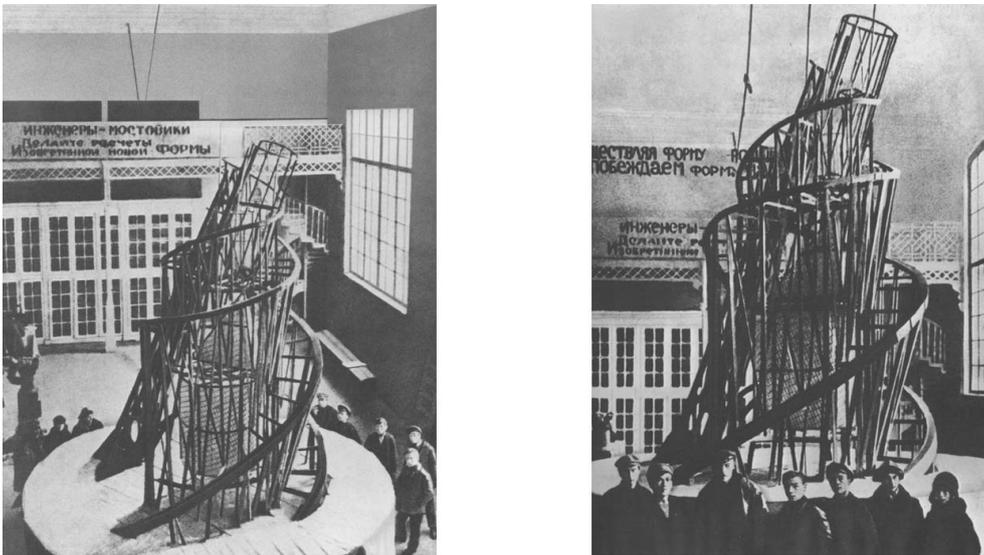


Abbildung 2: Fotos mit derselben (rechten) Fensterecke

### **Problem A:** Die Ungenauigkeit der Fluchtpunkte $F_1, F_2, F_3$

Für die klassische Rekonstruktion ist die genaue Position der Fluchtpunkte Grundvoraussetzung für ein zufriedenstellendes Ergebnis. Die Lage der Fluchtpunkte bestimmt zunächst die Lage des Augpunktes und im weiteren die Lage der Sehstrahlen durch den Augpunkt. Der Fehler in den Fluchtpunkten pflanzt sich also während der gesamten Berechnung fort. Wie so oft ist es auch im vorliegenden Fall (Abb.3) der dritte Fluchtpunkt  $F_3$ , der die meisten Probleme bereitet.

Um dieses Problem unter Kontrolle zu bekommen, wurden die Fluchtpunkte anfangs so gut wie möglich geschätzt und anschließend iterativ um ihre Anfangsposition innerhalb gewisser Genauigkeitsschranken zufällig variiert. Somit konnte in jedem Iterationschritt eine hypothetische Kameraposition berechnet werden, welche als Basis für unseren Algorithmus diente.

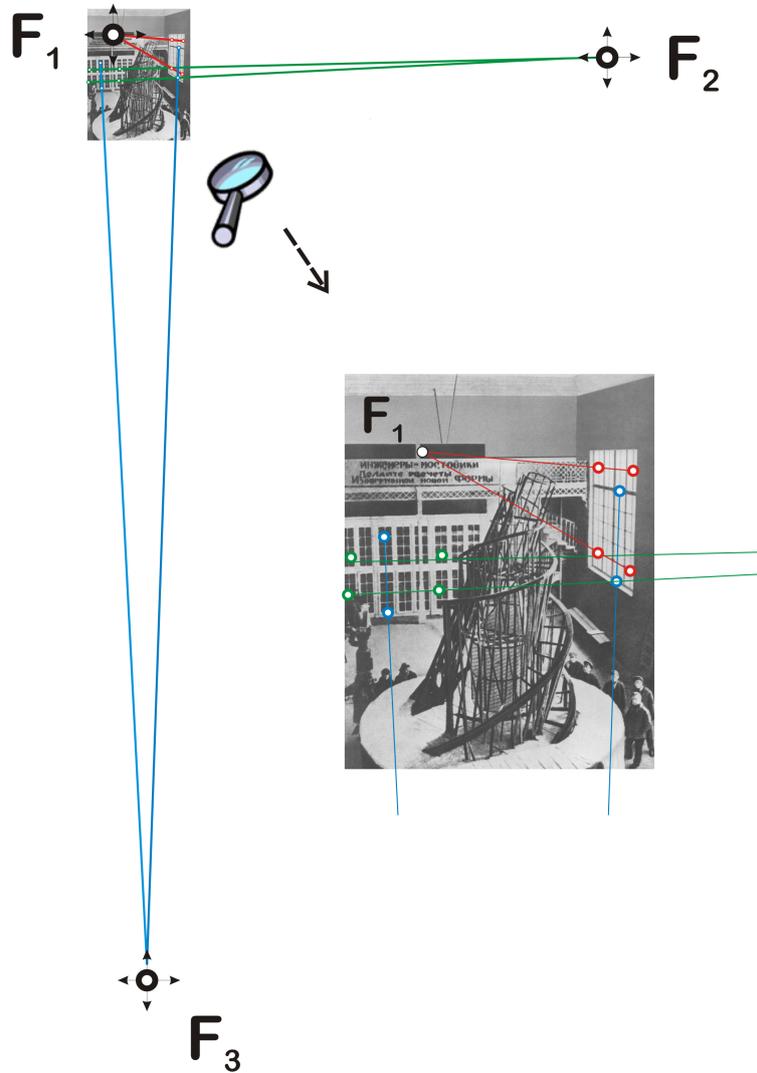


Abbildung 3: Fluchtpunkt  $F_3$  liegt weit ausserhalb

### Problem B: Fehlender Fußpunkt $P'$

Durch die fehlende Projektion auf die Grundrissebene  $P'$  konnten die einzelnen Punkte nicht aus einem einzigen Foto rekonstruiert werden, weil das dafür geeignete Messpunktverfahren ([4],[5]) dies voraussetzt. Unser Lösungs-

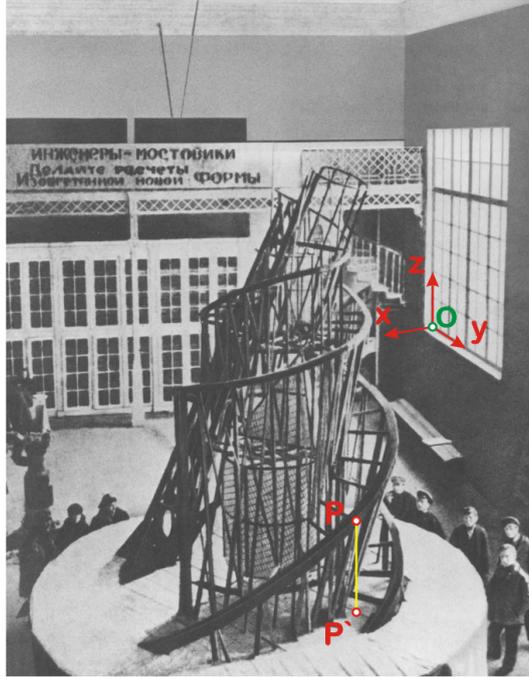


Abbildung 4: Unbekannter Fußpunkt  $P'$  und absolutes Koordinatensystem

ansatz basiert dennoch auf diesem klassischen Verfahren unter Verwendung mehrerer Bilder des selben Objekts.

Betrachten wir zuerst nur das erste Foto. Die anfangs geschätzten Hauptfluchtpunkte  $F_1, F_2, F_3$  entsprechen den räumlichen Blickrichtungen  $\{x, y, z\}$  sowie einem Augpunkt  $E_1$ . Die Fensterecke  $O$  wird als Ursprung eines absoluten Koordinatensystems mit den Achsrichtungen  $\{x, y, z\}$  definiert und die gesamte Szene in dieses System transformiert.

Nachdem auch die restlichen Fotos (samt ihrer Augpunkte) in dieses System transformiert und die einzelnen Szenen auf den selben Größenmaßstab skaliert worden sind, kann man mit der Rekonstruktion einzelner Fotopunkte  $P_i$   $i = 1 \dots n$  begonnen werden.

Der Raumpunkt  $P$  ergibt sich nun theoretisch als der Schnittpunkt zweier entsprechender Sehstrahlen (verschiedener Szenen), also ohne die zugehörigen Fußpunkte  $P'_i$  zu kennen.

## Der Algorithmus als Minimierungsproblem

Die theoretische Bedingung, dass sich sämtliche Sehstrahlen entsprechender Bildpunkte in der exakten Position des zugehörigen Raumpunktes schneiden ist praktisch unmöglich, beinhaltet aber die Grundidee für unseren Algorithmus. Sei  $i = 1 \dots n$  die Anzahl der markierten Fotopunkte je Bild. In der Praxis werden zwei zugehörige Sehstrahlen  $E_i P_i$  windschief sein und einen Normalabstand  $d_i > 0$  haben. Sei  $S$  die Summe der quadratischen Abstände  $d_i^2$ . Für unseren Fall mit nur 2 Fotos sollte der Algorithmus also durch zufällige Variation der insgesamt 6 Fluchtpunkte (siehe Problem A) das Funktional  $S$  minimieren mit dem Idealfall  $S = 0$ .

$$0 \leq S = \sum_{i=1}^n d_i^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

Die 6 Fluchtpunkte sind jeweils in 2 Richtungen zu variieren, man hat also bereits hier ein 12-dimensionales Gebiet abzusuchen, was einer stochastischen Suche den Vorrang gab.

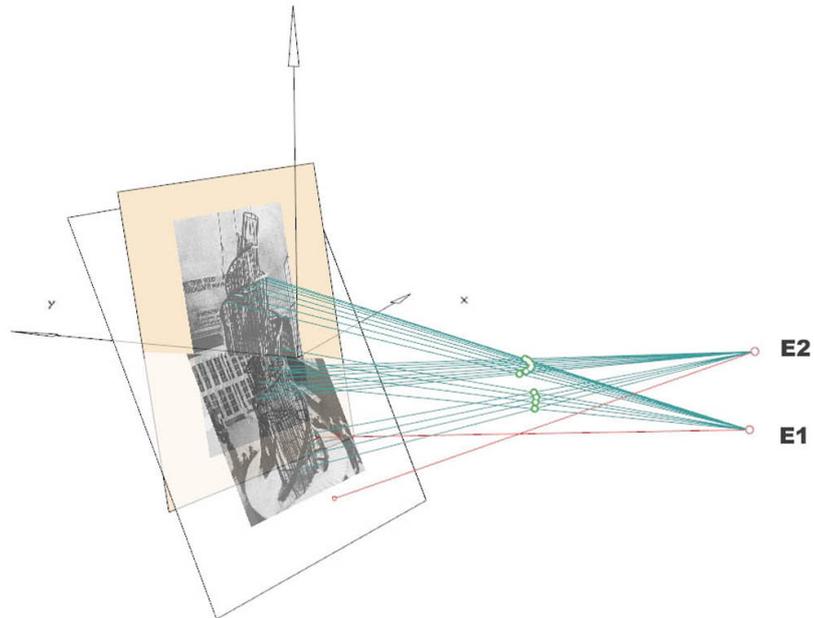


Abbildung 5: Minimierungsproblem

## Qualität des Verfahrens

Bemerkenswerterweise konvergierte das oben beschriebene Verfahren recht gut, d.h., die Summe der Fehler  $S$  hatte tatsächlich ein ziemlich eindeutig bestimmbares Minimum. Daraus resultierten die räumlichen Positionen entsprechender Bildpunkte. Ein anschließender Vergleich mit dem von der Kontrollgruppe entworfenen Modell (Abb.6) ergab hochgradige Übereinstimmungen.

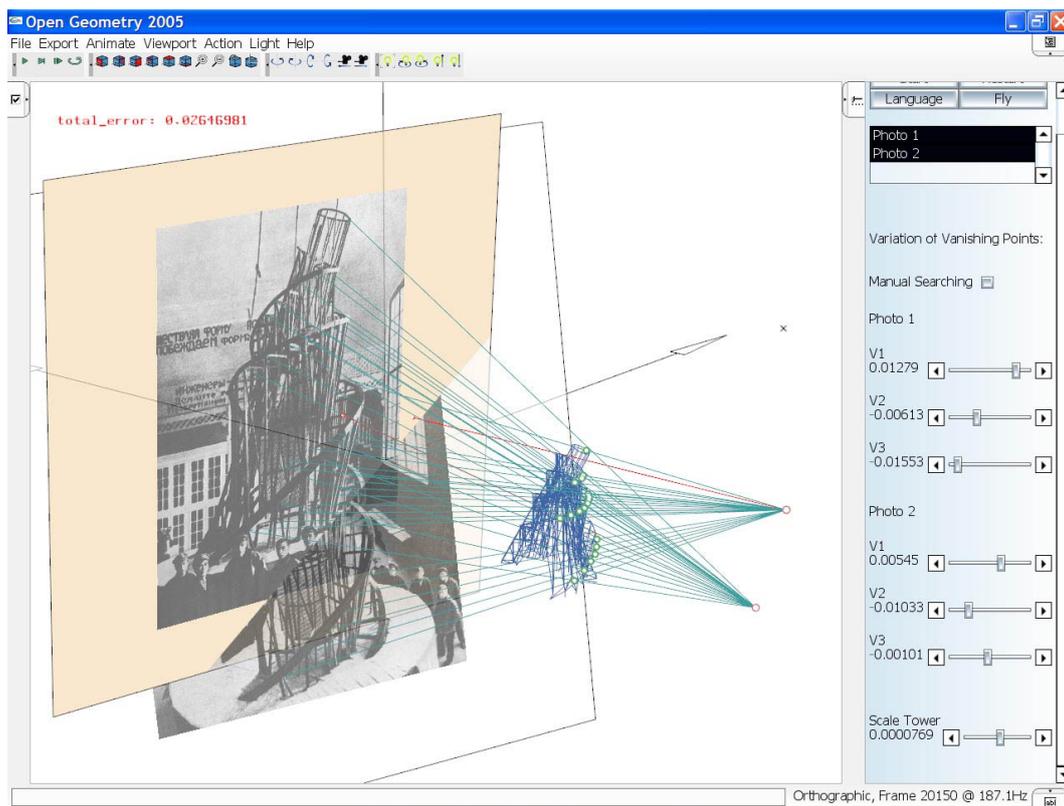
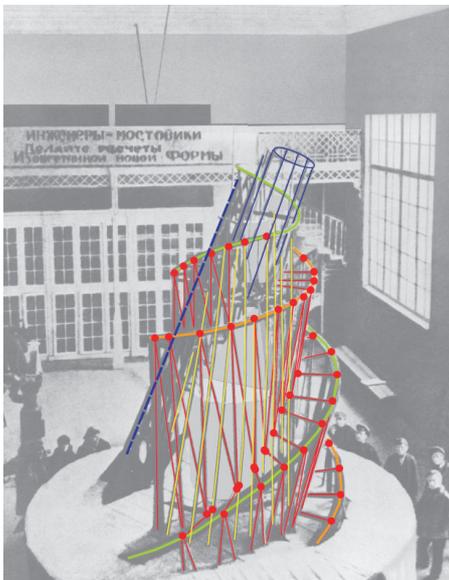
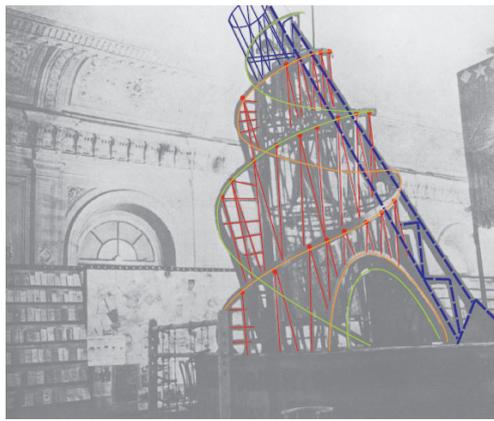


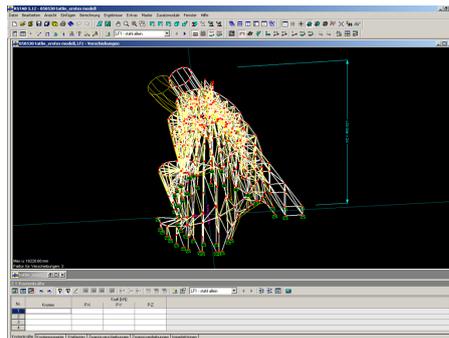
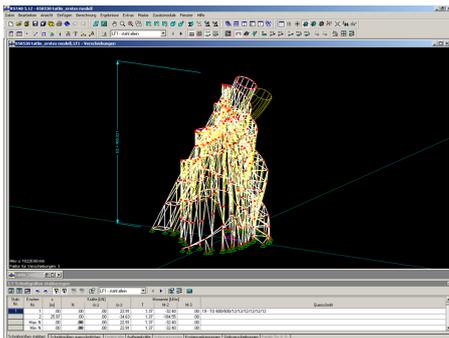
Abbildung 6: 3D Endresultat

## Vergleich mit den Fotos



## Ergebnisse zur Statik

Um die statische Realisierbarkeit beantworten zu können, verwendeten die Architekturstudenten die Software *RSTAB*. Den Ausmaßen des Turmes entsprechend waren auch die Ergebnisse, was die Dimensionierung etwaiger Hohlprofile betrifft: Kastenprofile mit einem Querschnitt  $4 \times 5 \text{ m}$  können laut Software den Turm tragen. Das Gesamtgewicht würde das vom Eiffelturm um das Zehnfache übertreffen. Es wäre mit Sicherheit auch heutzutage eine große bautechnische Herausforderung, gewiß aber eine Unmöglichkeit zu Zeiten Tatlin's.



## Literatur

- [1] G. Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik* Spektrum Verlag/Elsevier, Heidelberg, 2005.
- [2] H.Stachel; *Descriptive Geometry Meets Computer Vision - The Geometry of Two Images* Journal for Geometry and Graphics, Volume 10 (2006), No.2, 137-153.
- [3] Richard Hartley, Andrew Zisserman: *Multiple View Geometry*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] H.Brauner: *Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie* Springer - Verlag Wien New York 1986.
- [5] W.Wunderlich; *Darstellende Geometrie 2* BI Hochschultaschenbücher 133/133a, Mannheim, 1967.