

Über spezielle Kugelparkettierungen, Zonoeder und andere Rhombengitter

Franz Gruber und Georg Glaeser

Universität für angewandte Kunst Wien

In dieser Arbeit geht es um Polyeder mit rhombenförmigen -- ebenen oder „windschiefen“ – Seitenflächen. Zunächst werden solche Polyeder aus den platonischen Körpern abgeleitet und zur Parkettierung der Kugel durch kongruente sphärische Rhomben verwendet. In weiterer Folge werden geschlossene rotationssymmetrische Polyeder untersucht, deren Seitenflächen ausschließlich ebene Rhomben sind. Um diese elegant herleiten zu können, werden Drehflächen untersucht, die durch Rotation einer Sinuslinie (Amplitude a) um die Mittelachse entstehen. Diese werden mit Drehzylindern vom Durchmesser a geschnitten, welche die Drehachse enthalten. Die Schnittkurve besteht aus einem Paar gegensinniger Schraublinien. Diskretisiert man das Modell, indem man die Schraublinien durch Polygone gleicher Kantenlänge ersetzt, hat man Polyeder vorliegen, die aus lauter ebenen Rhomben bestehen. Sämtliche Punkte liegen in Schichtenebenen (Zonen) mit gleichen Abständen. Solche Polyeder werden in verschiedenen Quellen als „Zonoeder“ bezeichnet. Mehr oder weniger exakte Beispiele sind in Kunst und Natur zu finden. Weiter wird untersucht, was passiert, wenn man solche Rhombengitter auf andere Drehflächen zu legen versucht, insbesondere auf die Sphäre, die Pseudosphäre, den Drehkegel, die Kettenfläche und den Torus. Die zugehörigen Rhomben sind dann „windschief“, haben aber durchaus bemerkenswerte Eigenschaften.

1. Von den platonischen Körpern zu Parkettierungen der Kugel mit kongruenten sphärischen Rhomben

Betrachten wir die platonischen Körper, die uA. lauter gleich lange Kanten besitzen (Abb.1, linke Spalte). Beginnen wir mit dem Würfel, der aus lauter Quadraten besteht, die natürlich auch als spezielle Rhomben aufgefasst werden können, womit bereits ein erstes - triviales - Beispiel für ein ausschließlich aus Rhomben bestehendes Polyeder gefunden ist. Projiziert man die Kanten des Würfels auf die Umkugel, erhält man sechs kongruente sphärische Rhomben, welche die Kugel pflastern (Abb.1, rechte Spalte oben). Man kann sich nun zu den acht Eckpunkten des Würfels noch die sechs Mittelpunkte der Quadrate dazu denken und mit ihnen eine Serie von zwölf Rhomben betrachten, die allerdings längs der kürzeren Diagonale um 90° geknickt sind (Abb.1 links, 2.v.o.). Projiziert man die geknickten Rhomben auf die Umkugel, erhält man eine regelmäßige Parkettierung der Kugel durch zwölf kongruente sphärische Rhomben (Abb. 1, rechte Spalte, 2. v.o.). Das zugehörige Kantenmodell (Abb. 2, linke Spalte, Mitte) heißt Rhombendodekaeder [2, 4]. Ein regelmäßiges Tetraeder bzw. Oktaeder kann man sich aus zwei bzw. vier Rhomben zusammengesetzt denken, die allerdings längs der kürzeren Diagonale geknickt werden. Auch hier lässt sich durch Projektion auf die Umkugel eine Parkettierung aus zwei bzw. vier sphärischen Rhomben erreichen (Abb.8).

Nimmt man beim regelmäßigen Dodekaeder zu den Eckpunkten die Mittelpunkte der regel-

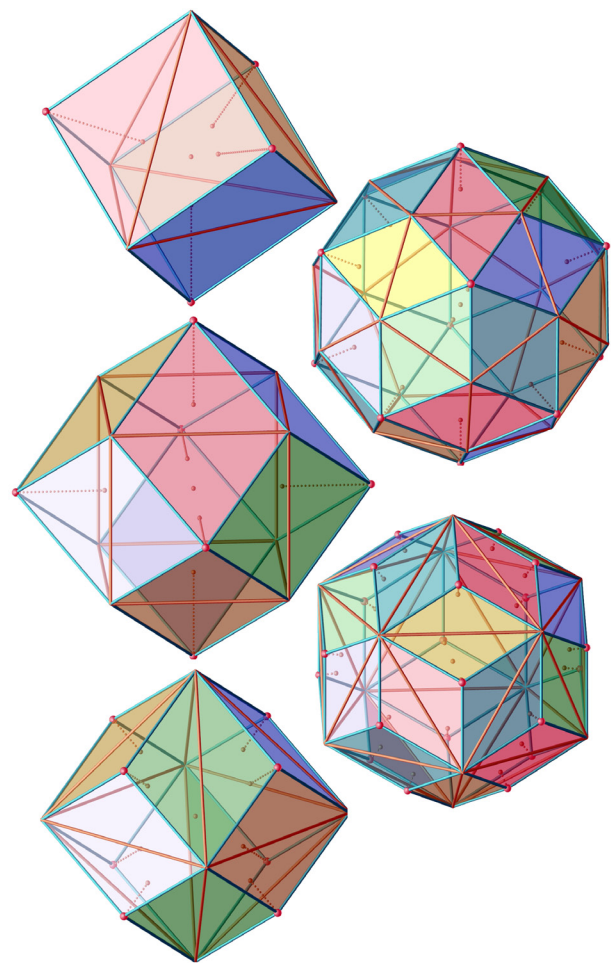


Abb.2 „Skalieren“ der Flächenschwerpunkte mit bestimmten-Faktoren liefert sog. Rhombenisoeder

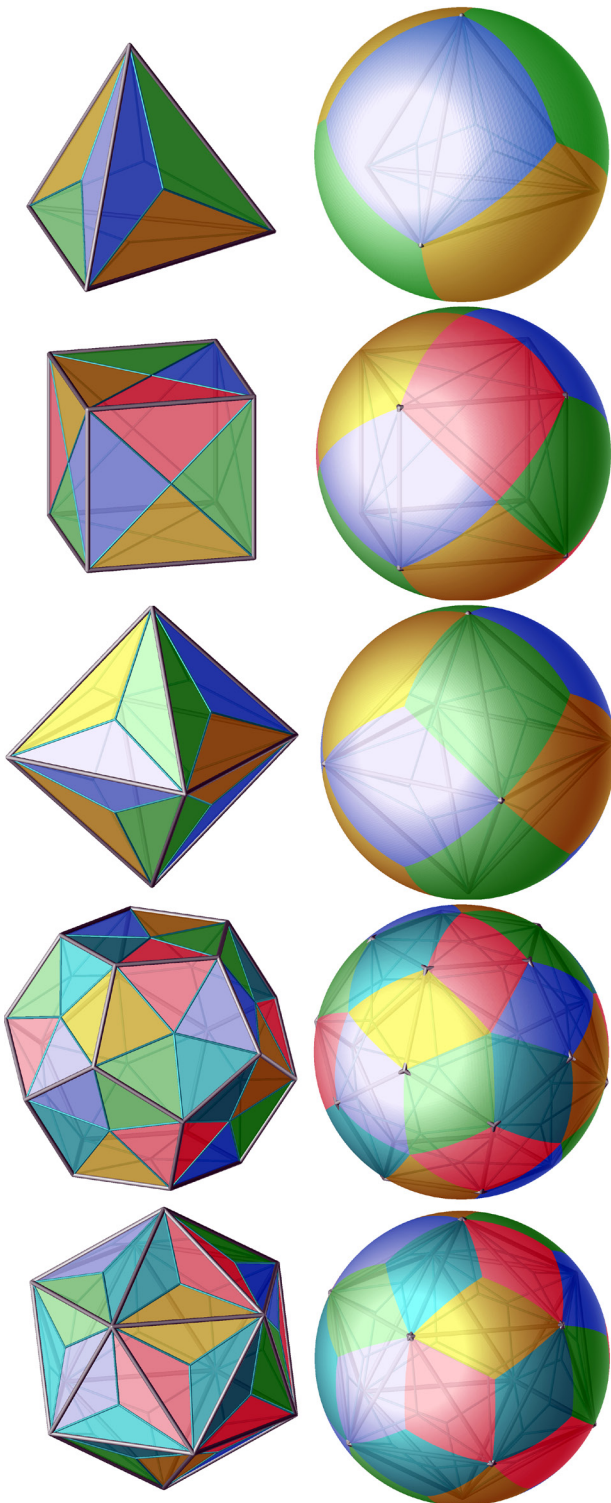


Abb. 1 Die Projektion von windschiefen sphärischen Rhomben, welche zusammengesetzt die platonischen Körper ergeben, auf die Umkugel. Dabei ergibt sich eine Parkettierung der Kugel mit kongruenten sphärischen Rhomben.

mäßigen Fünfecke auf, lassen sich die insgesamt 32 Punkte zu 30 Rhomben verbinden. Aus 30 kon-

gruenten Rhomben, die man wieder längs der kürzeren Diagonale geknickt werden müssen, lässt sich ein Dodekaeder basteln. Projiziert man dieses Gebilde wieder auf die Umkugel des Dodekaeders, erhält man kongruente sphärische Rhomben, die eine gleichmäßige Zerlegung der Kugeloberfläche in 30 kongruente rhombenförmige Bereiche nach sich zieht.

Beim Ikosaeder lassen sich je zwei der 20 gleichseitigen Dreiecke wie in Abb. 1 unten links zu geknickten Rhomben zusammenfassen, was bei Projektion der Kanten auf die Umkugel wiederum zur schon bekannten Parkettierung mit 30 kongruenten sphärischen Rhomben führt (untere Bilder in Abb. 1, rechte Spalte).

Man kann durch gezieltes „Skalieren“ der Flächenschwerpunkte auch die zugehörigen Rhomben-Polyeder finden (Abb. 2), indem man mit den Punkten nicht zur Kugel „hinausfährt“, sondern so weit, dass die windschiefen Rhomben planar sind. Auf diese Weise kommt man zu sog. Rhombensoedern [5], also Polyedern, deren Seitenflächen allesamt kongruente Rhomben sind. Über den Tetraeder gelangt man dabei zum Würfel, über den Würfel bzw. Oktaeder zum Rhombendodekaeder (Abb. 2, linke Spalte, [2]), beim Dodekaeder bzw. Ikosaeder zum rhombischen Triacontaeder (Abb. 2, rechte Spalte, [3, 4]).

2. Nichttriviale Schraublinien auf speziellen Drehflächen

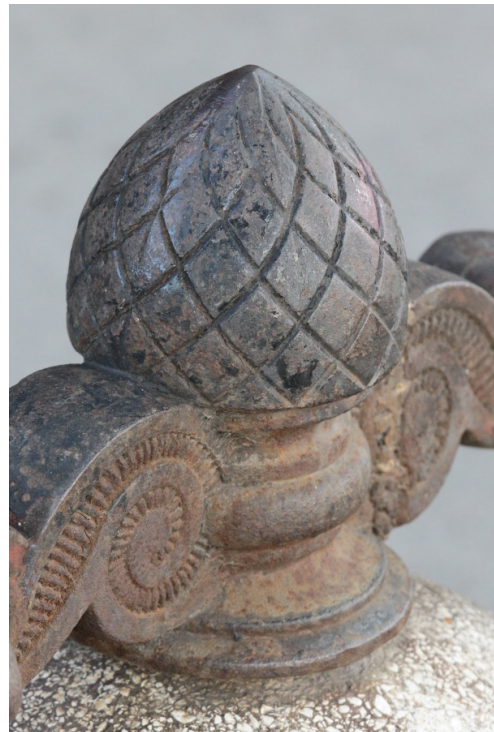


Abb. 3 Gravuren auf einer Drehfläche mit einer Sinuskurve als Meridian

Betrachten wir jene Drehfläche, die durch Rotation einer Sinuskurve mit der Amplitude a um deren Achse entsteht (Abb.4). Sie wird durch die implizite Flächengleichung

$$(1) \ x^2 + y^2 = a^2 \sin^2(z/b)$$

beschrieben. Nun schneiden wir diese Fläche mit einem Drehzylinder mit Radius $a/2$, dessen Achse parallel zur Drehachse im Abstand $a/2$ in der xz -Ebene liegt:

$$(2) \ x = a/2 (1 - \cos t), \ y = a/2 \sin t.$$

Einsetzen in (1) liefert $z = \pm bt/2$. Die Schnittkurve zerfällt somit in zwei spiegelsymmetrische Schraublinien mit der Zylinderachse als Schraubachse und dem Schraubparameter $b/2$. Durch Rotation um die z -Achse erhält man zwei Scharen von Schraublinien auf der Fläche.

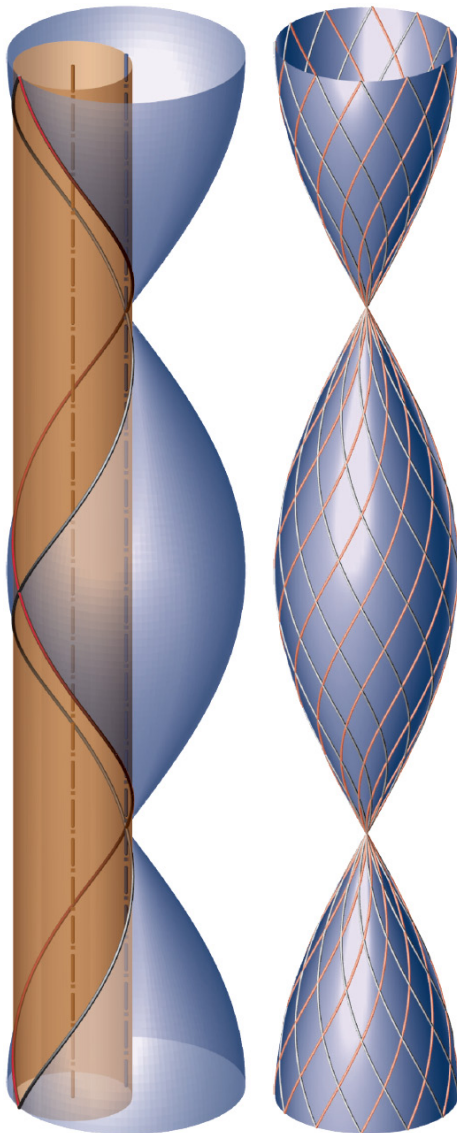


Abb.4 Eine Sinuskurve rotiert um ihre Achse. Die entstehende Drehfläche trägt in nicht-trivialer Weise zwei Drehscharen von Schraublinien [6].

Künstler haben die Tatsache bereits ausgenutzt: Abb. 3 links zeigt ein liebevoll ausgefertigtes Detail einer Pferdehalterung in Barcelona, berühmt ist aber auch der Gherkin Tower von Norman Foster in London.

3. Zonoeder

Nun ist es ein kleiner Schritt zu den sog. Zonoedern [8]: Unterteilen wir unsere Schraublinien zwischen den zwei Punkten auf der Rotationsachse in eine gerade Anzahl $2n$ von Punkten, so haben die sowohl im Raum als auch im Grund- und Aufriss gleiche Abstände und bilden Eckpunkte von Polygonen, die in Schichtenebenen liegen, die voneinander gleichen Abstand haben. Daraus folgt, dass ihre Verbindungsrhomben in Ebenen liegen, also nicht windschief sind. In jede Zone passen nach dem Peripheriewinkelsatz (Polarwinkel ist gleich halbem Zentriwinkel) genau $2n$ kongruente Rhomben. Die Zonoeder dürften die einzigen nicht-trivialen Beispiele für Polyeder bilden, die ausnahmslos von ebenen Rhomben begrenzt sind.

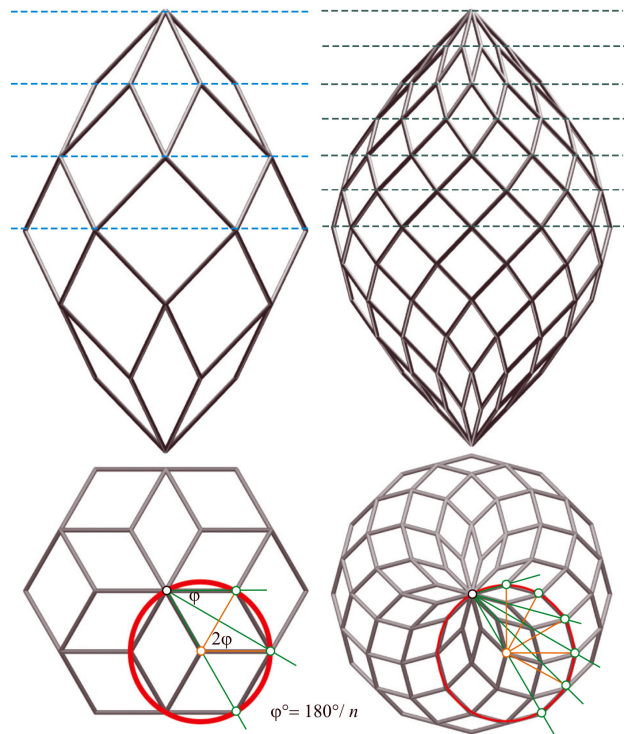


Abb.5 Eine Diskretisierung der Schraublinien führt zu Polygonen mit gleichen Kantenlängen und gleichen Höhenunterschieden. In jede Schicht passen gleich viele Unterteilungspunkte. Die entstehenden Körper sind Rhombenkörper.

Ein schönes Beispiel aus der Architektur ist der Glas-Pavillon von Bruno Taut in Köln (Abb.6)

Auch in der Natur sind vergleichbare Muster zu finden, wenngleich man nicht erwarten darf, perfekte geometrische Modelle zu finden. In Abb. 7 sind



Abb.6 Bruno Taut, Glass Pavilion, Cologne Werkbund 1914 Exhibition [7]

junge Nadelbaumtriebe zu sehen, bei denen man durchaus den Meridian der speziellen Drehfläche erahnen kann.



Abb. 7: Annäherung von Zonoedern bei jungen Nadelbaumtrieben [6]

4. Rhombengitter auf der Kugel

Wir haben im ersten Abschnitt bereits Rhombengitter auf Kugeln gefunden, die sich allerdings

nicht zu Polyedern mit kongruenten ebenen Rhomben reduzieren lassen (Abb.1, rechte Spalte). Die Eckpunkte waren auf der Kugel gleichverteilt. Nun wissen wir aber, dass eine solche Gleichverteilung nur in ganz wenigen Spezialfällen möglich ist, und alle Spezialfälle werden durch die platonischen Körper erfasst. Abb. 8 zeigt zwei noch nicht in Abb. 1 erfasste Fälle: Eine Parkettierung mit zwei bzw. vier Rhomben (erhalten durch Projektion von Tetraeder bzw. Oktaeder).

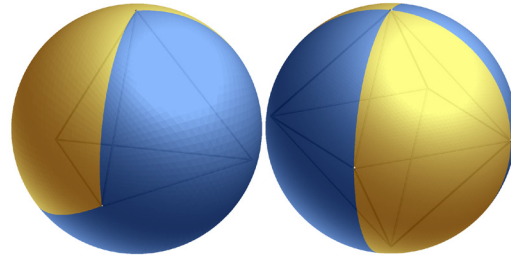


Abb.8 Zwei weniger spektakuläre Fälle (Projektion des Tetraeders bzw. Oktaeders). Die beiden sphärischen Rhomben links sind „nicht-konvex“, die vier auf der rechten Seite zu „Zweiecken“ entartet.

Der noch ausstehende Fall der Projektion des Ikosaeders bringt hingegen eine hübsche Parkettierung mit zehn sphärischen Rhomben (Abb.9).

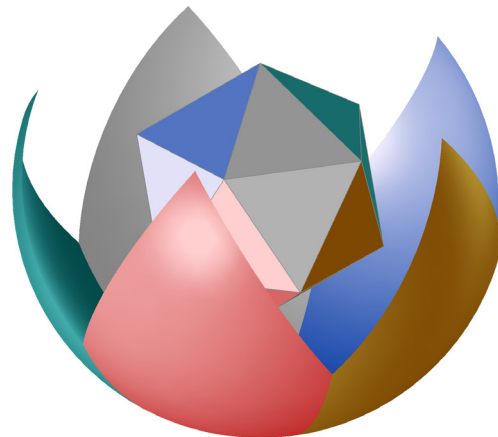


Abb.9 Die Projektion des Ikosaeders auf eine konzentrische Kugel liefert eine noch ausstehende Parkettierung mit zehn kongruenten sphärischen Rhomben, wobei im Bild nur die untere Hälfte („Blüte“) dargestellt ist.

Von Walter Wunderlich stammen zwei interessante Ansätze, Rhombengitter auf eine Kugel bzw. Pseudosphäre zu platzieren. Abb. 10 zeigt so ein Gitter auf einer Halbkugel. Es wurde mit einer speziellen Software ermittelt, welches die Lösung iterativ findet, indem man Punkte auf der Kugel so „schwimmen“ lässt, dass in einem nächsten Schritt die gewünschte Bedingung (gleiche Stablänge) in Summe besser angenähert wird. Nach ausreichend vielen Iterationen findet man damit ein Gleichgewicht, das die exakte Lösung (falls

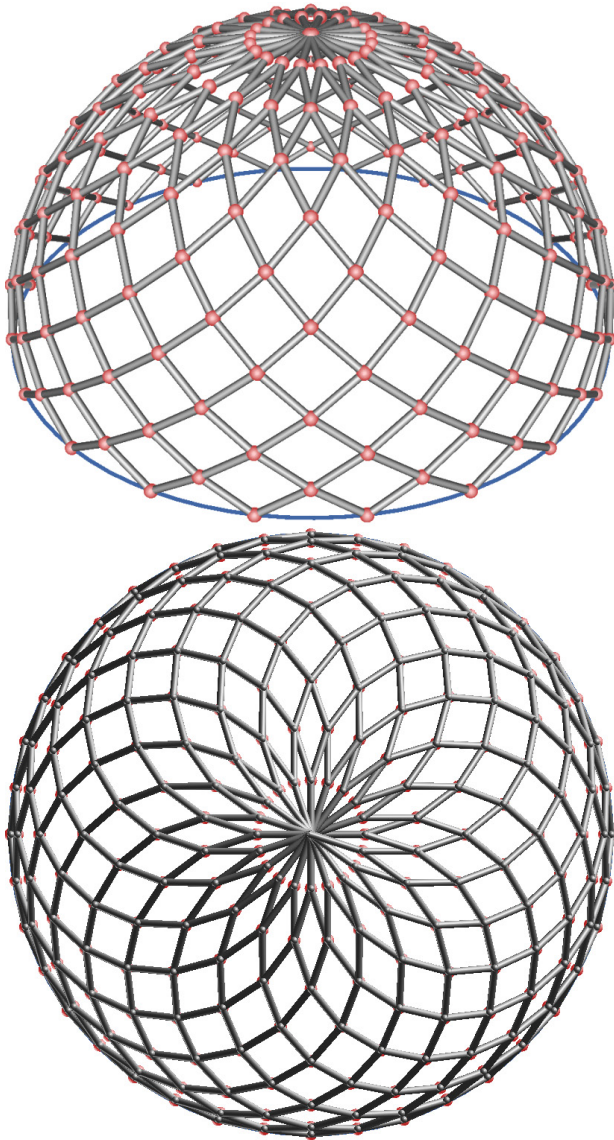


Abb.10 Exaktes Rhombengitter auf der Kugel: Auch wenn es fast so aussieht: Die Rhomben sind nicht eben und die zusammenhängenden Seiten verteilen sich im Grundriss nicht auf Kreise.

eine solche existiert) beliebig genau annähert. Das Verfahren funktioniert nicht nur auf der Kugel, sondern zB. auch auf dem Drehkegel (Abb.12), der Pseudosphäre (Abb. 13), der Kettenfläche (Abb.15) oder dem Torus (Abb.16 und 17).

Weil im Gegensatz zur vorhin betrachteten „Sinus-Drehfläche“ die Abstände der Schichtenebenen, auf die sich die Rhombenecken verteilen, nicht konstant sind, können die zugehörigen Rhomben nicht eben sein, auch wenn es optisch fast so aussieht. Ebenso scheint es, als ob sich die Rhombeneckpunkte auf Kurven verteilen, welche im Grundriss kreisförmig sind. Dies ist jedoch nicht der Fall. Abb. 11 zeigt ein Vierecksgitter auf der Kugel, wo die Eckpunkte auf projizierenden Drehzylindern liegen (und damit im Raum auf sog. „Viviani-

Fenstern“). Die Punkte müssen im Grundriss aus Symmetriegründen gleichverteilt sein. Weil ihre Höhenwerte aber nicht konstant zunehmen, sind die Strecken immer leicht unterschiedlich lang, so dass nur annähernd Rhomben entstehen, genau genommen aber (windschiefe) Deltoide.

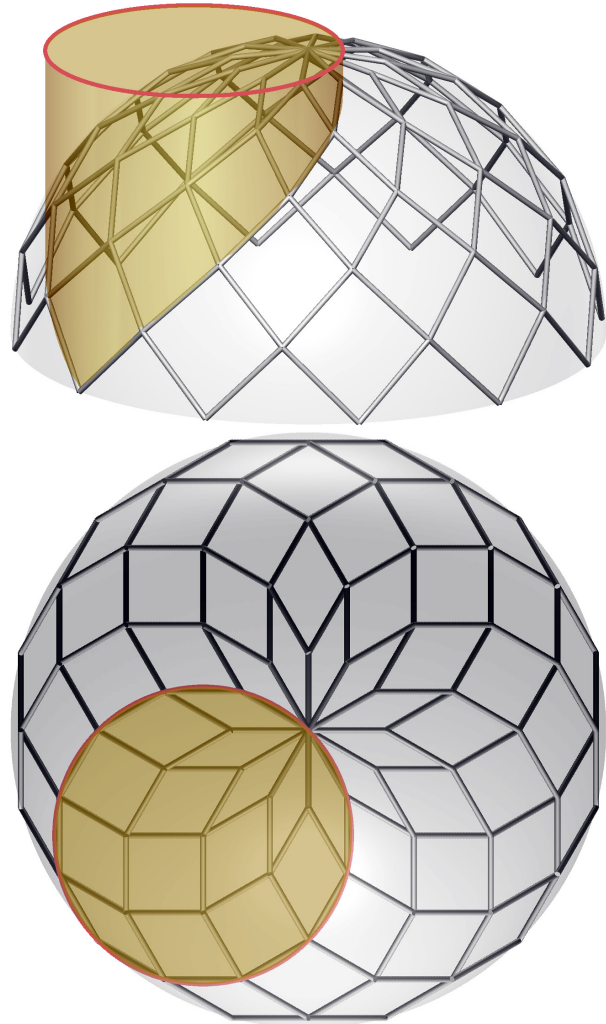


Abb.11 „Fast-Rhombengitter“ auf der Kugel: Hier verteilen sich die Punkte auf projizierenden Drehzylindern.

5. Rhombengitter auf speziellen Drehflächen

Wiederholt man die vorangegangenen Überlegungen für andere Drehflächen, kommt man zu vergleichbaren Ergebnissen. Abb. 12 zeigt Rhombengitter auf einem Drehkegel. Besonders schön bildet sich das Rhombennetz auf der Pseudosphäre ab (Abb. 11). Walter Wunderlich hat in einer seiner frühen Arbeiten [1] gezeigt, dass das entstehende Rhombennetz bis zu einem gewissen Grad beweglich ist (das in Abb. 14 links abgebildete Modell stammt von ihm). Deshalb stellen sich solche Netze bei Fischreusen ein (Abb.14 rechts), wo ja der Abstand von Knoten zu Knoten konstant ist.

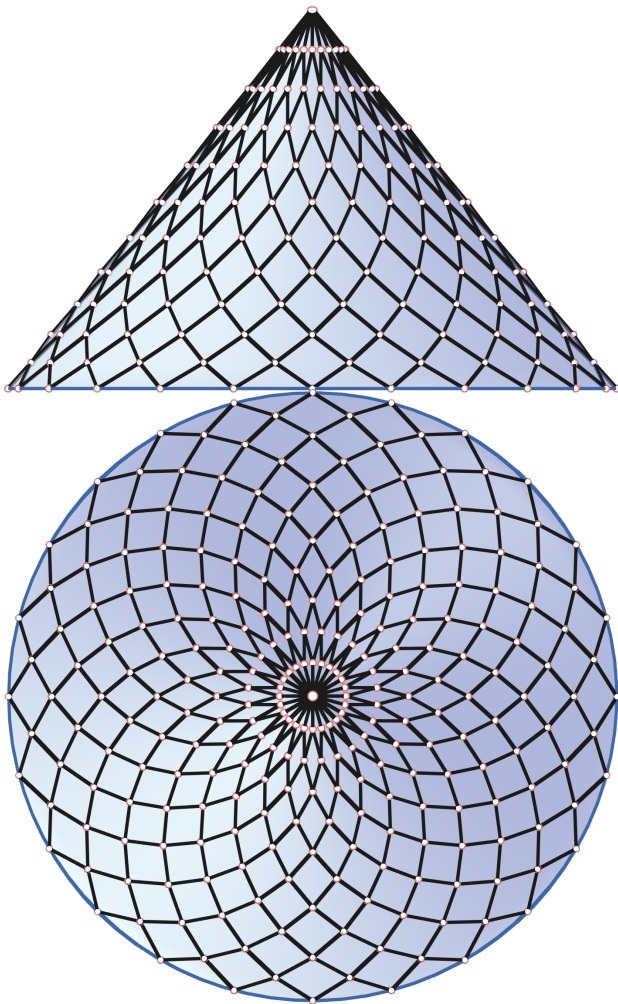


Abb.12 Rhombengitter auf einem Drehkegel

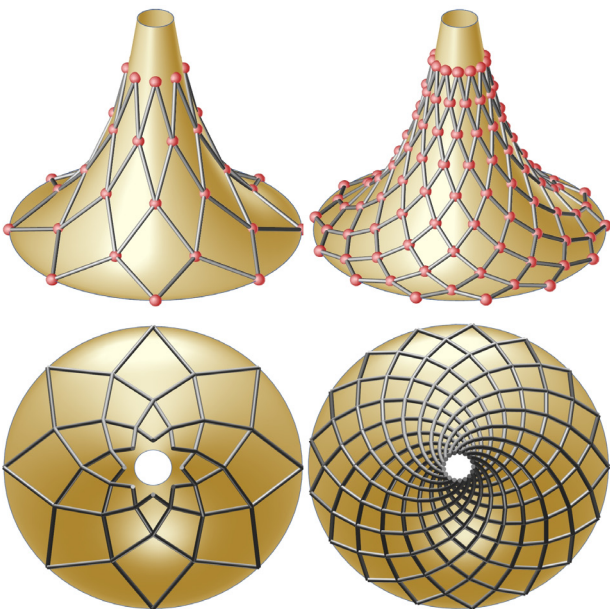


Abb. 13 Rhombengitter auf der Pseudosphäre



Abb. 14 „Reusengitter“ von Walter Wunderlich [1] Fischreusen aus Netzen [6].

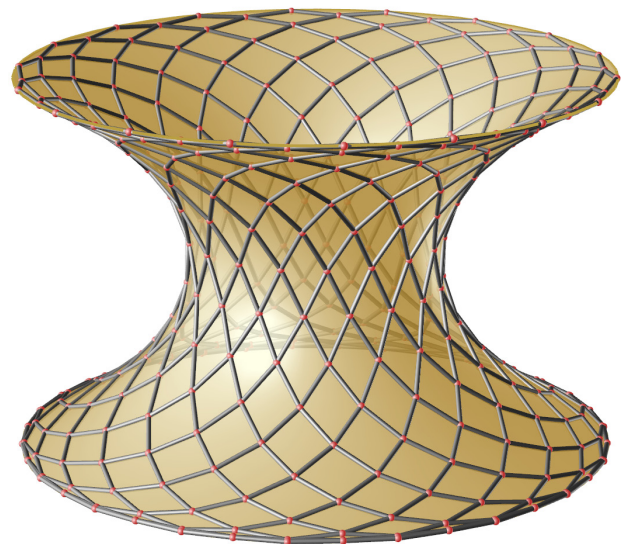


Abb.15 Rhombengitter auf einer Kettenfläche (Idee Walter Wunderlich)

In weiterer Folge beschäftigte sich Wunderlich auch mit Rhobennetzen auf Kettenflächen (Abb. 15, [9]), von denen er zeigte, dass sie beweglich sind und im Lauf der Bewegung stets neue Flächen erzeugen, unter denen sich im Grenzfall die Pseudospäre befindet.

Es bietet sich an, auch Rhobennetze am Torus zu betrachten, was zu durchaus ästhetischen Ergebnissen führt (Abb.16, Abb. 18). Bemerkenswert

ist, dass Modelle insofern beweglich sind, dass man sie entweder längs eines Meridians oder längs des Äquators aufschneiden und zusammenklappen kann. Der Mechanismus ist sogar „tordierbar“, ohne dass ein klassischer „Zwangsmechanismus“ vorliegt (siehe dazu auch die „Faschingsgirlande“ Abb.17).

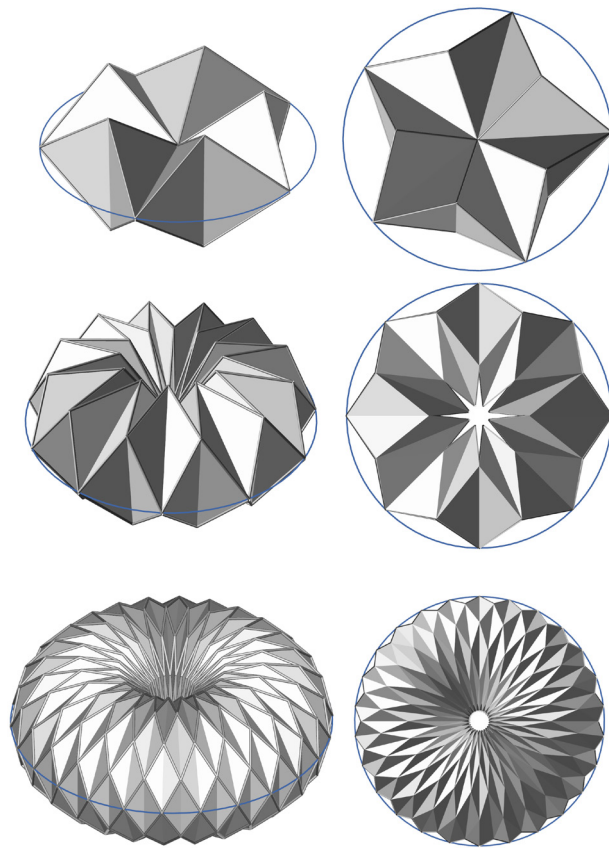


Abb.16 Lampionartige Gebilde, bestehend aus Rhombengittern, die einen Ringtorus annähern



Abb.17 Die abgebildete „Faschingsgirlande“ lässt sich nahezu beliebig verbiegen. Die Abstände zwischen den geklebten Stellen bleiben einigermaßen konstant, sodass näherungsweise ein Rhombengitter vorliegt.

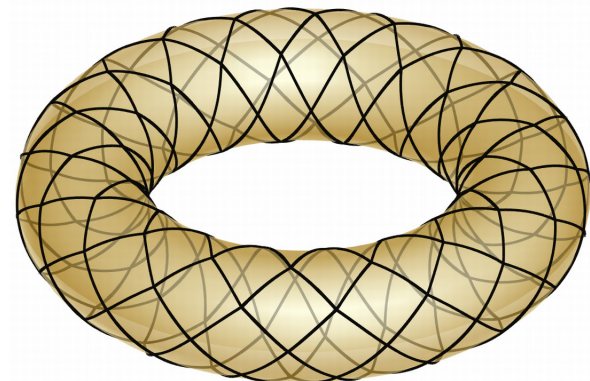
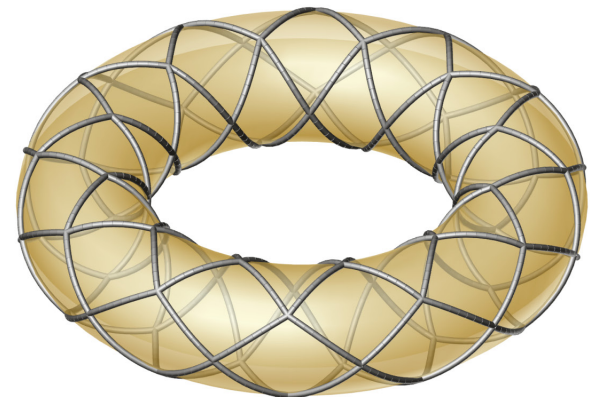
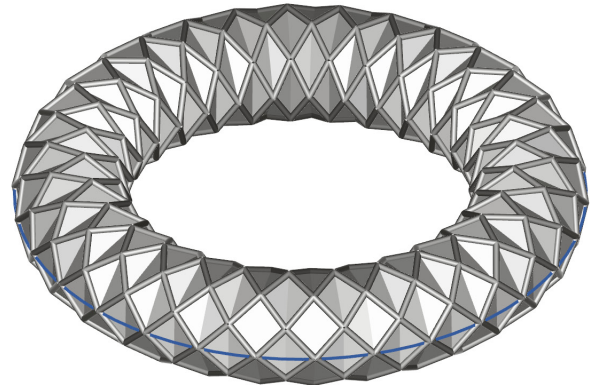
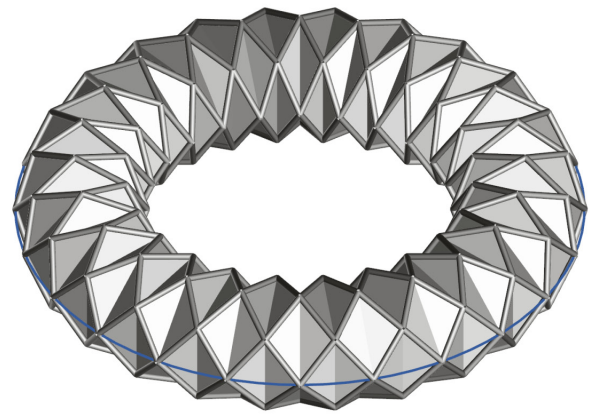


Abb. 18 Rhombengitter am Ringtorus, geradlinig oder geodätisch verbunden. Die Knoten liegen auf Schichtenkreisen des Torus.

„Spannend“ sind die Fälle, wo man die Anzahl der windschiefen Rhomben auf ein Minimum reduziert (Abb. 16 oben). Dabei ergeben sich Kaleidozyklen-artige Polyeder. Bei minimaler Rhombenzahl entstehen Tetraederketten, also echte Kaleidozyklen (Abb. 16 oben).

6. Falten von ebenen Quadratmustern

Als Spezialfall von Rhombengittern kann man „Quadratgitter“ definieren. Die einzelnen Elemente sind Quadrate, die um eine Diagonale geknickt werden können. Abb. 19 zeigt ein nicht-triviales Beispiel dafür, wie aus ebenen Quadratnetzen spannende Faltmuster erzeugt werden können. Analoges kann man natürlich auch für ebene Rhombengitter definieren.

Die Ergebnisse sind allerdings i.Allg. nicht geschlossene Polyeder ([10]).

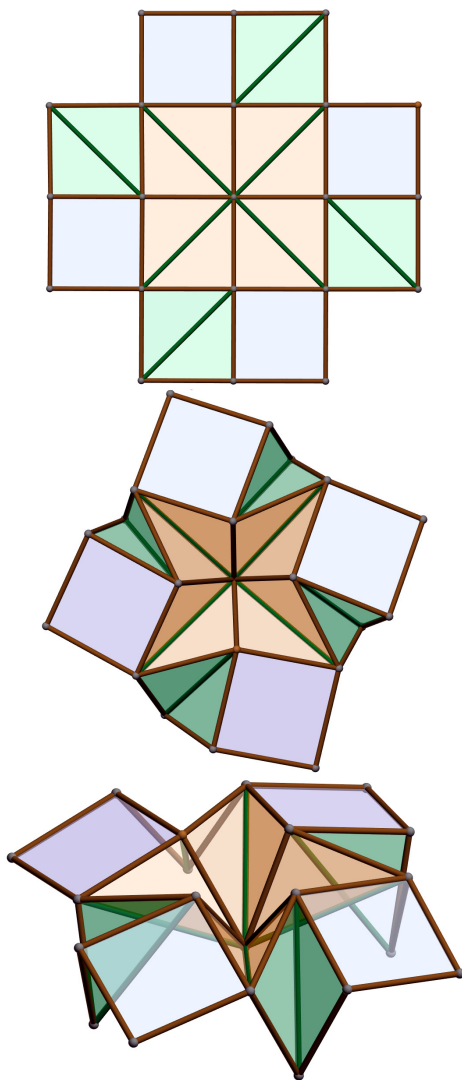


Abb. 19 Faltpolyeder aus einem Quadratnetz

7. Zusammenfassung und Ausblick

Die hier gemachten Überlegungen zu Rhombennetzen bzw. Parkettierungen mit Rhomben erfordern geometrische Überlegungen, die am Ende einer guten Geometrie-Ausbildung von interessierten Schülern bzw. Studierenden zu bewältigen ist. In der Tat kamen einige Denkanstöße von Studierenden der Universität für angewandte Kunst Wien.

Einmal für Rhombennetze sensibilisiert, entdeckt man solche in oft unerwartetem Zusammenhang. Die Liste ließe sich wohl noch lange fortsetzen. Die Autoren haben deshalb eine Web-Seite angelegt, die immer wieder aktualisiert werden soll [12].

8. Literatur bzw. Webseiten

[1] Walter Wunderlich: *Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung*. Sitzungsber. Ak. Wiss., 1951, pp. 39-77.

[2] Rhombendodekaeder:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Rhombendodekaeder>

http://en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_triacontahedron

[3] Kenneth J.M. MacLean: *A Geometric Analysis of the Platonic Solids and Other Semi-Regular Polyhedra*, Loving Healing Press, 2007. Zugehörige Webseite über Rhombentriakontaeder:

<http://www.kjmaclean.com/Geometry/RhombicTria.html>

[4] Catalanische Körper

http://de.wikipedia.org/wiki/Catalanischer_Körper

[5] Udo Hebisch: *Rhombenkörper bzw. Rhombenisoe-der*;

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/rhombenkoerper.html>

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/Rhombenisoe-der/Rhombenisoe-der.html>

[6] Georg Glaeser: *Wie aus der Zahl ein Zebra wird – ein mathematisches Fotoshooting*. Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg 2010.

[7] Bruno Taut, *Glas Pavillon*:

http://en.wikipedia.org/wiki/Glass_Pavilion

[8] Steven Dutch „Polar Zonohedra“: <http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/zonohedra.HTM>

[9] Walter Wunderlich: *Drehsymmetrische Gleichgewichtsformen von Rhomben- und Sechsecknetzen*. Z. Angew. Math. Mech. 53 (1973), 593–600. Eingesannt zu zu finden auf

<http://www1.uni-ak.ac.at/geom/dld/wunderlich>

[10] Eric Gjerde: „Origami Waterbomb tessellation“

<http://www.youtube.com/watch?v=VXIVHjws15U>

[11] Laszlo Vörös: *Two- and Three-dimensional Tilings Based on a Model of the Six-dimensional Cube*

hrcak.srce.hr/file/13226

[12] Franz Gruber, Georg Glaeser: *Linksammlung zu Rhombengittern*

<http://www1.uni-ak.ac.at/geom/dld/rhombgrids.html>