

Die Linienelemente des \mathbb{P}^3

B. Odehnal

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Abbildung der Linienelemente des \mathbb{P}^3 auf die Punkte einer fünfdimensionalen rationalen Fläche M^5 , die in den \mathbb{P}^9 eingebettet ist. Ferner wird der Zusammenhang der Segre Varietät $S_{3,5}$ und der Mannigfaltigkeit M^5 untersucht. Auf der Modellfläche erscheinen einfache Linienelementmannigfaltigkeiten als projektive Unterräume wieder. Das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie gestattet die Übertragung der Ergebnisse über Linienelemente auf ihre dualen Gegenstücke.

Keywords: Linienelement, Segre-Varietät, Grassmann-Varietät, Punktmodell, algebraische Fläche, rationale Fläche, Linienelementmannigfaltigkeit.

Subject Classification (AMS 2000): 51A25, 51A45.

1 Einleitung

Die k -dimensionalen projektiven Unterräume eines n -dimensionalen projektiven Raumes \mathbb{P}^n können bijektiv auf die Punkte einer algebraischen Varietät $G_{n,k}$ abgebildet werden [5, 6]. Die Varietät $G_{n,k}$ heißt GRASSMANN-Varietät und spannt einen projektiven Raum \mathbb{P}^m von $m = \binom{n+1}{k+1} - 1$ Dimensionen auf. Die in ihr enthaltenen projektiven Unterräume entsprechen den linearen Mannigfaltigkeiten k -dimensionaler projektiver Unterräume. Die projektiven Kollineationen des \mathbb{P}^n induzieren im Raum \mathbb{P}^m projektive Kollineationen, die $G_{n,k}$ als Ganzes, aber nicht punktweise festhalten.

Naheliegender scheint nun die Verallgemeinerung der Geometrie k -dimensionaler Unterräume des \mathbb{P}^n dahingehend, daß man etwa ein Punktmodell der Menge aller geordneten s -Tupel $(\mathbb{P}_1^{k_1}, \dots, \mathbb{P}_s^{k_s})$ k_i -dimensionaler projektiver Unterräume $\mathbb{P}_i^{k_i}$ des \mathbb{P}^n konstruieren möchte. Dies führt zu den sogenannten

SEGRE-Varietäten S_{k_1, \dots, k_s} , die in einem $(k_1 + 1) \cdot \dots \cdot (k_s + 1) - 1$ -dimensionalen projektiven Raum enthalten sind. Die Reihenfolge der Parameterräume $\mathbb{P}_i^{k_i}$ ist willkürlich, siehe [5]. Nehmen wir nun an, es gelte $\dim \mathbb{P}_1^{k_1} = k_1 < \dots < k_s = \dim \mathbb{P}_s^{k_s}$, so bilden $\mathbb{P}_i^{k_i}$ eine aufsteigende Kette $\mathbb{P}_1^{k_1} \subset \dots \subset \mathbb{P}_s^{k_s}$ von Unterräumen des \mathbb{P}^n und man nennt ein solches s -Tupel *verallgemeinertes Raumelement* oder *Flagge*. Insbesondere spricht man von einer *vollständigen Flagge*, wenn alle natürlichen Zahlen aus der Menge $\{0, \dots, n - 1\}$ als Dimensionszahlen auftreten.

Die Geometrie der verallgemeinerten Raumelemente sowie ihr Zusammenhang mit der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen war bereits Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, siehe hierzu etwa [1, 2, 3, 4, 7].

Da sich in letzter Zeit Anwendungen für Geometrien dieser Art, insbesondere für die Geometrie der Linienelemente des euklidischen Dreiraumes, etwa in der Flächenerkennung und -rekonstruktion fanden [8], war die Geometrie der Linienelemente des euklidischen \mathbb{R}^3 Gegenstand neuerer Untersuchungen [10]. Auch die Geometrie der Flaggen des euklidischen Dreiraumes wurde erst kürzlich beleuchtet und in Verbindung zur Kinematik euklidischer und nicht euklidischer Räume gebracht [9].

Im folgenden soll ein Punktmodell für die Menge der Linienelemente des projektiven Raumes \mathbb{P}^3 über einem beliebigen kommutativen Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0 konstruiert werden, das im Gegensatz zur Segre-Varietät $S_{3,5}$ in einen neundimensionalen projektiven Raum eingebettet ist. Dazu werden zunächst in Abschnitt 2 grundlegende Tatsachen aus der analytischen und der projektiven Geometrie, sowie der Liniengeometrie aufbereitet. Im darauffolgenden Abschnitt 3 werden Koordinaten für Linienelemente des \mathbb{P}^3 erklärt. Linienelemente des \mathbb{P}^3 werden auf Punkte einer fünfdimensionalen Fläche $M^5 \subset \mathbb{P}^9$ abgebildet. Diese gestattet rationale Parametrisierungen und ist vom Grad 5. Anschließend werden in Abschnitt 4 die Bilder einfacher Linienelementmannigfaltigkeiten bestimmt. Es sind diese im wesentlichen Geraden oder Ebenen, von denen jedoch bestimmte Punkte auszunehmen sind. Das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie gestattet in Abschnitt 5, die Ergebnisse der Untersuchungen über die Linienelemente auf ihre dualen Gegenstücke, die Paare bestehend aus einer Ebene und einer in ihr enthaltenen Geraden, zu übertragen. Das dabei entstehende Punktmodell unterscheidet sich von ersterem weder in den geometrischen noch in den algebraischen Eigenschaften.

2 Linienelemente des \mathbb{P}^3

2.1 Grundlagen, Koordinaten für Punkte, Geraden und Ebenen

Um unserem Ziel, der Koordinatisierung der Linienelemente des \mathbb{P}^3 näherzukommen, beschreiben wir Punkte X des durch projektiven Abschluß erzeugten \mathbb{P}^3 durch ihre homogenen Koordinaten $X = (x, x_0)\mathbb{K} = (x_1, x_2, x_3; x_0)\mathbb{K}$, wobei \mathbb{K} ein beliebiger kommutativer Körper der Charakteristik 0 sein soll. Die vierte, homogenisierende Koordinate wird in dieser Arbeit absichtlich an die letzte Stelle gesetzt. Dies vereinfacht später die Notation.

Die Ebenen des \mathbb{P}^3 bilden gleichfalls einen projektiven Dreiraum, den wir mit \mathbb{P}^{3*} bezeichnen und Dualraum nennen wollen. Eine Ebene E werde durch ihren homogenen Koordinatenvektor $E = (e, e_0)\mathbb{K} = (e_1, e_2, e_3; e_0)\mathbb{K}$ beschrieben.

Einer Geraden G des \mathbb{P}^3 , die Verbindung zweier Punkte X und Y ist, ordnen wir homogene Plücker-Koordinaten $(g_1, g_2, g_3; g_4, g_5, g_6)\mathbb{K}$ zu, wie dies etwa in [11, 13] beschrieben ist. Wir fassen die Koordinaten der Punkte X und Y in der Matrix

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

zusammen und berechnen der Reihe nach die Determinanten der Untermatrizen mit den Spaltenindizes $[(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 3), (3, 1), (1, 2)]$.

Die Plücker-Koordinaten einer Geraden G sind zum einen unabhängig von der Wahl der Punkte $X \in G$ und $Y \in G$ und zum anderen homogen. Letzteres ermöglicht die Interpretation dieser Sextupel als homogene Koordinaten von Punkten eines fünfdimensionalen projektiven Raumes \mathbb{P}^5 .

Die Abbildung $\gamma : G \rightarrow (g_1, \dots, g_6)\mathbb{K}$ heißt Kleinsche Abbildung. Sie ist nicht surjektiv. Faßt man die Koordinaten von G zu Vektoren $g = (g_1, g_2, g_3)$ und $\bar{g} = (g_4, g_5, g_6)$ zusammen, dann überzeugt man sich leicht, daß

$$\langle g, \bar{g} \rangle = g_1g_4 + g_2g_5 + g_3g_6 = 0 \quad (2)$$

gilt. Hier und im folgenden soll $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ gelten. In Gleichung (2) ist 0 als $0_{\mathbb{K}}$ zu lesen. Im folgenden wird der besseren Lesbarkeit wegen auf den verzierenden Index \mathbb{K} verzichtet. Auch der Nullvektor des \mathbb{K}^n wird nur als 0 geschrieben.

Offensichtlich werden von γ nur jene Punkte des \mathbb{P}^5 getroffen, die auf der durch (2) beschriebenen Quadrik M_2^4 liegen. Diese Quadrik ist die Graßmann-Mannigfaltigkeit $G_{3,1}$ [5] und wird gelegentlich auch Plücker- oder Klein-Quadrik genannt. Umgekehrt ist jedes nichttriviale Sextupel $(g_1, \dots, g_6) \in \mathbb{K}^6$, das (2) erfüllt, ein Koordinatenvektor genau einer Geraden G des \mathbb{P}^3 .

2.2 Die Segre-Varietät $S_{3,5}$ und Linienelemente in \mathbb{P}^3

Wir benötigen folgenden Begriff:

Definition 2.1.

Ein Linienelement ist ein Paar (P, G) , bestehend aus einem Punkt P und einer Geraden G mit $P \in G$.

Um zunächst die Gesamtheit aller Paare, bestehend aus Punkt und Gerade des \mathbb{P}^3 zu beschreiben, folgen wir [5]. Wir identifizieren die Punkte des \mathbb{P}^3 beziehungsweise des \mathbb{P}^5 mit den eindimensionalen Unterräumen des \mathbb{K}^4 beziehungsweise \mathbb{K}^6 und bilden das Tensorprodukt $\mathbb{K}^4 \otimes \mathbb{K}^6 =: V$.

Sind $(p_1, p_2, p_3; p_0)$ Koordinaten in \mathbb{K}^4 und sind (g_1, \dots, g_6) Koordinaten in \mathbb{K}^6 , dann erklären wir

$$w_{ij} := p_i g_j, \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (3)$$

als Koordinaten in V . Man sieht sofort, daß $\dim V = 24$ gilt. Da nun sowohl die Punkt- als auch die Geradenkoordinaten homogen sind, sind auch die Koordinaten w_{ij} homogen. Sie können folglich als homogene Punktkoordinaten in einem projektiven Raum \mathbb{P}^{23} gedeutet werden.

Wohl gibt es zu allen Paaren (P, G) gemäß Konstruktion einen entsprechenden Punkt in \mathbb{P}^{23} , die Umkehrung aber gilt nicht. Bei der Tensorproduktbildung wurden alle Vektoren des \mathbb{K}^6 verwendet, auch jene, die nicht zu Punkten von M_2^4 zeigen. Diese Punkte entsprechen den Gewinden, siehe [11], womit in V auch die Paare bestehend aus Punkten und Gewinden enthalten sind. Um diese auszuschließen, sind den Koordinaten w_{ij} die aus (2) folgenden Bedingungen

$$w_{i_1 1} w_{j_1 4} + w_{i_2 2} w_{j_2 5} + w_{i_3 3} w_{j_3 6} = 0, \quad (4)$$

aufzuerlegen. Dabei sind die Indizes i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 und j_3 so mit Werten aus $\{1, 2, 3\}$ zu belegen, daß nach Einsetzen der Definitionsgleichungen (3) der Koordinaten w_{ij} in (4), sich stets der Faktor $p_i p_j$ oder eben (2) abspaltet.

Es gibt, wie man nach kürzer Überlegung feststellen kann, 128 Gleichungen vom Typ (4), die aber nicht völlig unabhängig sind.

Die siebendimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{P}^{23} , die durch (4) beschrieben wird, heißt Segre-Mannigfaltigkeit $S_{3,5}$. Sie ist ein Punktmodell für die Paare von Punkten und Geraden des \mathbb{P}^3 .

Die Mannigfaltigkeit \mathcal{L} der Linienelemente ist eine fünfdimensionale Teilmannigfaltigkeit der $S_{3,5}$, da ihr nur jene Paare (P, G) von Punkten und Geraden angehören, für die $P \in G$ gilt. Mit Hilfe der Inzidenzbedingungen für Punkte und Geraden gelingt es, diese Mannigfaltigkeit einzugrenzen. Ist $P = (p, p_0)\mathbb{K}$ ein Punkt auf $G = (g, \bar{g})\mathbb{K}$ so gilt (wie etwa in [11] nachzulesen ist)

$$\langle p, \bar{g} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad -p_0 \bar{g} + p \times g = 0, \quad (5)$$

wobei $p \times g$ das Kreuzprodukt der Vektoren p und g bezeichnet. Die vier linearen Gleichungen (5) können mit (3) in der Form

$$\begin{aligned} w_{14} + w_{25} + w_{36} &= 0, \\ -w_{04} + w_{23} - w_{32} &= 0, \\ -w_{05} + w_{31} - w_{13} &= 0, \\ -w_{06} + w_{12} - w_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

angeschrieben werden. Es gilt daher:

Satz 2.1.

Die Mannigfaltigkeit \mathcal{L} der Linienelemente des \mathbb{P}^3 ist im Schnitt der Segre-Varietät $S_{3,5}$ mit einem \mathbb{P}^{19} enthalten.

Beweis. Die Gleichungen (6) beschreiben jede für sich eine Hyperebene des \mathbb{P}^{23} . Der Durchschnitt dieser vier Hyperebenen ist ein \mathbb{P}^{19} , wie man leicht nachrechnet. \square

Es ist bekannt, daß eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M mit höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten stets in einen \mathbb{R}^{2n} eingebettet werden kann, siehe [14].

Wir wollen im nächsten Abschnitt zeigen, daß es möglich ist, die Linienelementenmannigfaltigkeit \mathcal{L} in einen projektiven Raum \mathbb{P}^9 von neun Dimensionen so einzubetten, daß in ihr enthaltene projektive Unterräume, die linearen Mannigfaltigkeiten von Linienelementen entsprechen, weitestgehend erhalten bleiben. Darüber hinaus wird es mit der hier gezeigten Koordinatisierung der Linienelementenmannigfaltigkeit möglich sein, Paare von Linienelementen zu kennzeichnen.

Das dabei entstehende Punktmodell wird nicht wie im obigen Falle durch Tensorproduktbildung der beteiligten Vektorräume sondern durch Summenbildung erzeugt: Wir betten $\mathbb{K}^6 \setminus 0 \cong \mathbb{P}^5$ in \mathbb{K}^{10} als Unterraum $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0$ ein. $\mathbb{K}^4 \setminus 0 \cong \mathbb{P}^3$ betten wir in den Komplementärraum $x_1 = \dots = x_6 = 0$ ein. Folglich gilt $\mathbb{K}^6 \oplus \mathbb{K}^4 = \mathbb{K}^{10}$ oder eben $\mathbb{P}^5 \vee \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^9$.

3 Ein anderes Modell

Es seien $(g, \bar{g})\mathbb{K}$ homogene Plücker-Koordinaten einer Geraden G in \mathbb{P}^3 und ferner $(\hat{g}, g_0)\mathbb{K}$ homogene Koordinaten eines Punktes P in \mathbb{P}^3 . P liegt genau dann auf G , wenn

$$\langle \hat{g}, \bar{g} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad -g_0\bar{g} + \hat{g} \times g = 0 \quad (7)$$

gilt. Wir erklären nun Koordinaten für Linielemente des \mathbb{P}^3 auf folgende Weise:

Definition 3.1.

Der Vektor $(g, \bar{g}, \hat{g}, g_0) \in \mathbb{K}^{10}$ ist Koordinatenvektor eines Linielements (P, G) des \mathbb{P}^3 , wobei $(g, \bar{g})\mathbb{K}$ homogene Plücker-Koordinaten der Geraden $G \subset \mathbb{P}^3$ und $(\hat{g}, g_0)\mathbb{K} \in \mathbb{P}^3$ homogene Koordinaten des Punktes P sind und Gleichungen (2) und (7) gelten. Auszuschließen sind jene Vektoren, für die $g = \bar{g} = 0$ oder $\hat{g} = 0$ und $g_0 = 0$ gilt.

Bemerkung 3.1. Die Punkte des vierdimensionalen Unterraumes $g = \bar{g} = 0 \subset \mathbb{K}^{10}$ und die Punkte des sechsdimensionalen Unterraumes $\hat{g} = 0, g_0 = 0$ entsprechen keinem Linielement, da $g = \bar{g} = 0$ keine Gerade und $\hat{g} = 0, g_0$ keinen Punkt beschreiben.

Da die Koordinaten der Punkte und der Geraden homogen sind, sind nach Konstruktion auch die Koordinaten der Linielemente homogen. Sie können daher als Punktkoordinaten in einem \mathbb{P}^9 interpretiert werden. Wir bezeichnen mit B_1, \dots, B_9 und B_0 die zehn Basispunkte. Sie entsprechen im analytischen Modell den kanonischen Basisvektoren des \mathbb{K}^{10} .

Bemerkung 3.2. Die in Bemerkung 3.1 genannten Unterräume des Vektorraumes \mathbb{K}^{10} bestimmen komplementäre projektive Unterräume \mathbb{A}^3 und \mathbb{A}^5 des \mathbb{P}^9 .

Bemerkung 3.3. Die in Definition 3.1 erklärten Koordinaten für Linielemente des \mathbb{P}^3 sind auf merkwürdige Weise homogen: Zum einen verändert das Multiplizieren des Vektors $(g, \bar{g}, \hat{g}, g_0)$ mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ nichts

am geometrischen Objekt. Zum anderen kann man die beiden Bestandteile $(g_0, \widehat{g})\mathbb{K}$ und $(g, \overline{g})\mathbb{K}$ mit unterschiedlichen Faktoren $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0, 0\}$ multiplizieren, und erhält mit $(\lambda g, \lambda \overline{g}, \mu \widehat{g}, \mu g_0)$ wieder Koordinaten, die dasselbe geometrische Objekt beschreiben. Die Inzidenzbedingungen (7) und die Bedingung (2) an die Plücker-Koordinaten von G bleiben erfüllt.

Die Abbildung $(P, G) \mapsto (g, \overline{g}, \widehat{g}, g_0)\mathbb{K}$ der Linienelemente des \mathbb{P}^3 auf die Punkte des \mathbb{P}^9 ist nicht surjektiv. Die Mannigfaltigkeit M^5 der Linienelemente ist durch die Gleichungen (2) und (7) mit den in Definition 3.1 genannten Ausnahmen beschrieben. Wir können folgendes Resultat beweisen:

Satz 3.1.

Die Linienelemente des \mathbb{P}^3 können auf Punkte einer fünfdimensionalen algebraischen Fläche M^5 abgebildet werden. Die Fläche M^5 ist im Durchschnitt der durch die Gleichungen (2) und (7) beschriebenen Mannigfaltigkeit enthalten, ist vom Grad 5 und gestattet eine rationale Parametrisierung.

Beweis. Die Dimension von M^5 ist leicht zu klären: Vier Freiheitsgrade besitzt die Geradenkomponente G des Linienelements, ein weiterer steht für den Punkt P auf G zur Verfügung.

Wir konstruieren nun eine rationale Parametrisierung: Es sei zunächst $g = (2x_1, 2x_2, 1 - x_1^2 - x_2^2)N^{-1}$ mit $N = 1 + x_1^2 + x_2^2$. Nun gilt neben $\langle g, g \rangle = 1$ auch $\|g_{,1}\| = \|g_{,2}\| = 2N^{-1}$ und $\langle g_{,1}, g_{,2} \rangle = 0$, wobei vereinfachend $_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ steht. Wir verwenden abkürzend $c_3 = (1 - x_3^2)(1 + x_3^2)^{-1}$ und $s_3 = 2x_3(1 + x_3^2)^{-1}$. Den Momentenvektor von G können wir damit durch

$$\overline{g} = x_4 \left(\frac{c_3}{\|g_{,1}\|} g_{,1} + \frac{s_3}{\|g_{,2}\|} g_{,2} \right)$$

angeben. Für die Punktkomponente (\widehat{g}, g_0) setzen wir zunächst $g_0 = 1$ und erhalten

$$\widehat{g} = g \times \overline{g} + \gamma g = x_4 \left(\frac{c_3}{\|g_{,2}\|} g_{,2} - \frac{s_3}{\|g_{,1}\|} g_{,1} \right) + x_5 g.$$

Wir führen mit $x_i = u_i u_0^{-1}$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) homogene Parameter ein und erhalten nach anschließender Erweiterung mit dem gemeinsamen Nenner $u_0(u_0^2 + u_3^2)(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)$ die rationale Parametrisierung $\mathcal{M} : \mathbb{P}(\mathbb{K}^6) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^{10})$

als

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4 : u_5) = & \\
(2u_0^2u_1(u_0^2 + u_3^2), 2u_0^2u_2(u_0^2 + u_3^2), u_0(u_0^2 + u_3^2)(u_0^2 - u_1^2 - u_2^2); & \\
u_4(u_0^2 - u_3^2)(u_0^2 - u_1^2 + u_2^2) - 4u_0u_1u_2u_3u_4, & \\
-2u_1u_2u_4(u_0^2 - u_3^2) + 2u_0u_3u_4(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2), & \\
-2u_0u_1u_4(u_0^2 - u_3^2) - 4u_0^2u_2u_3u_4; & \tag{8} \\
-2u_1u_2u_4(u_0^2 - u_3^2) - 2u_0u_3u_4(u_0^2 - u_1^2 + u_2^2) + 2u_0u_1u_5(u_0^2 + u_3^2), & \\
u_4(u_0^2 - u_3^2)(u_0^2 + u_1^2 - u_2^2) + 4u_0u_1u_2u_3u_4 + 2u_0u_2u_5(u_0^2 + u_3^2), & \\
-2u_0u_2u_4(u_0^2 - u_3^2) + 4u_0^2u_1u_3u_4 + u_5(u_0^2 + u_3^2)(u_0^2 - u_1^2 - u_2^2); & \\
u_0(u_0^2 + u_3^2)(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)\mathbb{K}. &
\end{aligned}$$

Der algebraische Grad von M^5 wird ausgehend von den fünf quadratischen Formen (2) und (7) mit Hilfe des Hilbert-Polynoms [12] bestimmt. (Computeralgebrasysteme, wie zum Beispiel Maple, stellen Algorithmen zur Berechnung des HILBERT-Polynoms zur Verfügung.) Wir erhalten

$$p(t) = \frac{1}{144}t^6 + \frac{5}{48}t^5 + \frac{91}{144}t^4 + \frac{95}{48}t^3 + \frac{121}{36}t^2 + \frac{35}{12}t + 1. \tag{9}$$

Ist nun $p(t) = c_n t^n + o(t^n)$ das HILBERT-Polynom einer algebraischen Varietät V , dann gilt $\deg V = n!c_n$, was also im gegenständlichen Fall zu $\deg M^5 = 5$ führt.

Daß die Vorgabe eines Vektors $(g, \bar{g}, \hat{g}, g_0) \in \mathbb{K}^{10}$, der sowohl (2) als auch (7) erfüllt, zwingend zu einem Linienelement führt, ist sofort einzusehen: $(g, \bar{g})\mathbb{K}$ gehören in diesem Fall wegen (2) zu genau einer Geraden des \mathbb{P}^3 und $(g_0, \hat{g})\mathbb{K}$ beschreibt genau einen Punkt des \mathbb{P}^3 , sofern $(g, \bar{g})\mathbb{K} \neq (0, 0)$ und $(g_0, \hat{g})\mathbb{K} \neq (0, 0)$ gilt. Die Gleichungen (7) garantieren $P \in G$.

Punkte, die in \mathbb{A}^5 beziehungsweise in \mathbb{A}^3 liegen, sind natürlich auszunehmen. Erstere gehören einer zur Plücker-Quadrik kollinearen Quadrik an, letztere füllen den ganzen \mathbb{A}^3 , der M^5 zur Gänze angehört. Er ist der Spitzenraum eines quadratischen Kegels durch M^5 (siehe weiter unten). \square

Die angegebene rationale Darstellung ist naturgemäß nicht die einzige. Jede rationale isotherme Parametrisierung der euklidischen Einheitskugel kann auf die gezeigte Weise zur Konstruktion einer rationalen Parametrisierung von M^5 verwendet werden.

Bemerkung 3.4. Die Fläche M^5 liegt im Durchschnitt von fünf quadratischen Kegeln. Der algebraische Grad müßte nach dem Satz von Bezout $2^5 = 32$ sein.

Bezeichnet man die quadratischen Kegel die durch die Gleichungen (2) und (7) beschrieben werden der Reihe nach mit $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$, dann sind ihre dreidimensionalen Spitzenräume $S_1 = [B_0, B_7, B_8, B_9]$, $S_2 = [B_0, B_1, B_2, B_3]$, $S_3 = [B_1, B_5, B_6, B_7]$, $S_4 = [B_2, B_4, B_6, B_8]$ und $S_5 = [B_3, B_4, B_5, B_9]$, wobei $[B_{i_1}, \dots, B_{i_k}]$ den von den Punkten B_{i_1}, \dots, B_{i_k} aufgespannten projektiven Unterraum von \mathbb{P}^9 bezeichnet.

Je zwei verschiedene Spitzenräume S_i und S_j haben genau einen Punkt gemeinsam. Abbildung 1 ist als Inzidenztabelle zu sehen, die die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Spitzenräume der Kegel Γ_i darstellt. Es handelt sich dabei um einen Zentralriß aus dem \mathbb{P}^9 in den \mathbb{P}^2 .

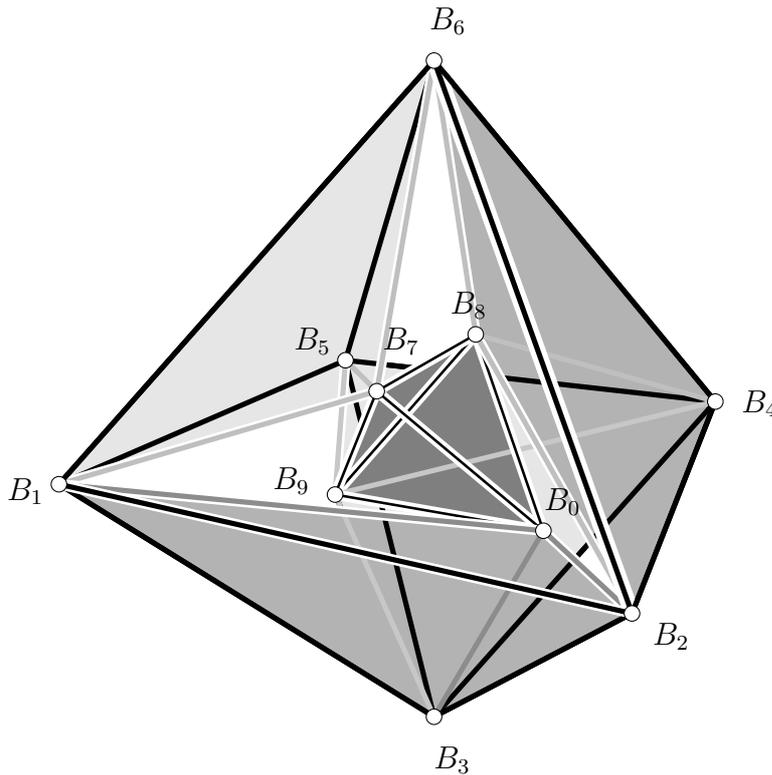


Abbildung 1: Die Anordnung der Spitzenräume der quadratischen Kegel Γ_i : Die Ebenen $[B_1, B_2, B_3]$, $[B_2, B_4, B_6]$, $[B_3, B_4, B_5]$ und $[B_1, B_5, B_6]$ liegen in A^5 . Der Spitzenraum $S_1 = [B_7, B_8, B_9, B_0]$ ist identisch mit A^3 .

3.1 M^5 als projektives Bild der $S_{3,5}$

Wir zeigen nun, welcher Zusammenhang zwischen M^5 und $S_{3,5}$ besteht:

Satz 3.2.

Es gibt mindestens eine Projektion (singuläre Kollineation) $\mathbb{P}^{23} \rightarrow \mathbb{P}^9$, die das in der Segre-Mannigfaltigkeit enthaltene Modell der Linienelemente des \mathbb{P}^3 in das in Abschnitt 3 beschriebene Modell überführt.

Beweis. Die Projektion $\pi : \mathbb{P}^{23} \rightarrow \mathbb{P}^9$ sei durch ihre Abbildungsgleichungen

$$\pi(w_{01}, \dots, w_{36})\mathbb{K} \mapsto (w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{04}, w_{05}, w_{06}; w_{11}, w_{21}, w_{31}; w_{01})\mathbb{K} \quad (10)$$

gegeben. Die linke Seite von (10) wird nun mit (3) vereinfacht und es ergibt sich für den Bildpunkt

$$\begin{aligned} (w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{04}, w_{05}, w_{06}; w_{11}, w_{21}, w_{31}; w_{01})\mathbb{K} &= \\ (p_0g_1, p_0g_2, p_0g_3, p_0g_4, p_0g_5, p_0g_6; g_1p_1, g_1p_2, g_1p_3; g_1p_0)\mathbb{K} &= \\ (p_0g, p_0\bar{g}; g_1\hat{g}, g_1p_0)\mathbb{K} &= (g, \bar{g}, \hat{g}, g_0)\mathbb{K}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt von der eigenartigen Homogenität der in Definition 3.1 erklärten Koordinaten für Linienelemente Gebrauch gemacht wurde. Die Projektion ist keineswegs die einzige Abbildung $S_{3,5} \rightarrow M^5$. \square

3.2 Die projektiven Transformationen des \mathbb{P}^3

Die projektiven Kollineationen des \mathbb{P}^3 induzieren projektive Kollineationen des Modellraumes. Eine Kollineation $\kappa : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ transformiert Punkte X gemäß

$$X'\mathbb{K} = TX\mathbb{K}, \quad (11)$$

wobei $T \in GL(\mathbb{K}^4)$ gilt. Wir wollen hier nur reguläre Kollineationen betrachten. Für die von der Gruppe $PGL(\mathbb{P}^3)$ induzierten Kollineationen des Modellraumes gilt nun:

Lemma 3.1.

Die projektiven Kollineation des \mathbb{P}^3 aus (11) induzieren automorphe Kollineationen der Mannigfaltigkeit M^5 . Dabei gilt für die Transformation der

Linienelementkoordinaten

$$\begin{bmatrix} g' \\ \bar{g}' \\ \hat{g}' \\ \gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \wedge T & 0 \\ 0^T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \bar{g} \\ \hat{g} \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad (12)$$

wobei $T \wedge T$ die Matrix der durch κ im Kleinschen Bildraum induzierten Kollineation ist und 0 die Nullmatrix aus $\mathbb{K}^{6 \times 4}$ bezeichnet.

Beweis. Das Bild des Punktes $P = (\hat{g}, g_0)\mathbb{K}$ unter der durch (11) beschriebenen Kollineation des \mathbb{P}^3 ist der Punkt $TP\mathbb{K}$. Die von (11) induzierte automorphe Kollineation der Plücker-Quadrik ist durch $G' = T \wedge TG$ gegeben. Die Blockmatrixschreibweise liefert (12). \square

4 Lineare Mannigfaltigkeiten von Linienelementen und ihre Bilder

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Mannigfaltigkeiten von Linienelementen und deren Bilder auf der Fläche M^5 . Wir beschränken uns darauf, die Bilder konkreter Linienelementmengen zu untersuchen, da diese durch projektive Kollineationen des \mathbb{P}^3 in jede andere Linienelementmenge gleichen Typs übergeführt werden können.

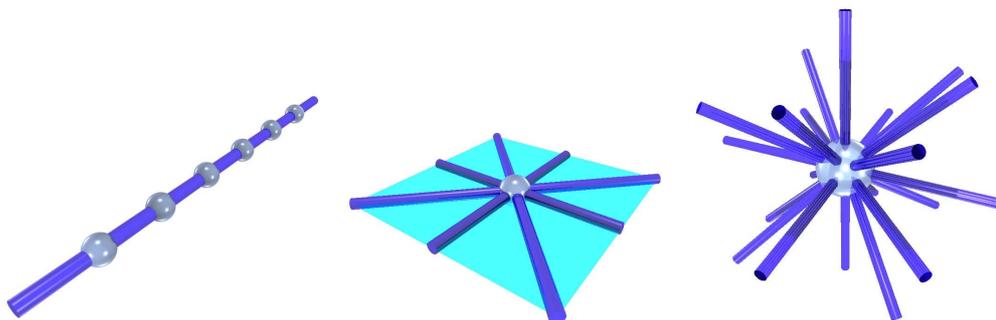


Abbildung 2: Einfache Linienelementmannigfaltigkeiten: 1. Punktreihe, 2. Geradenbüschel, 3. Geradenbündel.

4.1 Punktreihe

Die Punktreihe ist eine 1-parametrische Mannigfaltigkeit von Linienelementen, deren Punkte auf einer festen Geraden G variieren.

Es sei $G = (1, 0, 0; 0, 0, 0)\mathbb{K}$ und ferner $P = (t_1/t_0, 0, 0; 1)\mathbb{K}$. Dann sind alle Linienelemente der Punktreihe durch $B(t_0, t_1) = (t_0, 0, 0; 0, 0, 0; t_1, 0, 0; t_0)\mathbb{K}$ beschrieben. Offensichtlich handelt es sich hierbei um eine Gerade in M^5 . Von dieser ist der zu $t_0 = 0$ gehörende Schnittpunkt B_7 mit \mathbb{A}^3 auszunehmen. Zu \mathbb{A}^5 liegt diese Gerade windschief.

4.2 Geradenbüschel

Das Geradenbüschel ist ebenfalls eine 1-parametrische Mannigfaltigkeit von Linienelementen. Die Punktkomponente P ist fix. Die durch P gehenden Geraden variieren innerhalb einer festen Ebene durch P .

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit, können wir annehmen, daß $P = (0, 0, 0; 1)\mathbb{K}$ gilt und $E = (0, 0, 1; 0)\mathbb{K}$ die Ebene ist. Die Geraden des Büschels seien durch $G = (1, t_1/t_0, 0; 0, 0, 0)\mathbb{K}$ gegeben und wir haben dann insgesamt $B(t_0, t_1) = (t_0, t_1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; t_0)\mathbb{K}$. Auch hierbei handelt es sich um eine Gerade in M^5 . Der Schnittpunkt mit \mathbb{A}^5 ist B_2 , er entspricht keinem Linienelement. Mit \mathbb{A}^3 existiert kein Schnittpunkt.

4.3 Geradenbündel

Das Geradenbündel ist eine 2-parametrische Mannigfaltigkeit von Linienelementen, die die Punktkomponente P teilen. Die Geraden durchlaufen das Bündel um P .

Wir nehmen daher $P = (0, 0, 0; 1)\mathbb{K}$ als Punktkomponente an. Für die Geraden haben wir dann $G = (1, t_1/t_0, t_2/t_0; 0, 0, 0)\mathbb{K}$ und damit für das Bündel die Bildmenge $B(t_0, t_1, t_2) = (t_0, t_1, t_2; 0, 0, 0; 0, 0, 0; t_0)\mathbb{K}$ in M^5 . Von dieser Ebene des \mathbb{P}^9 ist die Gerade $[B_1, B_2] \subset \mathbb{A}^5$, die $t_0 = 0$ entspricht, auszuschließen. Sie trägt keine Punkte, die Linienelementen des \mathbb{P}^3 entsprechen. Ferner gilt $\mathbb{A}^3 \cap B(t_0, t_1, t_2) = \emptyset$.

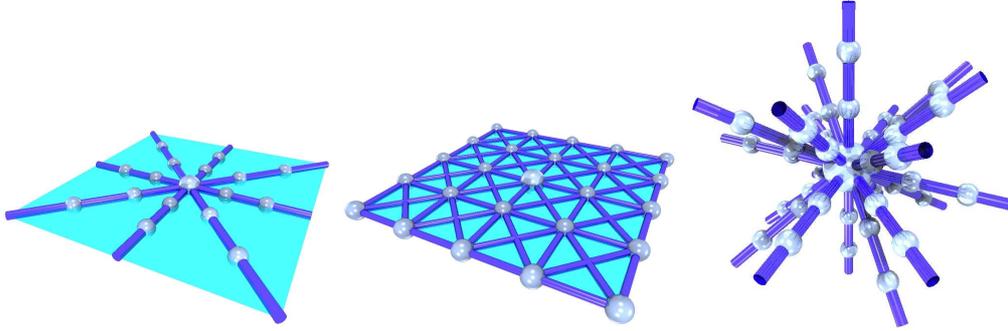


Abbildung 3: Einfache Linienelementmannigfaltigkeiten: 4. Linienelementenbündel, 5. Linienelementenfeld, 6. Linienelementenbündel.

4.4 Linienelementenbündel

Das Linienelementenbündel besteht aus allen Linienelementen, deren Geraden einem Bündel angehören. Es handelt sich dabei offenbar um eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit von Linienelementen.

Mit $P = (t_1/t_0, t_2/t_0, 0; 1)\mathbb{K}$ und $G = (t_1/t_0, t_2/t_0, 0; 0, 0, 0)\mathbb{K}$ erhält man $B(t_0, t_1, t_2) = (t_1, t_2, 0; 0, 0, 0; t_1, t_2, 0; t_0)\mathbb{K}$ als Beschreibung dieser Linienelementenfamilie. Es ist dies eine Ebene in M^5 . Sie schneidet \mathbb{A}^3 gar nicht und \mathbb{A}^5 im Punkt B_0 .

4.5 Linienelementenfeld

Das Linienelementenfeld besteht aus allen Linienelementen, die in einer Ebene E liegen. Es handelt sich dabei um eine 3-parametrische Mannigfaltigkeit von Linienelementen.

Es sei also $E = (0, 0, 1; 0)\mathbb{K}$. Die Punkte sind durch $P = (t_1/t_0, t_2/t_0, 0; 1)\mathbb{K}$ und die Geraden folglich durch $G = (t_0^2, t_3 t_0, 0; 0, 0, t_1 t_3 - t_2 t_0)\mathbb{K}$, womit sich für das Feld $B(t_0, t_1, t_2, t_3) = (t_0^2, t_0 t_3, 0; 0, 0, t_1 t_3 - t_0 t_2; t_0 t_1, t_0 t_2, 0; t_0^2)\mathbb{K}$ ergibt. Es handelt sich hierbei um eine ringartige Quadrik in M^5 . Ihre Erzeugenden entsprechen den Punktreihen und Geradenbündel, die im Linienelementenfeld enthalten sind. Von dieser ist einzig der Punkt $B_6 \in \mathbb{A}^5$ auszunehmen.

4.6 Linielementenbündel

Das Linielementenbündel ist die Menge aller Linielemente, deren Geraden einem Bündel angehören. Die Punktcomponenten durchlaufen alle Geraden des Bündels. Es handelt sich hierbei um eine 3-parametrische Mannigfaltigkeit von Linielementen.

Auch hier genügt es, ein spezielles Geradenbündel zu betrachten: Wir wählen das Geradenbündel um den Punkt $B_0 = (1, 0, 0, 0)\mathbb{K} \in \mathbb{P}^3$. Dann ist $P = (t_0, t_1, t_2, t_3)\mathbb{K}$ und das Linielementenbündel ist durch $B(t_0, t_1, t_2, t_3) = (t_1, t_2, t_3; 0, 0, 0; t_1, t_2, t_3, t_0)\mathbb{K}$ beschrieben. Als Bild im Modellraum erscheint ein dreidimensionaler Unterraum des \mathbb{P}^9 vermindert um den in \mathbb{A}^3 gelegenen Punkt B_0 . Der Durchschnitt mit \mathbb{A}^5 ist leer.

Zusammenfassend gilt daher:

Satz 4.1.

Die Abbildung der Linielemente auf Punkte der $M^5 \subset \mathbb{P}^9$ bildet

1. die Punktreihe auf eine in M^5 gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^3 verminderte Gerade,
2. das Geradenbüschel auf eine in M^5 gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^5 verminderte Gerade,
3. das Geradenbündel auf eine in M^5 gelegene und um eine Gerade des \mathbb{A}^5 verminderte Ebene,
4. das Linielementenbüschel auf eine in M^5 gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^5 verminderte Ebene,
5. das Linielementenbündel auf einen in M^5 gelegenen und um einen Punkt des \mathbb{A}^5 verminderten dreidimensionalen projektiven Unterraum und
6. das Linielementenfeld auf eine in M^5 gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^5 verminderte ringartig Quadrik ab.

4.7 Kennzeichnung der Linielementpaare

Wir betrachten Paare $((P, G), (Q, H))$ von Linielementen mit den Koordinaten $(g, \bar{g}, \hat{g}, g_0)$ und $(h, \bar{h}, \hat{h}, h_0)$. Im projektiven Raum können diese Paare

hinsichtlich des Schnittverhaltens beziehungsweise der Inzidenz von Punkten und Geraden unterschieden werden. Dies kann mit Hilfe der den Linienelementen zugeordneten Koordinaten auch analytisch geschehen. Dabei sind die folgenden sechs Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die Geraden G und H sind windschief. Dies kann als der allgemeine Fall bezeichnet werden. Er besitzt keinerlei analytische Kennzeichnung.

Fall 2: Die Geraden G und H schneiden einander in einem von P und Q verschiedenen Punkt. Die Kleinschen Bilder von G und H liegen dann bezüglich der Kleinschen Quadrik M_2^4 polar und es gilt

$$\langle g, \bar{h} \rangle + \langle \bar{g}, h \rangle = 0, \quad (13)$$

womit auch das Linienelementenpaar gekennzeichnet ist.

Fall 3: Die Geraden G und H schneiden einander in Q . (Falls sie einander in P schneiden, ist durch Umbenennung der Objekte dieser Fall erreichbar.) Neben (13) gilt nun auch

$$\langle \hat{h}, g \rangle = 0 \quad \text{und} \quad -h_0g + h \times \bar{g} = 0. \quad (14)$$

Fall 4: Falls die beiden Linienelemente den Punkt teilen, also $P = Q$ gilt, dann schneiden einander auch G und H . Es gilt dann nicht nur (13), sondern auch $(\hat{g}, g_0) = \lambda(\hat{h}, h_0)$, wobei $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist.

Fall 5: Stimmen die Linienelemente in ihren Geradenkomponenten überein, ohne, daß dabei $P = Q$ gilt, dann gilt für die Koordinaten $(g, \bar{g}) = \lambda(h, \bar{h})$ mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Fall 6: Identische Linienelemente sind durch $(g, \bar{g}) = \lambda(h, \bar{h})$ und $(\hat{g}, g_0) = \mu(\hat{h}, h_0)$ mit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0, 0\}$ gekennzeichnet. Dabei müssen λ und μ keineswegs gleich sein.

5 Duale Linienelemente

Die dualen Gegenstücke der Linienelemente sind Paare (G, E) bestehend aus einer Ebene E und einer in ihr gelegenen Geraden G . Man könnte sie *Ebenelemente* nennen. Beschreiben wir nun die Ebene E durch ihre homogenen Koordinaten $(g_0, \hat{g})\mathbb{K}$ und die Gerade G durch ihre homogenen Plücker-Koordinaten $(g, \bar{g})\mathbb{K}$. G liegt genau dann in E , wenn

$$\langle \hat{g}, g \rangle = 0, \quad -g_0g + \hat{g} \times \bar{g} = 0 \quad (15)$$

gilt.

Analog zu Def. 3.1 kann man folgendes vereinbaren:

Definition 5.1.

Der Vektor $(g, \bar{g}, \hat{g}, g_0) \in \mathbb{K}^{10}$ ist der Koordinatenvektor eines Ebenenelements (G, E) , wenn $(g, \bar{g})\mathbb{K}$ die homogenen Koordinaten der Geraden G und $(g_0, \hat{g})\mathbb{K}$ die homogenen Koordinaten der Ebene E sind und die Gleichungen (2) und (15) gelten. Vektoren mit $\bar{g} = g = 0$ oder $\hat{g} = 0$ und $g_0 = 0$ sind auszuschließen.

Die Interpretation der Koordinaten der Ebenenelemente als Koordinaten von Punkten eines neundimensionalen projektiven Raumes \mathbb{P}^9 ist naheliegend.

Bemerkung 5.1. Wie schon bei den Koordinaten für die Linienelemente ist auch hier eine ganz eigenartige Homogenität zu beobachten. Die Plücker-Koordinaten von G und die Koordinaten der Ebene E können unabhängig von einander mit beliebigen Faktoren aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ multipliziert werden ohne, daß dabei das geometrische Objekt verändert wird.

Das Dualitätsprinzip offenbart uns folgenden Satz:

Satz 5.1.

Die Ebenenelemente des projektiven Dreiraumes \mathbb{P}^3 können auf die Punkte einer fünfdimensionalen algebraischen Fläche $M^{5*} \subset \mathbb{P}^9$ mit den Gleichungen (2) und (15) abgebildet werden. M^{5*} ist rational parametrisierbar und ist vom Grad 5.

Beweis. Die Ergebnisse aus Abschnitt 3 sind zu dualisieren, das heißt, wir deuten jetzt $(\hat{g}, g_0)\mathbb{K}$ als Koordinaten einer Ebene anstatt eines Punktes. Die Dimension, der algebraische Grad und die rationale Parametrisierung folgen aus Satz 3.1. \square

Analog zu 3.1 gilt:

Satz 5.2.

Es gibt eine Projektion $\pi : \mathbb{P}^{23} \rightarrow \mathbb{P}^9$, die die in der Segre-Mannigfaltigkeit $S_{3,5}$ enthaltene Ebenenelementmannigfaltigkeit auf M^{5*} abbildet.

Bemerkung 5.2. Die beiden Segre-Mannigfaltigkeiten $S_{3,5}$ und $S_{5,3}$ sind nicht wesentlich von einander verschieden, siehe hierzu etwa [5].

Beweis. Der Nachweis der Behauptung besteht im Umdeuten der Punktkoordinaten im Beweis zu Satz 3.1 in Ebenenkoordinaten. \square

Bemerkung 5.3. Auch hier gibt es zwei windschiefe Unterräume \mathbb{A}^{3^*} und \mathbb{A}^{5^*} des \mathbb{P}^9 , die keine Punkte enthalten können, welche Ebenenelementen entsprechen. Die Gleichungen sind in Bemerkung 3.1 angegeben.

Das Dualitätsprinzip gestattet uns auch die Formulierung eines zu Satz 4.1 analogen Satzes über die Ebenenelemente:

Satz 5.3.

Die Abbildung der Ebenenelemente auf Punkte der $M^{5^} \subset \mathbb{P}^9$ bildet*

1. *das Ebenenbüschel auf eine in M^{5^*} gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^{3^*} verminderte Gerade,*
2. *das Geradenbüschel auf eine in M^{5^*} gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^{5^*} verminderte Gerade,*
3. *die Ebenen durch die Geraden eines Büschels auf eine in M^{5^*} gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^{3^*} verminderte Ebene,*
4. *das Geradenfeld auf eine um eine Gerade des \mathbb{A}^{5^*} verminderte Ebene,*
5. *die Ebenen durch die Geraden eines Feldes auf einen in M^{5^*} gelegenen und um einen Punkt des \mathbb{A}^{3^*} verminderten dreidimensionalen projektiven Unterraum und*
6. *die Ebenen durch die Geraden eines Bündels auf eine in M^{5^*} gelegene und um einen Punkt des \mathbb{A}^{3^*} verminderte ringartige Quadrik ab.*

Bemerkung 5.4. Eine analytische Kennzeichnung von Paaren dualer Linienelemente kann nun analog zu Abschnitt 4.7 geschehen.

6 Abschließende Betrachtungen

Eine mögliche Anwendung der Linienelementkoordinaten könnte in der projektiven Differentialgeometrie gefunden werden. Wir fassen beispielsweise eine Raumkurve C als Menge ihrer Linienelemente auf. Ist C durch eine Parametrisierung $C(t) = (c(t), c_0(t)) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ festgelegt, dann ist an jeder Stelle $t_0 \in I$ ihre Tangenten die Verbindungsgerade des Kurvenpunktes $C(t_0)$ und des Ableitungspunktes $\dot{C}(t_0)$. Die 1-parametrische Mannigfaltigkeit der Linienelemente ist damit durch

$$\mathcal{C}(t) = (c_0 \dot{c} - \dot{c}_0 c, c \times \dot{c}, c, c_0) \mathbb{R} \quad (16)$$

beschrieben. Dabei handelt es sich um eine ganz in M^5 enthaltene Kurve. Die Abbildung der Linienelemente des \mathbb{P}^3 auf die Punkte von M^5 bildet also den *Linienelementverband* einer Kurve auf eine *Kurve in M^5* ab. Für ebene Kurven ist die Bildkurve auf M^5 nach Satz 4.1 in einer dem Linienelementenfeld der Ebene entsprechenden Quadrik enthalten.

Kurven auf Regelflächen können gemeinsam mit den Erzeugenden der Regelfläche zu *Linienelementenstreifen* zusammengefaßt werden. Das ist auch mit einem Vektorfeld längs einer Kurve möglich. Nach Satz 4.1 spannen die Bildkurven solcher *Streifen auf einem Zylinder oder Kegel* höchstens einen *dreidimensionalen projektiven Unterraum, der zur Gänze in M^5 liegt*, auf.

Ist eine Regelfläche \mathcal{R} des projektiv abgeschlossenen Anschauungsraumes durch eine Parametrisierung der Form $R(t) = l(t) + vr(t)$ (wobei wir nur $r(t) \neq 0$ voraussetzen), so ist $s = l + \langle \dot{l}, \dot{r} \rangle \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle^{-1} r$ ihre Striktionslinie, wenn man annimmt, daß $\dot{r} \neq 0$ im betrachteten Intervall gilt, \mathbb{R} also dort keine zylindrischen Erzeugenden besitzt. Das *Striktionsband* von \mathcal{R} ist dann durch

$$\mathcal{S}(t) = (r, l \times r, \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle l - \langle \dot{l}, \dot{r} \rangle r, \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle) \mathbb{R} \quad (17)$$

die auf M^5 gelegene Bildkurve des Striktionsbandes parametrisiert.

Wie bei den Regelflächen bereits geschehen, könnte man die Differentialgeometrie der Streifen, also der Regelfläche mit samt einer darauf befindlichen Kurve, auf die Differentialgeometrie der Kurven in M^5 zurückführen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte H. Stachel für seine konstruktive Kritik und manche Anregung danken.

Literatur

- [1] W. BURAU: *Eine gemeinsame Verallgemeinerung aller Veronesischen und Grassmannschen Mannigfaltigkeiten und die irreduziblen Darstellungen der projektiven Gruppen.* Rend. Circ. Math. Palermo, II. Ser. 3:244-268, 1954.

- [2] W. BURAU: *Zur Geometrie der verallgemeinerten Raumelemente des \mathbb{P}^n und der zugehörigen J -Mannigfaltigkeiten*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 22:141–157, 1958.
- [3] W. BURAU: *Über die Hilbertfunktion der Grundmannigfaltigkeiten der allgemeinen projektiven Gruppe*. Monatsh. Math., 71:97–99, 1967.
- [4] W. BURAU: *Über die irreduziblen Darstellungen der klassischen Gruppen und die zugehörigen Grundmannigfaltigkeiten*. In H. J. Arnold, W. Benz, and H. Wefelscheid, eds., *Beiträge zur geometrischen Algebra*, Proc. Symp. Duisburg 1976, pages 63–71, Birkhäuser, Basel, 1977.
- [5] W. BURAU: *Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie*. VEB Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961.
- [6] O. GIERING: *Vorlesungen über höhere Geometrie*. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1982.
- [7] H. HAVLICEK, K. LIST, C. ZANELLA: *On automorphisms of flag spaces*. Linear Multilinear Algebra, Vol. 50:3, 2002, 241–251.
- [8] M. HOFER, B. ODEHNAL, H. POTTMANN, T. STEINER, J. WALLNER: *3D shape recognition and reconstruction based on line element geometry*. In: *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision*, volume 2, 1532–1538. IEEE Computer Society, 2005, ISBN 0-7695-2334-X.
- [9] B. ODEHNAL: *Flags in Euclidean three-space*. Geometry Preprint No. 151, Vienna University of Technology, 2005.
- [10] B. ODEHNAL, H. POTTMANN, J. WALLNER: *Equiform kinematics and the geometry of line elements*. Geometry Preprint No. 129, Vienna University of Technology, 2004.
- [11] H. POTTMANN & J. WALLNER: *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag, Wien, 2001.
- [12] I. R. SHAFAREVICH: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1988.
- [13] E.A. WEISS: *Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik*. B.G. Teubner, Leipzig, 1937.
- [14] H. WHITNEY: *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*. Annals of Math. **45** (1944), 220–246.

*Boris Odehnal
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8–10
A-1040 Wien
Austria
email: boris@geometrie.tuwien.ac.at*