

Sächsischer Geometrietag

8. & 9. Jänner 2005, Dresden, Deutschland

Geometrie der Linienelemente

B. Odehnal

Technische Universität Wien

Geometrie der Linienelemente

- Gruppe der äquiformen Bewegungen

Geometrie der Linienelemente

- Gruppe der äquiformen Bewegungen
- Koordinaten für Linienelemente

Geometrie der Linienelemente

- Gruppe der äquiformen Bewegungen
- Koordinaten für Linienelemente
- Ein Punktmodell der Menge aller Linienelemente

Geometrie der Linienelemente

- Gruppe der äquiformen Bewegungen
- Koordinaten für Linienelemente
- Ein Punktmodell der Menge aller Linienelemente
- Lineare Linienelementkomplexe

Geometrie der Linienelemente

- Gruppe der äquiformen Bewegungen
- Koordinaten für Linienelemente
- Ein Punktmodell der Menge aller Linienelemente
- Lineare Linienelementkomplexe
- Spiralfächen

Geometrie der Linienelemente

- Gruppe der äquiformen Bewegungen
- Koordinaten für Linienelemente
- Ein Punktmodell der Menge aller Linienelemente
- Lineare Linienelementkomplexe
- Spiralfächen
- Flächenerkennung und Rekonstruktion

Geometrie der Linienelemente

- Gruppe der äquiformen Bewegungen
- Koordinaten für Linienelemente
- Ein Punktmodell der Menge aller Linienelemente
- Lineare Linienelementkomplexe
- Spiralfächen
- Flächenerkennung und Rekonstruktion
- Beispiele

Gruppe der äquiforme Bewegungen

- Äquiforme Bewegungen

Gruppe der ...

- **Äquiforme Bewegung**

$$x \mapsto y = \alpha Ax + a \quad A \in \text{SO}_3, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}^3$$

Gruppe der ...

- **Äquiforme Bewegung**

$$x \mapsto y = \alpha Ax + a \quad A \in \text{SO}_3, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}^3$$

- **Ein-parametrische Äquiform-Bewegung**

$$A = A(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_3,$$

$$\alpha = \alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad a = a(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Gruppe der ...

- **Äquiforme Bewegung**

$$x \mapsto y = \alpha Ax + a \quad A \in \text{SO}_3, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}^3$$

- **Ein-parametrische Äquiform-Bewegung**

$$A = A(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}_3,$$

$$\alpha = \alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad a = a(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- **Geschwindigkeitsvektorfeld**

$$v(y) = c \times y + \bar{c} + \gamma y$$

$$c \times y = \dot{A}A^T y,$$

$$\gamma = \dot{\alpha}/\alpha,$$

$$\bar{c} = \dot{a} - \gamma a - c \times a$$

Gruppe der ...

- **Kenngrößen der äquiformen Bewegungen**

c, \bar{c}, γ

Gruppe der ...

- **Kenngrößen der äquiformen Bewegungen**
 c, \bar{c}, γ
- **geeignete Wahl des Koordinatensystems liefert Normalformen**

Gruppe der ...

- **Kenngrößen der äquiformen Bewegungen**

$$c, \bar{c}, \gamma$$

- **geeignete Wahl des Koordinatensystems liefert Normalformen**

1. $c = [0, 0, 1]^T, \bar{c} = 0, \gamma \neq 0 \dots\dots\dots$ Spirallung

Gruppe der ...

- **Kenngrößen der äquiformen Bewegungen**

$$c, \bar{c}, \gamma$$

- **geeignete Wahl des Koordinatensystems liefert Normalformen**

1. $c = [0, 0, 1]^T, \bar{c} = 0, \gamma \neq 0$ Spirallung

2. $c = 0, \bar{c} = 0, \gamma \neq 0$ zentrische Streckung

Gruppe der ...

- **Kenngrößen der äquiformen Bewegungen**

$$c, \bar{c}, \gamma$$

- **geeignete Wahl des Koordinatensystems liefert Normalformen**

1. $c = [0, 0, 1]^T, \bar{c} = 0, \gamma \neq 0$ Spirallung

2. $c = 0, \bar{c} = 0, \gamma \neq 0$ zentrische Streckung

3. $c = [0, 0, 1]^T, \gamma = 0$ Schraubung (inkl. Drehung)

Gruppe der ...

- **Kenngrößen der äquiformen Bewegungen**

$$c, \bar{c}, \gamma$$

- **geeignete Wahl des Koordinatensystems liefert Normalformen**

1. $c = [0, 0, 1]^T, \bar{c} = 0, \gamma \neq 0$ Spirallung

2. $c = 0, \bar{c} = 0, \gamma \neq 0$ zentrische Streckung

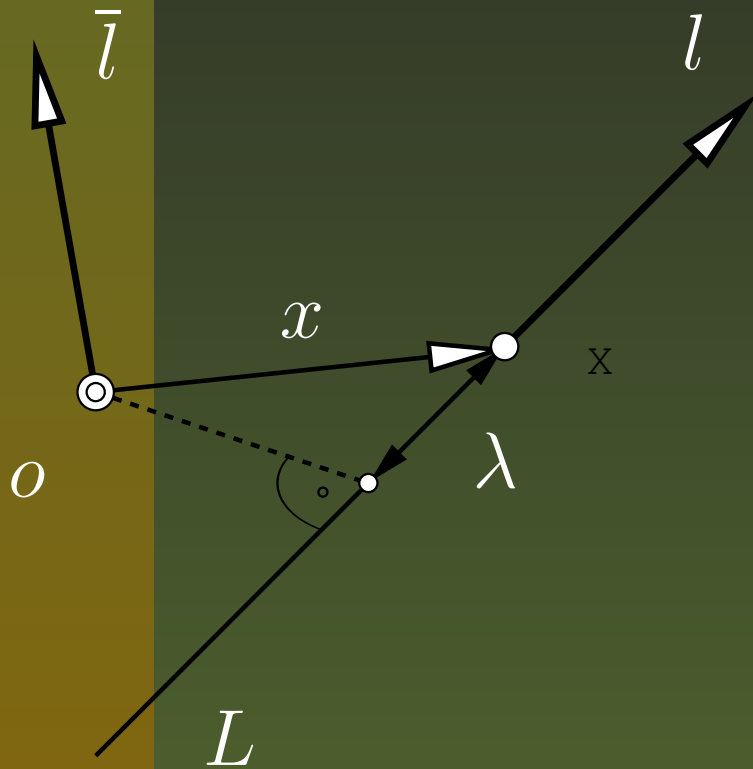
3. $c = [0, 0, 1]^T, \gamma = 0$. Schraubung (inkl. Drehung)

4. $c = 0, \bar{c} \neq 0, \gamma = 0$ Translation

Koordinaten für Linienelemente

- **Koordinaten für Linienelemente**

Koordinaten ...



Linienelement (L, x)

$$L \in \mathbb{R}^3, x \in L$$

**Plücker-Koordinaten
von L**

$$(l, \bar{l}) = (l, x \times l)$$

**Plücker-Koordinaten
von (L, x)**

$$(L, x) \rightarrow (l, \bar{l}, \lambda),$$

$$\lambda := \langle x, l \rangle$$

**homogen, aber vom
Punkt x abhängig**

Ein Punktmodell der Menge aller Linienelemente

- Ein Punktmodell

Ein Punktmodell ...

- deute (l, \bar{l}, λ) als Punktkoordinaten in $\mathbb{P}^6 \Rightarrow$

Ein Punktmodell ...

- deute (l, \bar{l}, λ) als Punktkoordinaten in $\mathbb{P}^6 \Rightarrow$
- Koordinatenraum der Linienelemente = quadratischer Kegel M_2^5 mit Gleichung $\langle l, \bar{l} \rangle = 0$
dim Spitze = 0, dim Erzeugenden = 3,
 M_2^4 ... eine prominente Leitquadrik

Ein Punktmodell ...

- deute (l, \bar{l}, λ) als Punktkoordinaten in $\mathbb{P}^6 \Rightarrow$
- Koordinatenraum der Linienelemente = quadratischer Kegel M_2^5 mit Gleichung $\langle l, \bar{l} \rangle = 0$
dim Spitze = 0, dim Erzeugenden = 3,
 M_2^4 ... eine prominente Leitquadrik
- Autokollineationen von M_2^5 induzieren
Linienelementtransformationen in \mathbb{R}^3

Ein Punktmodell ...

- deute (l, \bar{l}, λ) als Punktkoordinaten in $\mathbb{P}^6 \Rightarrow$
- Koordinatenraum der Linienelemente = quadratischer Kegel M_2^5 mit Gleichung $\langle l, \bar{l} \rangle = 0$
dim Spitze = 0, dim Erzeugenden = 3,
 M_2^4 ... eine prominente Leitquadrik
- Autokollineationen von M_2^5 induzieren
Linienelementtransformationen in \mathbb{R}^3
- in der Hyperebene $\lambda = 0$... Liniengeometrie

Lineare Linienelementkomplexe

- **Lineare Linienelementkomplexe**

Linienelementkomplexe

Def.: linearer Linienelementkomplex

$$\mathcal{C} := \{(L, x) \mid \langle l, \bar{c} \rangle + \langle \bar{l}, c \rangle + \lambda \gamma = 0\}$$

Linienelementkomplexe

Def.: linearer Linienelementkomplex

$$\mathcal{C} := \{(L, x) \mid \langle l, \bar{c} \rangle + \langle \bar{l}, c \rangle + \lambda \gamma = 0\}$$

Satz:

Zu jedem regulären Zeitpunkt einer stetigen ein-parametrischen Äquiform-Bewegung liegen die Bahnnormalenelemente in einem linearen Linienelementkomplex.

Linienelementkomplexe

Def.: linearer Linienelementkomplex

$$\mathcal{C} := \{(L, x) \mid \langle l, \bar{c} \rangle + \langle \bar{l}, c \rangle + \lambda \gamma = 0\}$$

Satz:

Zu jedem regulären Zeitpunkt einer stetigen ein-parametrischen Äquiform-Bewegung liegen die Bahnnormalenelemente in einem linearen Linienelementkomplex.

Beweis: Nachrechnen. \square

Linienelementkomplexe

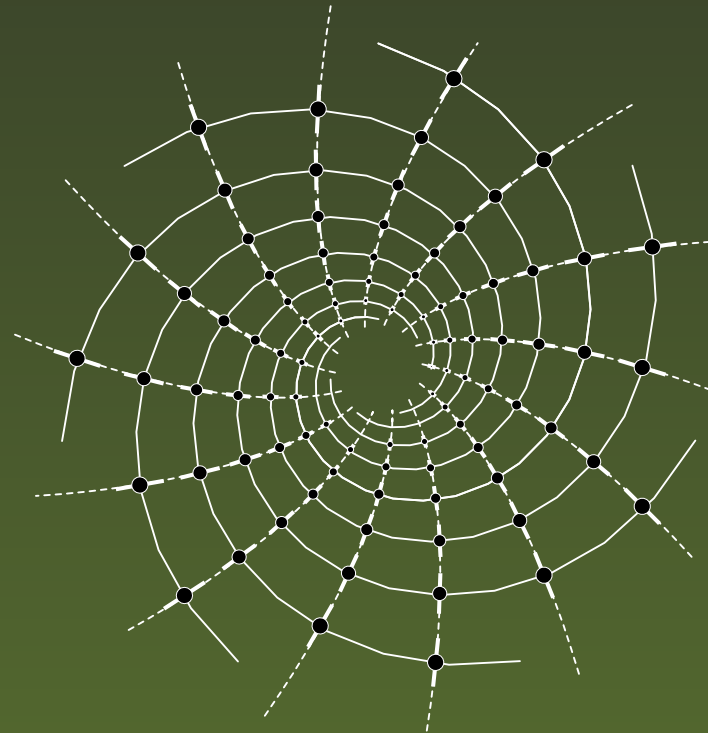
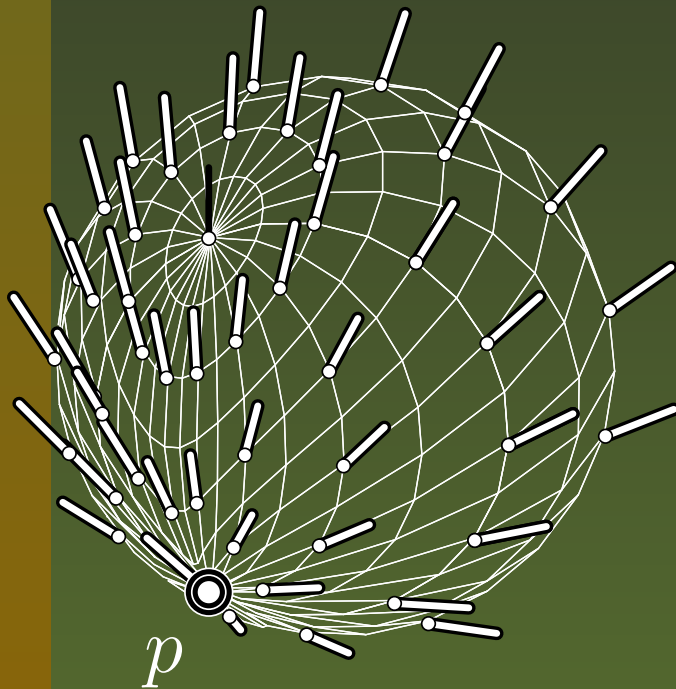
- Auf jeder Geraden $L \in \mathbb{R}^3$ gibt es genau einen Punkt x , sodaß $(L, x) \in \mathcal{C}$ gilt ($\gamma \neq 0$).

Linienelementkomplexe

- Auf jeder Geraden $L \in \mathbb{R}^3$ gibt es genau einen Punkt x , sodaß $(L, x) \in \mathcal{C}$ gilt ($\gamma \neq 0$).
- $\mathcal{C} \cap$ Bündel (Büschel) ist eine Sphäre (Kreis).

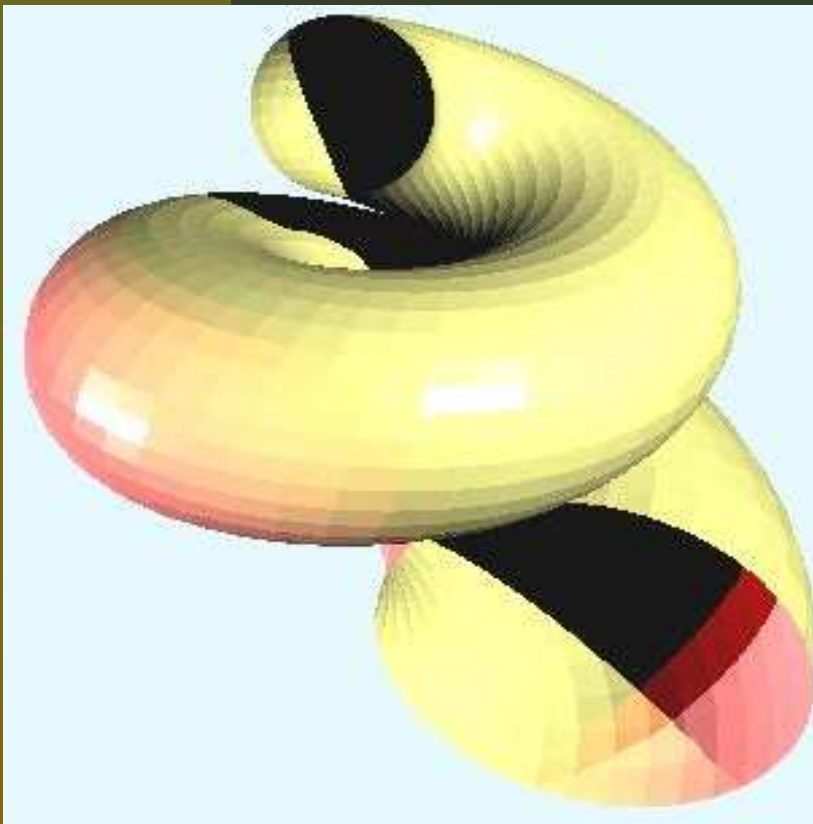
Linienelementkomplexe

- Auf jeder Geraden $L \in \mathbb{R}^3$ gibt es genau einen Punkt x , sodaß $(L, x) \in \mathcal{C}$ gilt ($\gamma \neq 0$).
- $\mathcal{C} \cap$ Bündel (Büschel) ist eine Sphäre (Kreis).
- $\mathcal{C} \cap$ Feld = Bahnnormalen einer ebenen Spirallung.

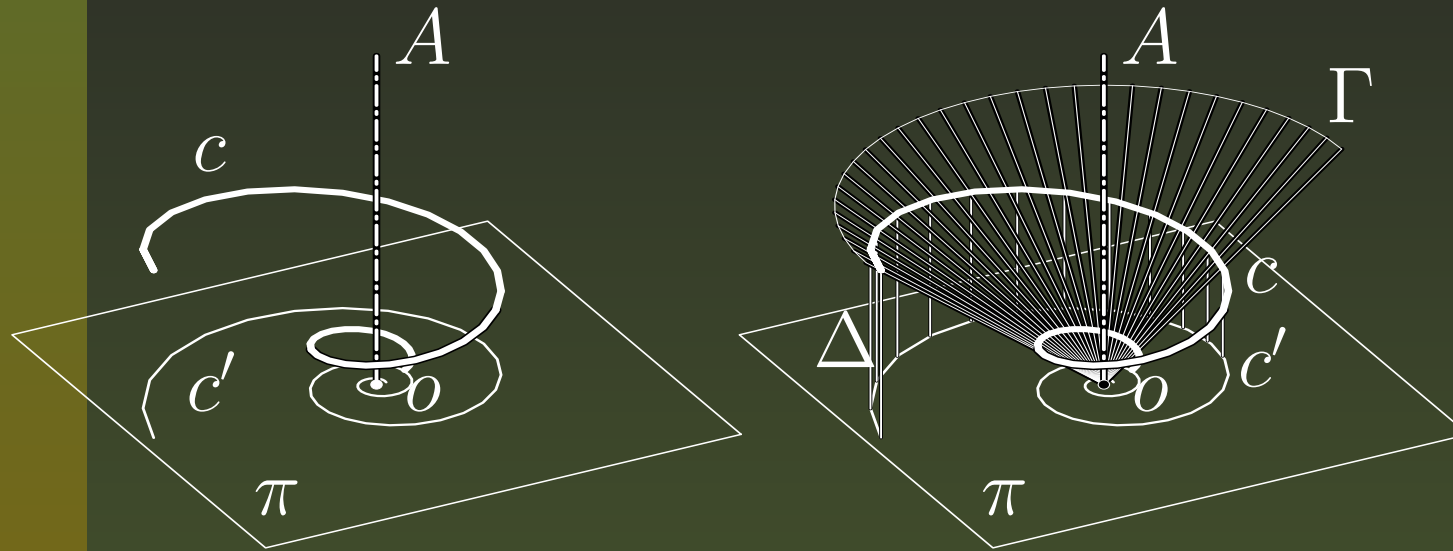


Spiralflächen

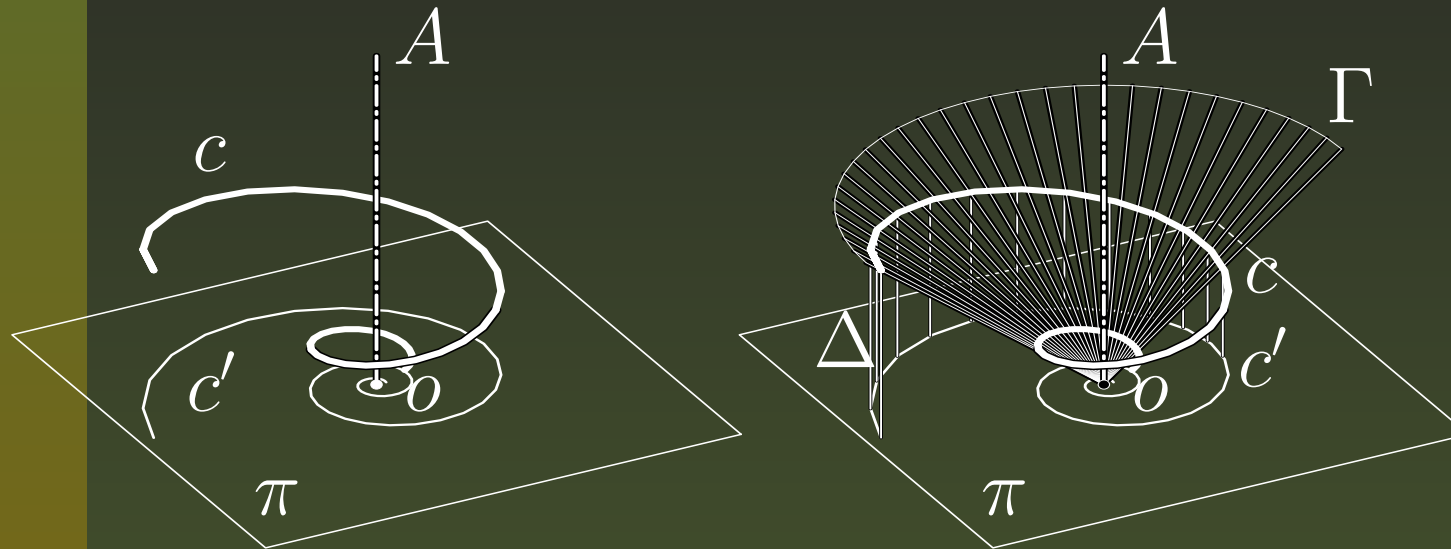
- Spiralflächen



Spiralung

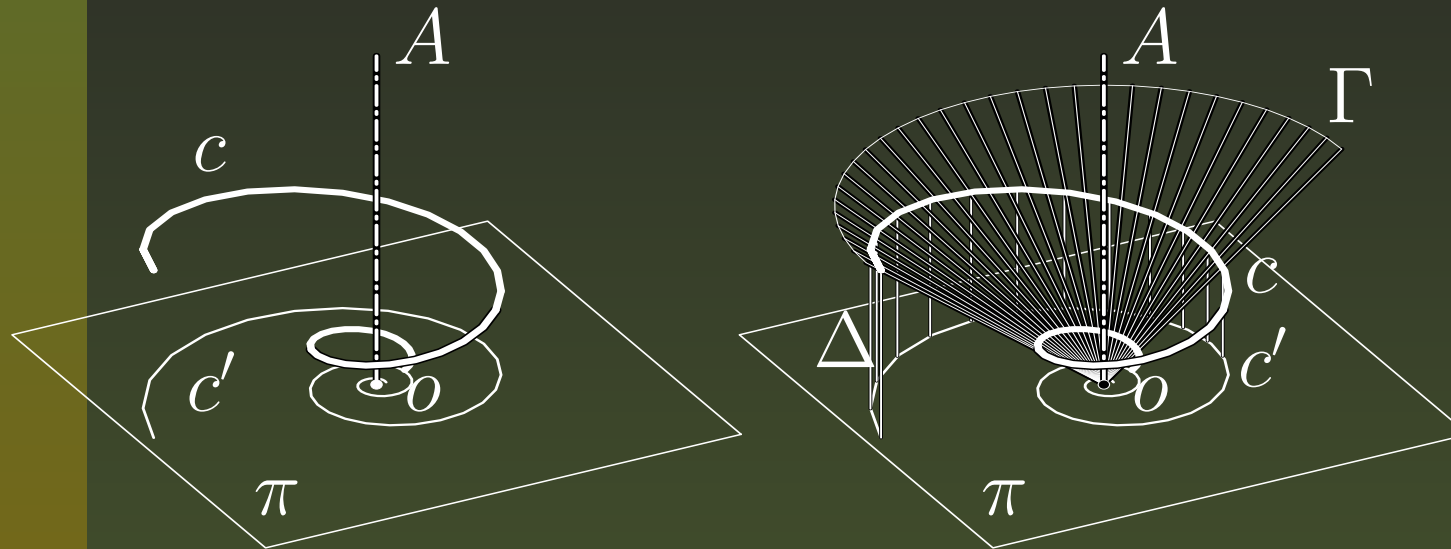


Spiralung



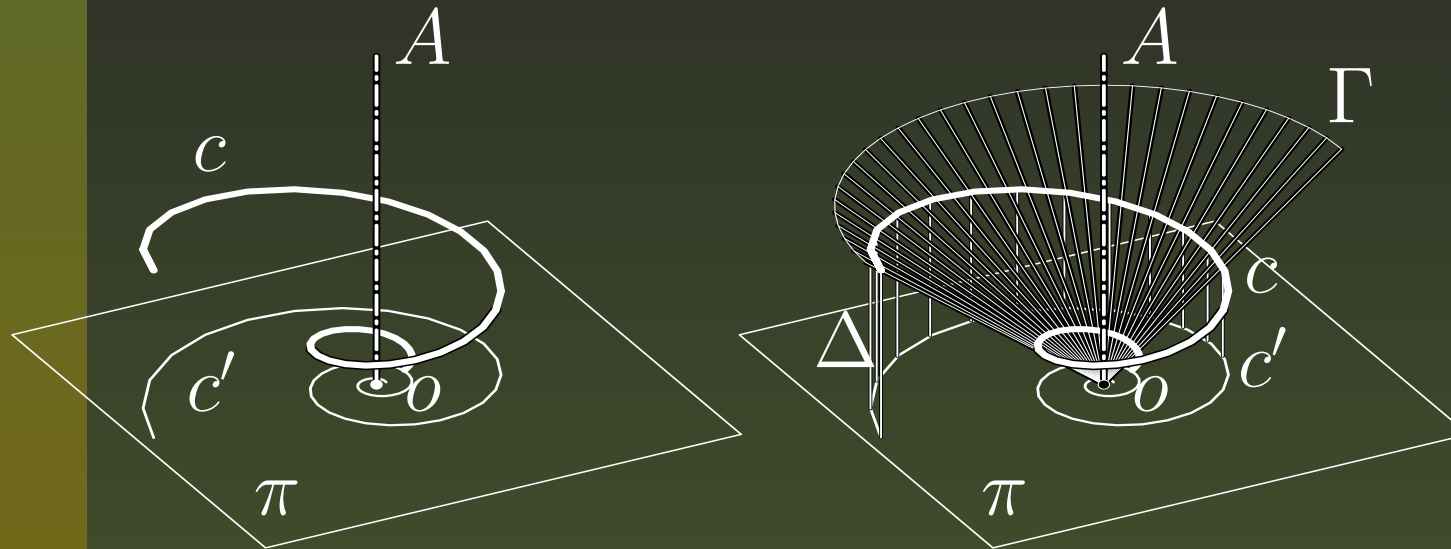
- $o \dots$ Spiralzentrum $v(o) = 0$, $A \dots$ Spiralachse, $\pi \perp A$, $o \in \pi \dots$ invariante Ebene

Spiralung



- o ... Spiralzentrum $v(o) = 0$, A ... Spiralachse, $\pi \perp A$, $o \in \pi$... invariante Ebene
- c ... Punktbahn, zylindrokonische Spirale

Spiralung



- o ... Spiralzentrum $v(o) = 0$, A ... Spiralachse, $\pi \perp A$, $o \in \pi$... invariante Ebene
- c ... Punktbahn, zylindrokonische Spirale
- Δ/Γ ... invarianter Zylinder/Drehkegel

Spiralflächen

- Äquiforme Bewegflächen = Bahnflächen einer Kurve unter einer ein-parametrischen Untergruppe

Spiralflächen

- Äquiforme Bewegflächen = Bahnflächen einer Kurve unter einer ein-parametrischen Untergruppe
- Typologie gemäß der Komplextypen:
 1. Spiralflächen
 2. Kegel
 3. Schraubflächen (Drehflächen)
 4. Zylinder

Spiralflächen

- Äquiforme Bewegflächen = Bahnflächen einer Kurve unter einer ein-parametrischen Untergruppe
- Typologie gemäß der Komplextypen:
 1. Spiralflächen
 2. Kegel
 3. Schraubflächen (Drehflächen)
 4. Zylinder
- Normalenelemente bilden:
 1. linearen Linienelementkomplex
 2. drei-dimensionalen UR von \mathbb{P}^6
 3. linearen Komplex (im Sinne der Liniengeometrie)
 4. Gebüsch mit uneigentlicher Achse

Flächenerkennung/Rekonstruktion

- **Erkennung und Rekonstruktion**

Flächenerkennung/Rekonstruktion

- bestimme bestapproximierenden linearen Linienelementkomplex

Flächenerkennung/Rekonstruktion

- bestimme bestapproximierenden linearen Linienelementkomplex
- Zentrum, Achse, Parameter (falls vorhanden)

Flächenerkennung/Rekonstruktion

- bestimme bestapproximierenden linearen Linienelementkomplex
- Zentrum, Achse, Parameter (falls vorhanden)
- erzeugende Kurve (Meridian)

Beispiele

- Beispiele

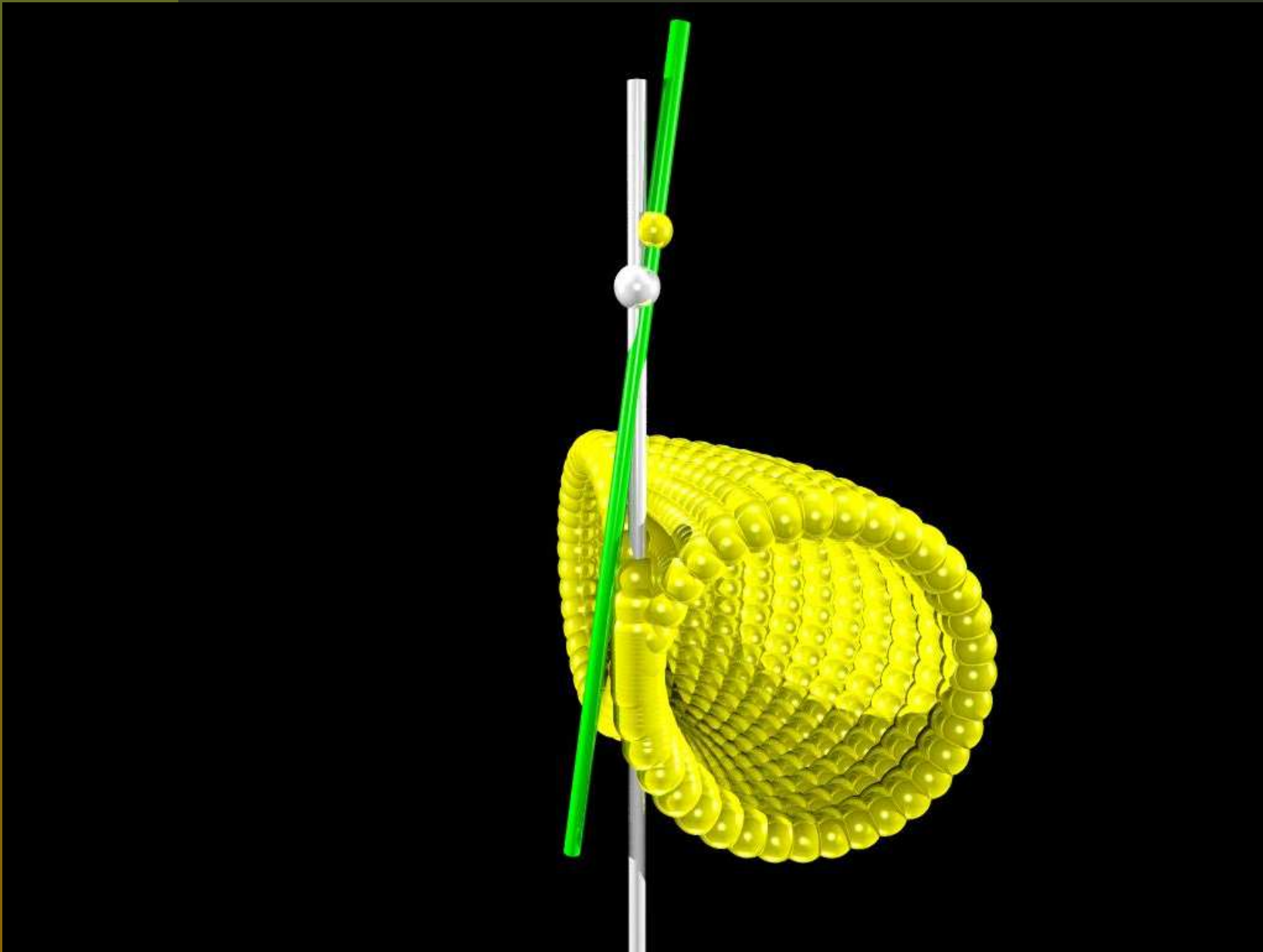
Beispiele

- künstlicher Datensatz mit Störfunktion

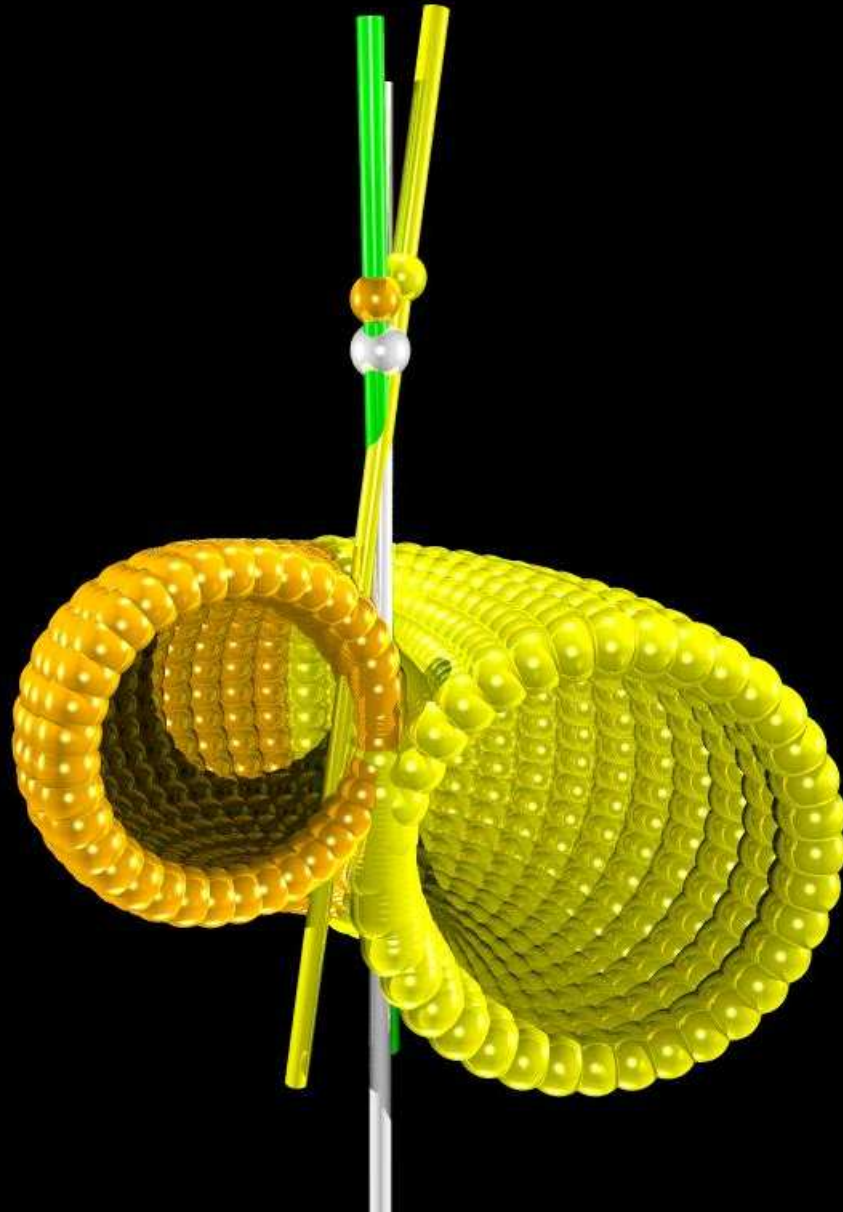
Beispiele

- künstlicher Datensatz mit Störfunktion
- natürliche Daten (Weinbergschnecke)

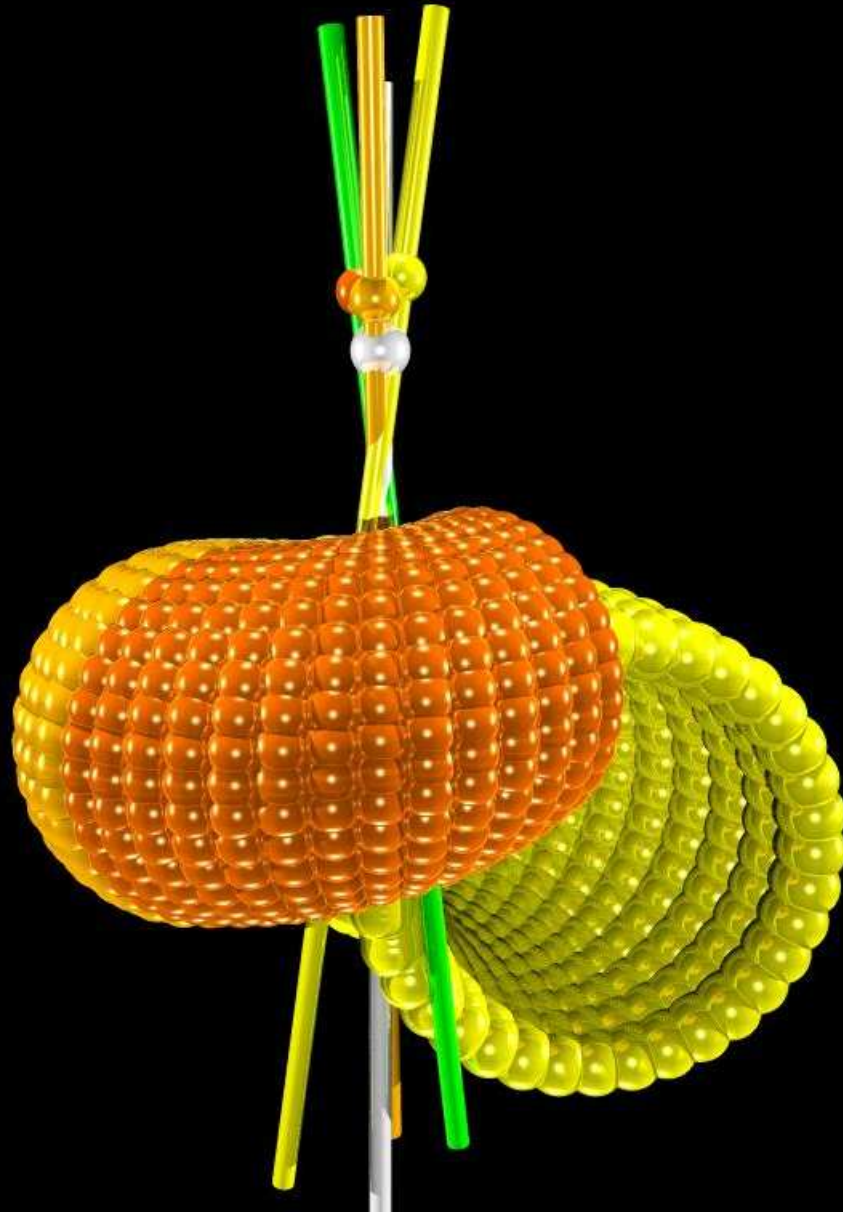
Beispiel 1.



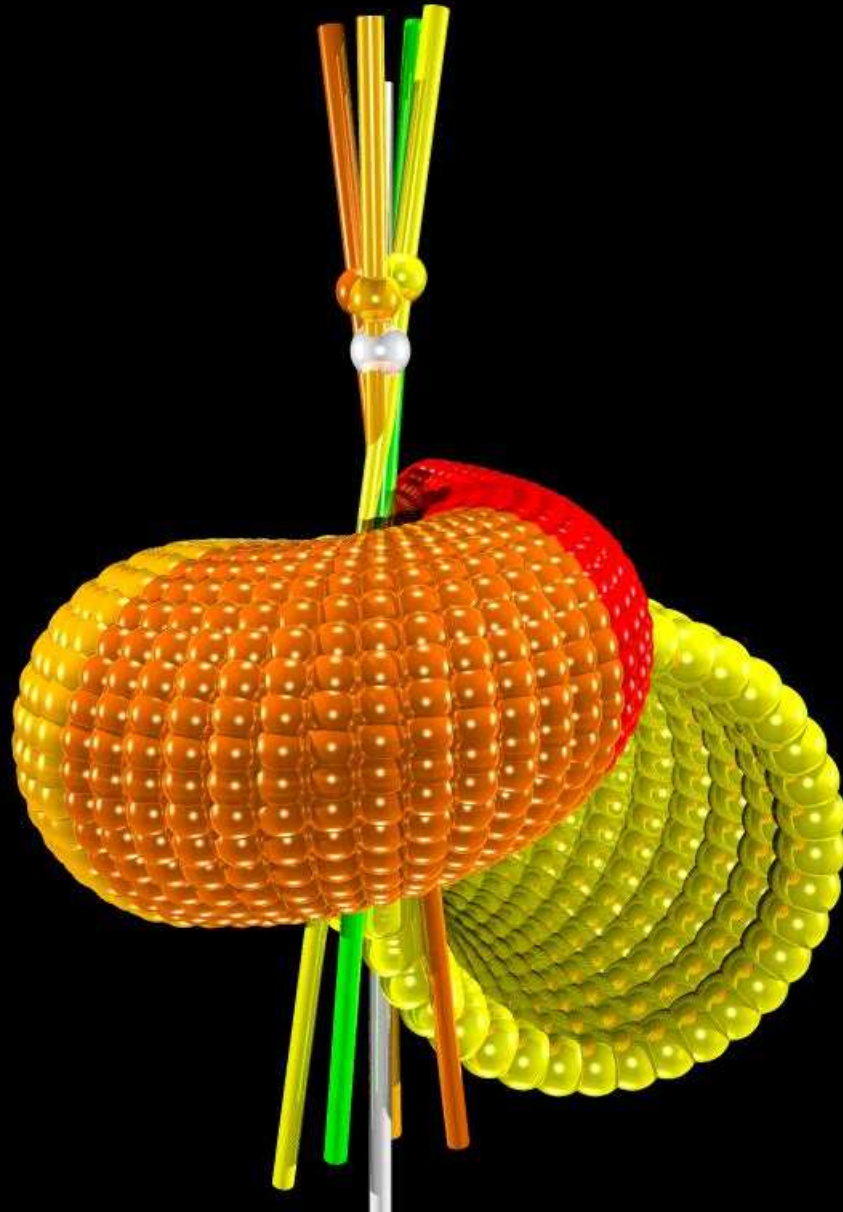
Beispiel 1.



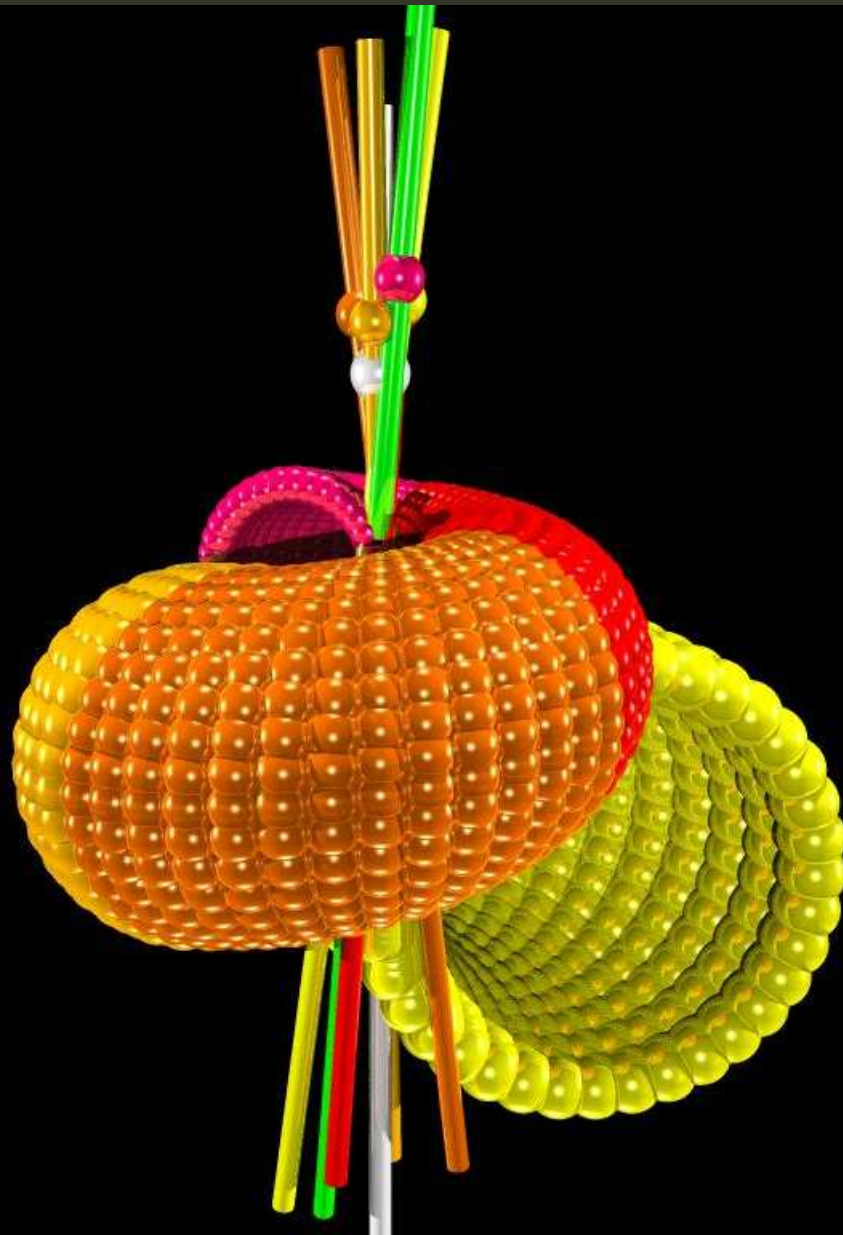
Beispiel 1.



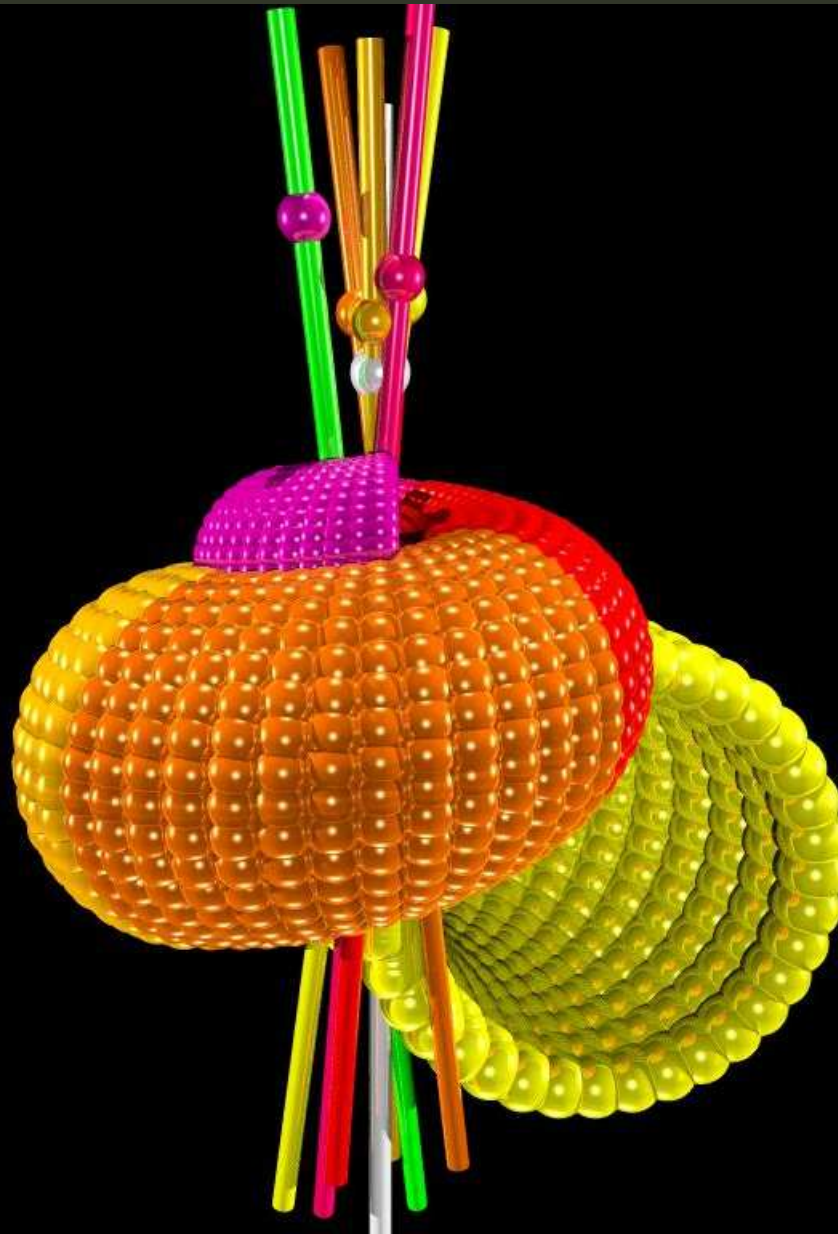
Beispiel 1.



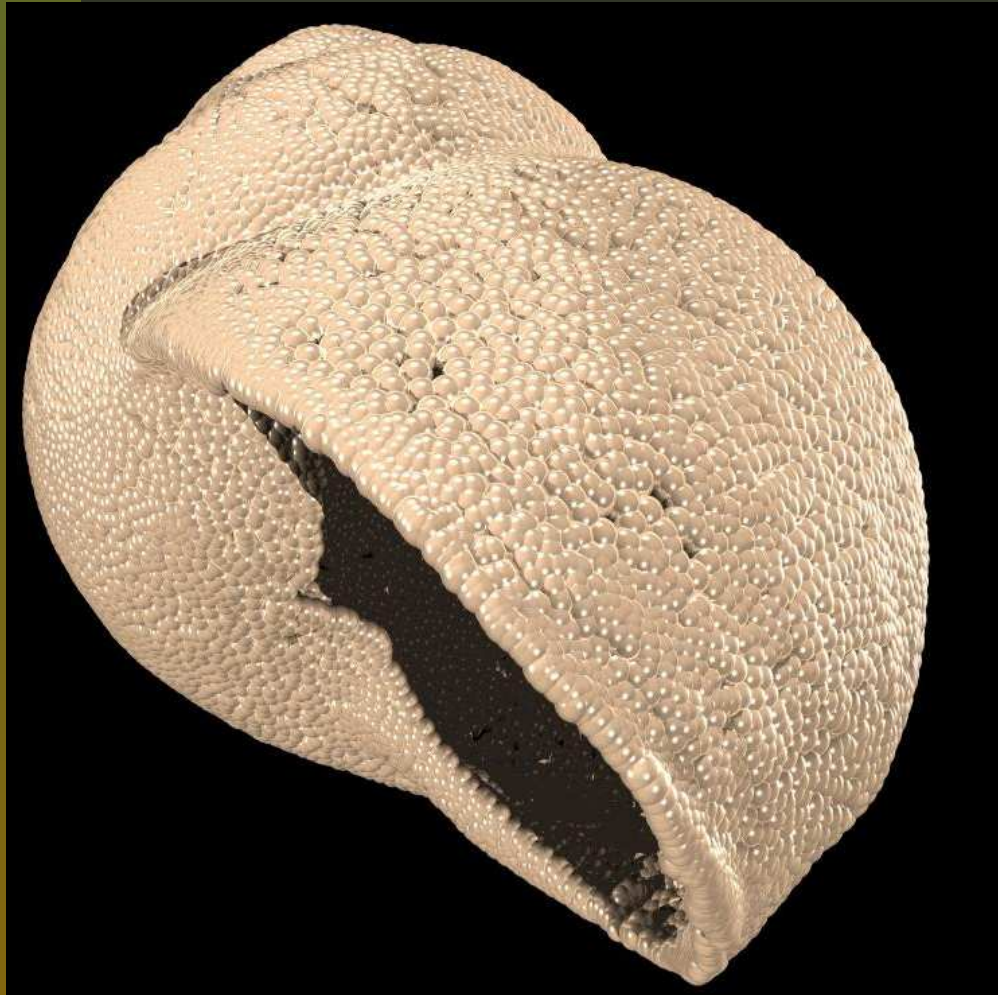
Beispiel 1.



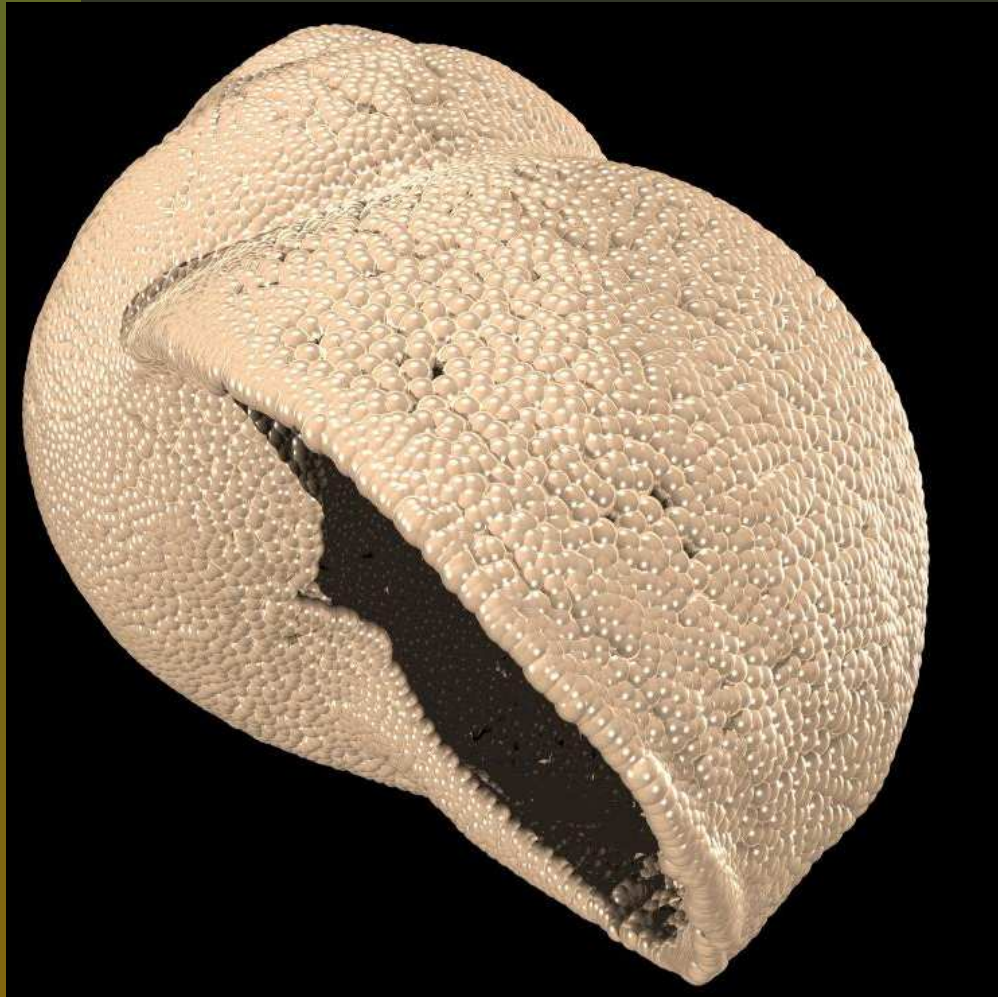
Beispiel 1.



Beispiel 2: Flächenerkennung

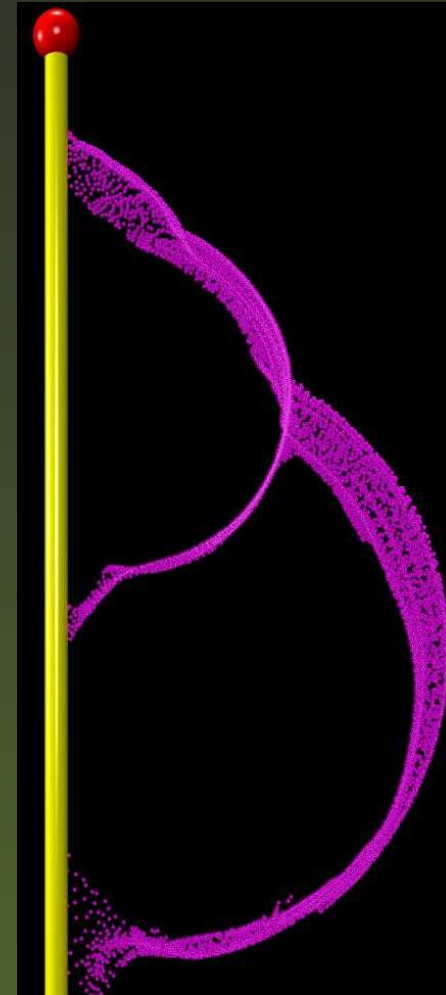


Beispiel 2: Flächenerkennung



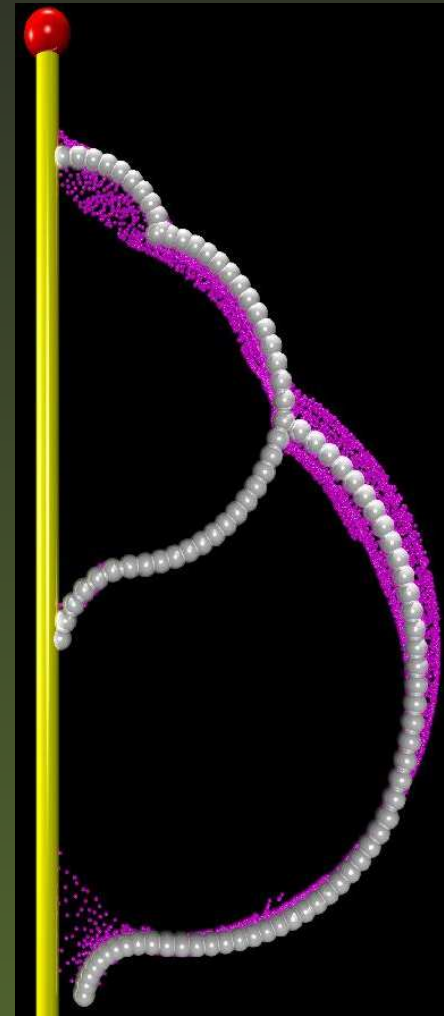
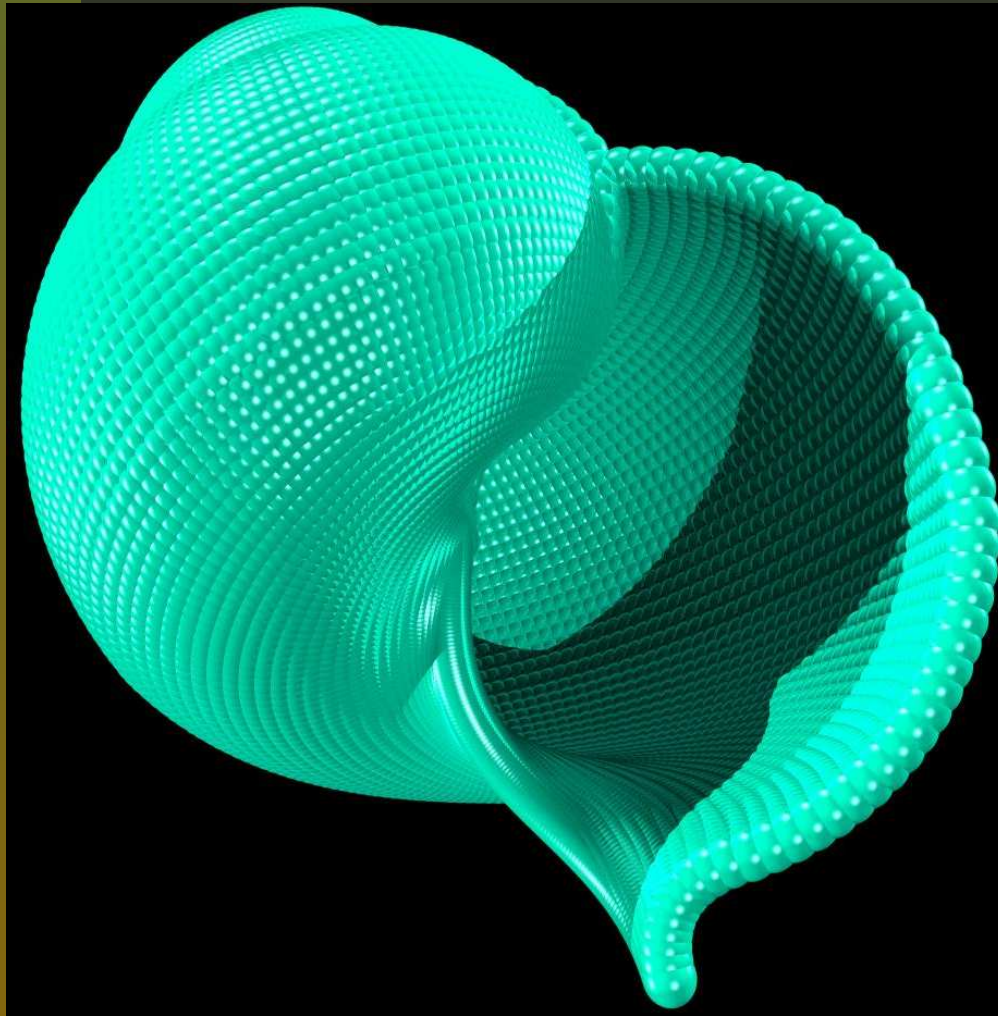
- Daten: Gehäuse einer *helix pomata*

Beispiel 2: Flächenerkennung

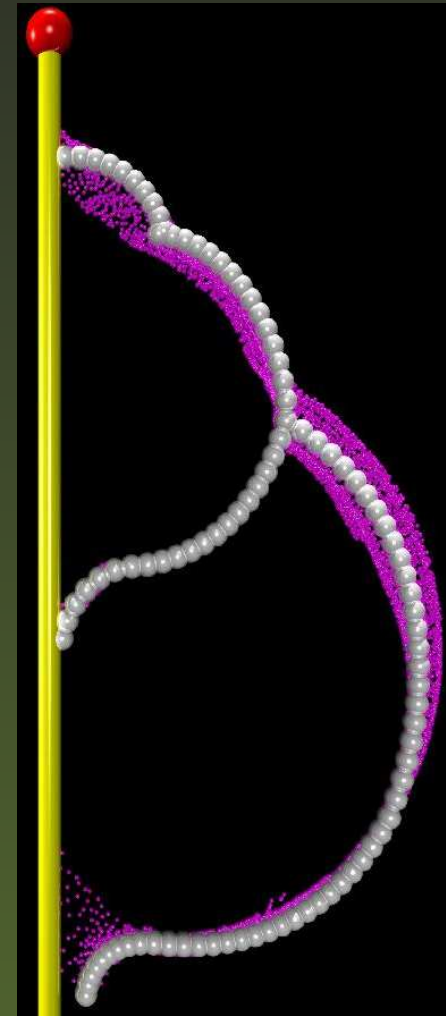
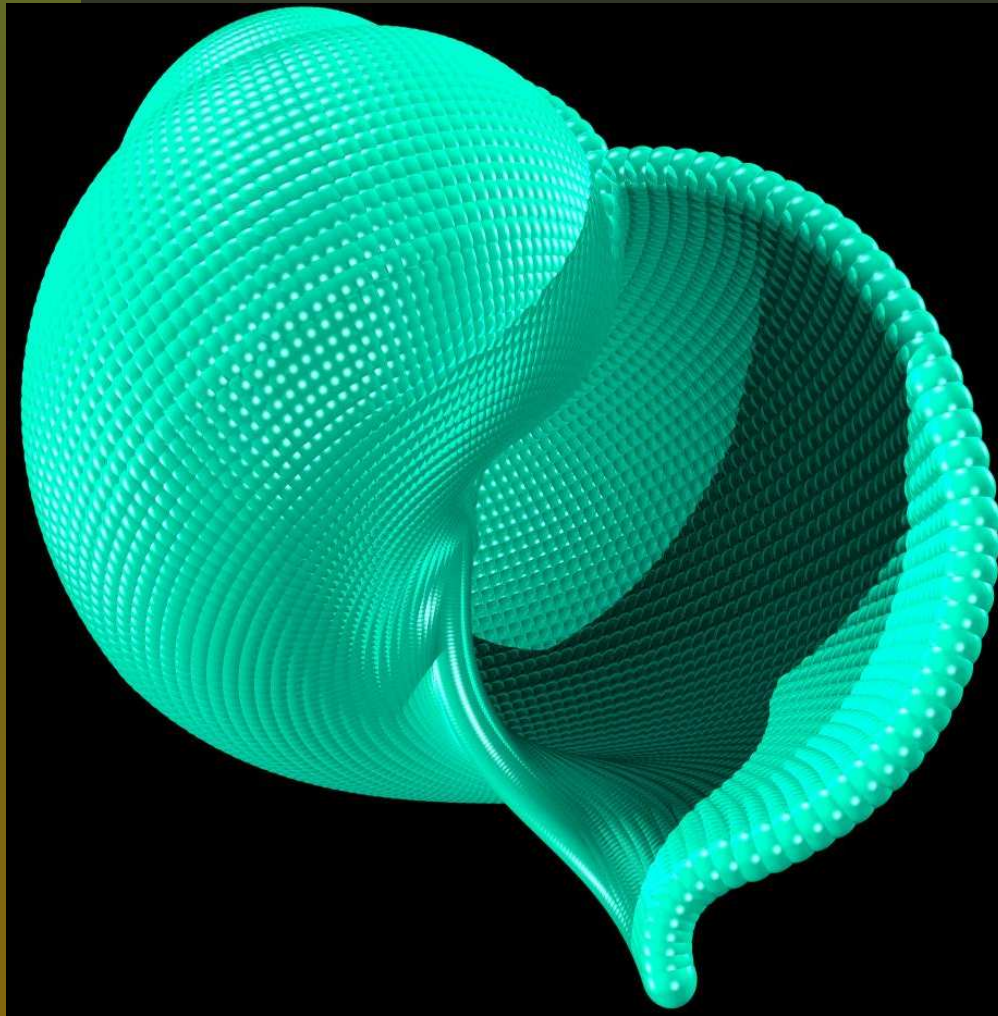


- Daten: Gehäuse einer *helix pomata*
- Zentrum, Achse und dicker Meridian, Parameter

Beispiel 2: Rekonstruktion

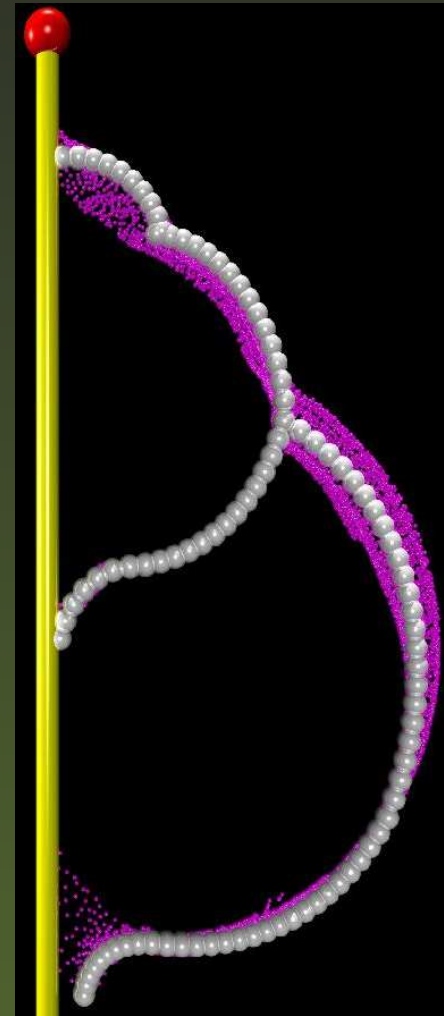
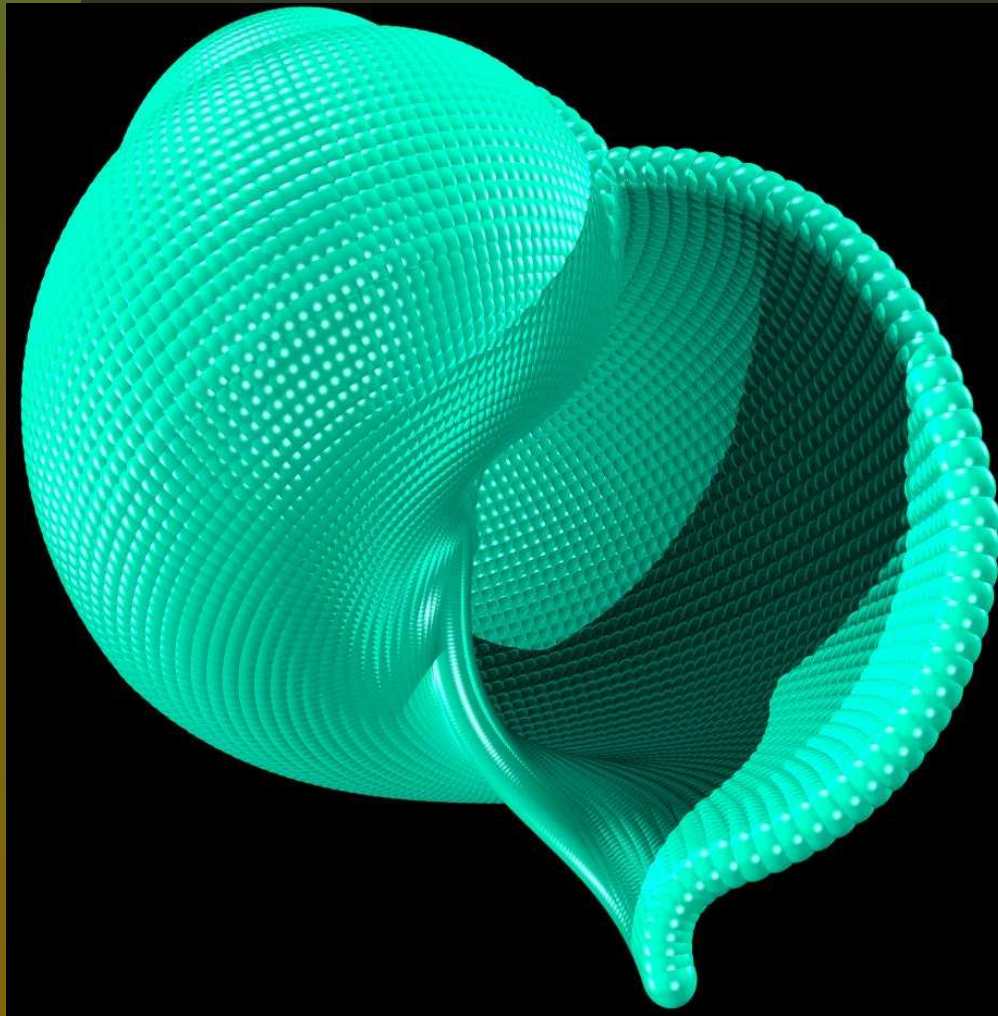


Beispiel 2: Rekonstruktion



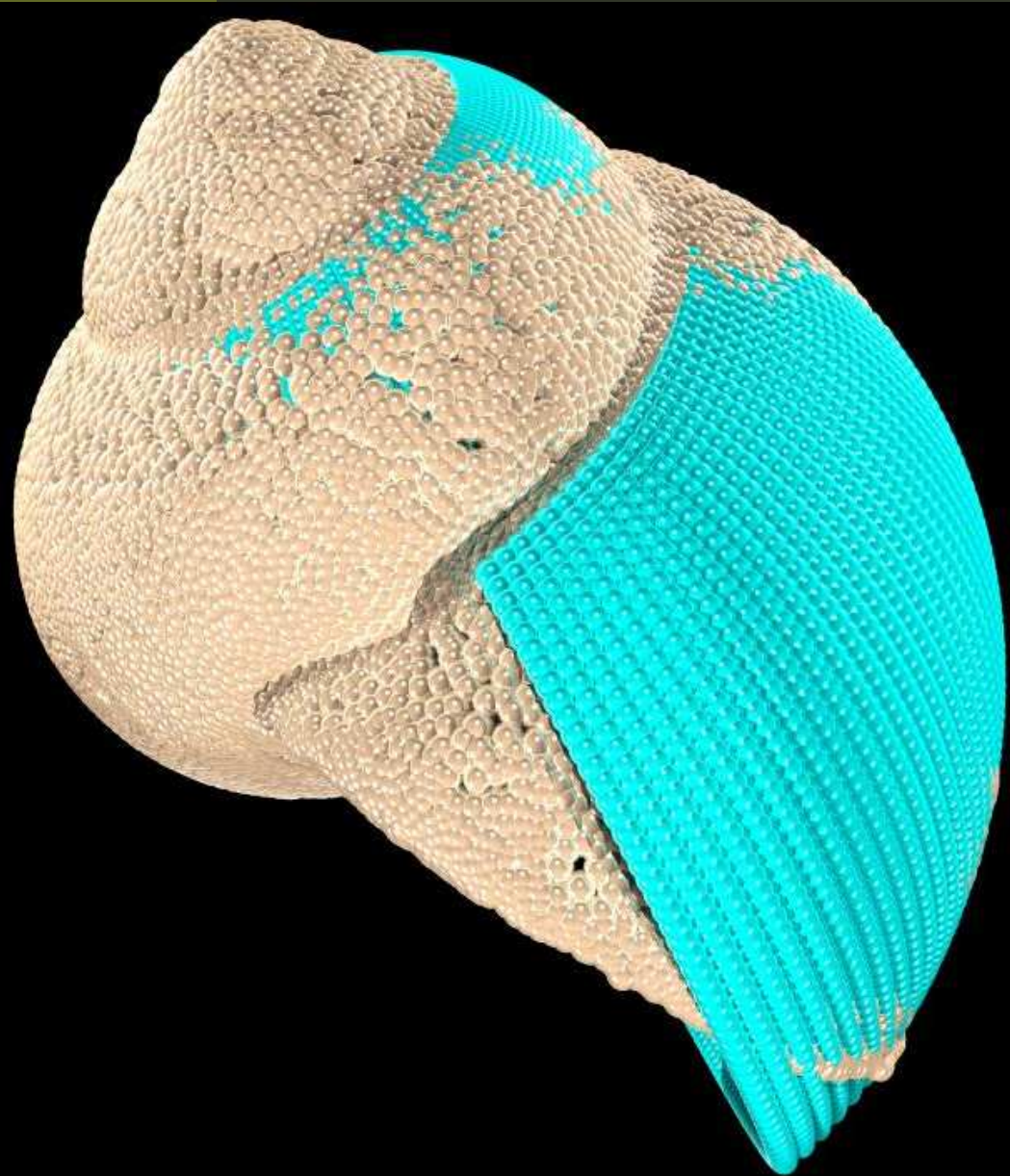
- dünner Meridian (MLSQ, active B-Spline, ...)

Beispiel 2: Rekonstruktion

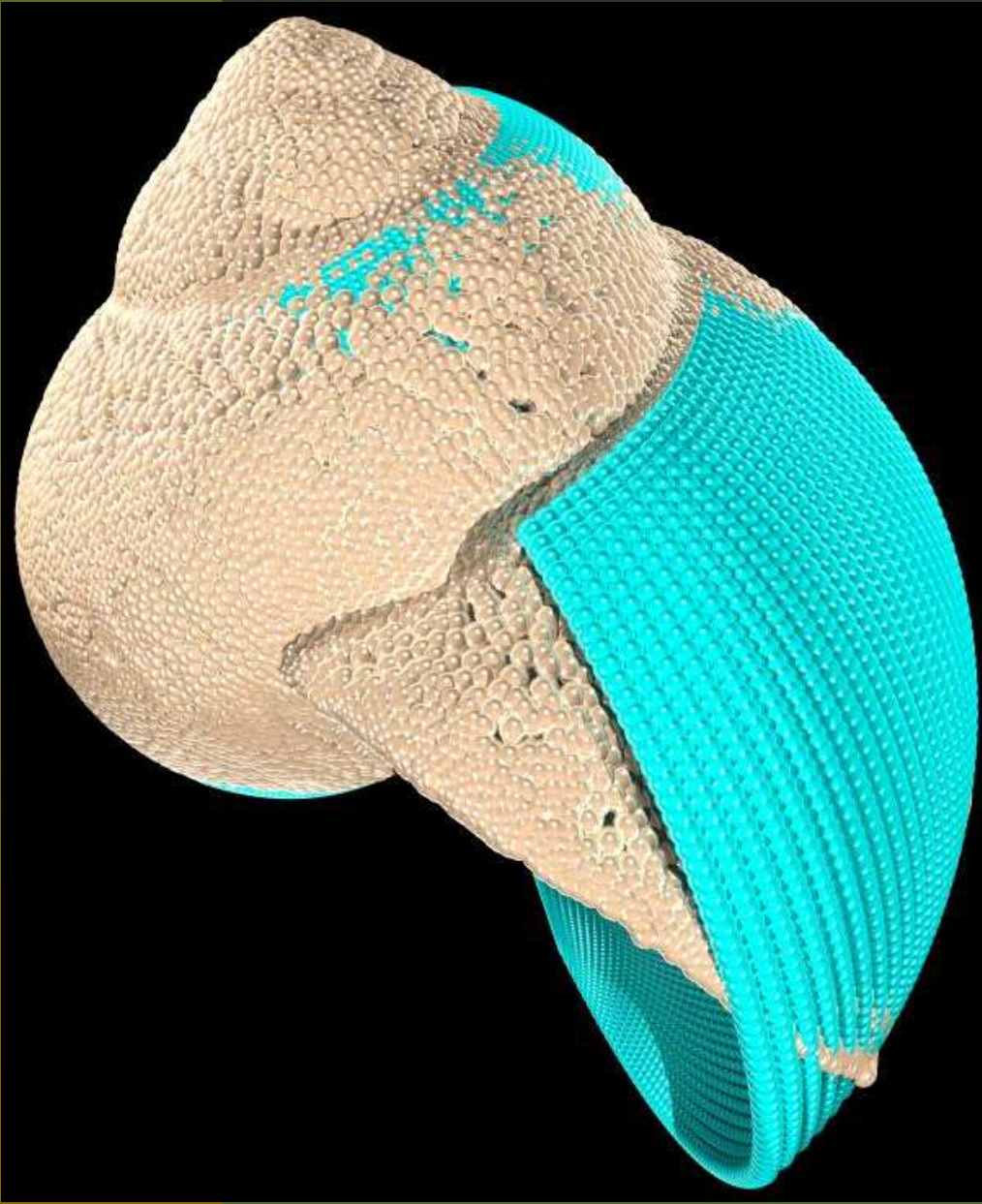


- dünner Meridian (MLSQ, active B-Spline, ...)
- dünnen Meridian der Spirallung unterwerfen

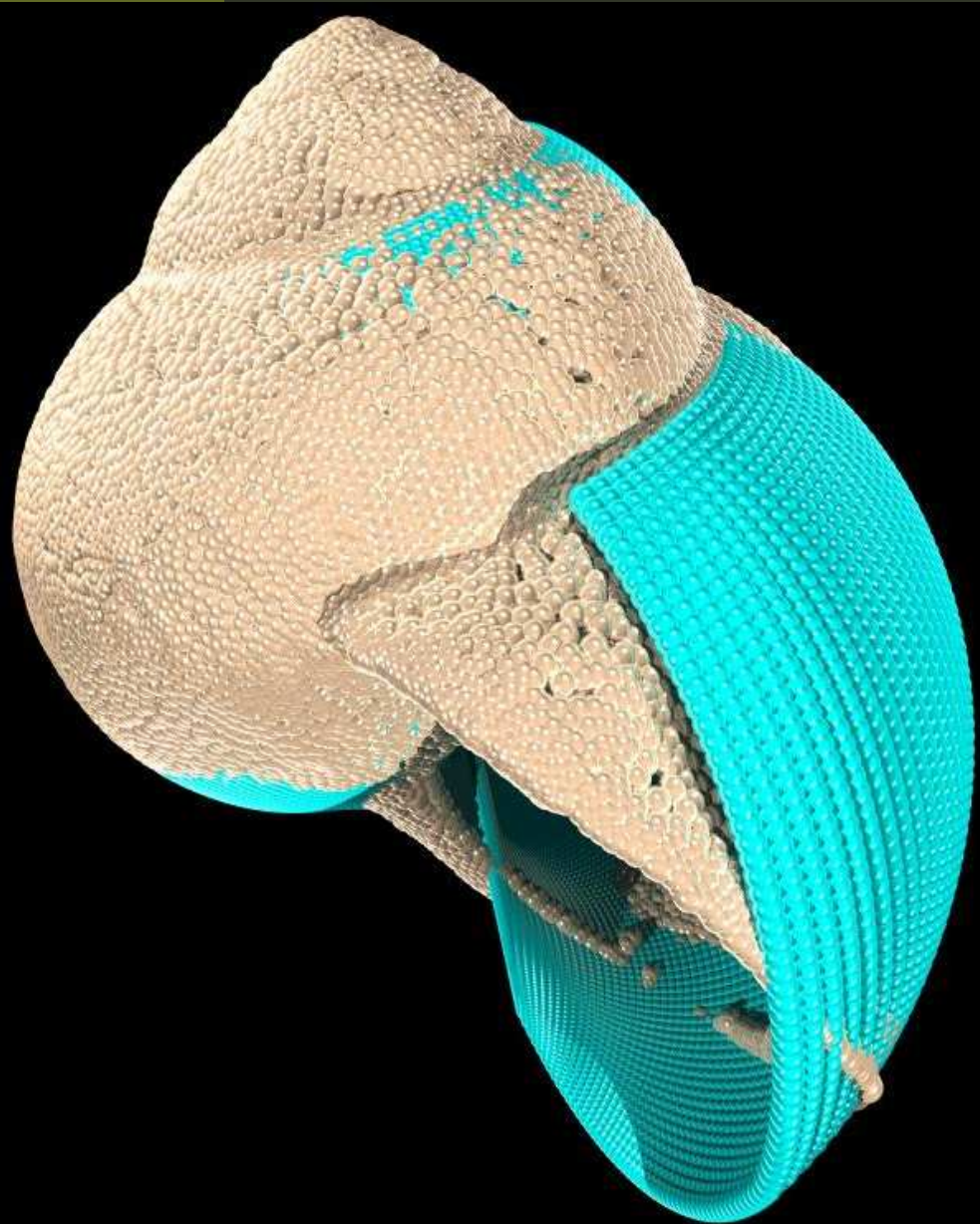
Beispiel 2: Vergleich



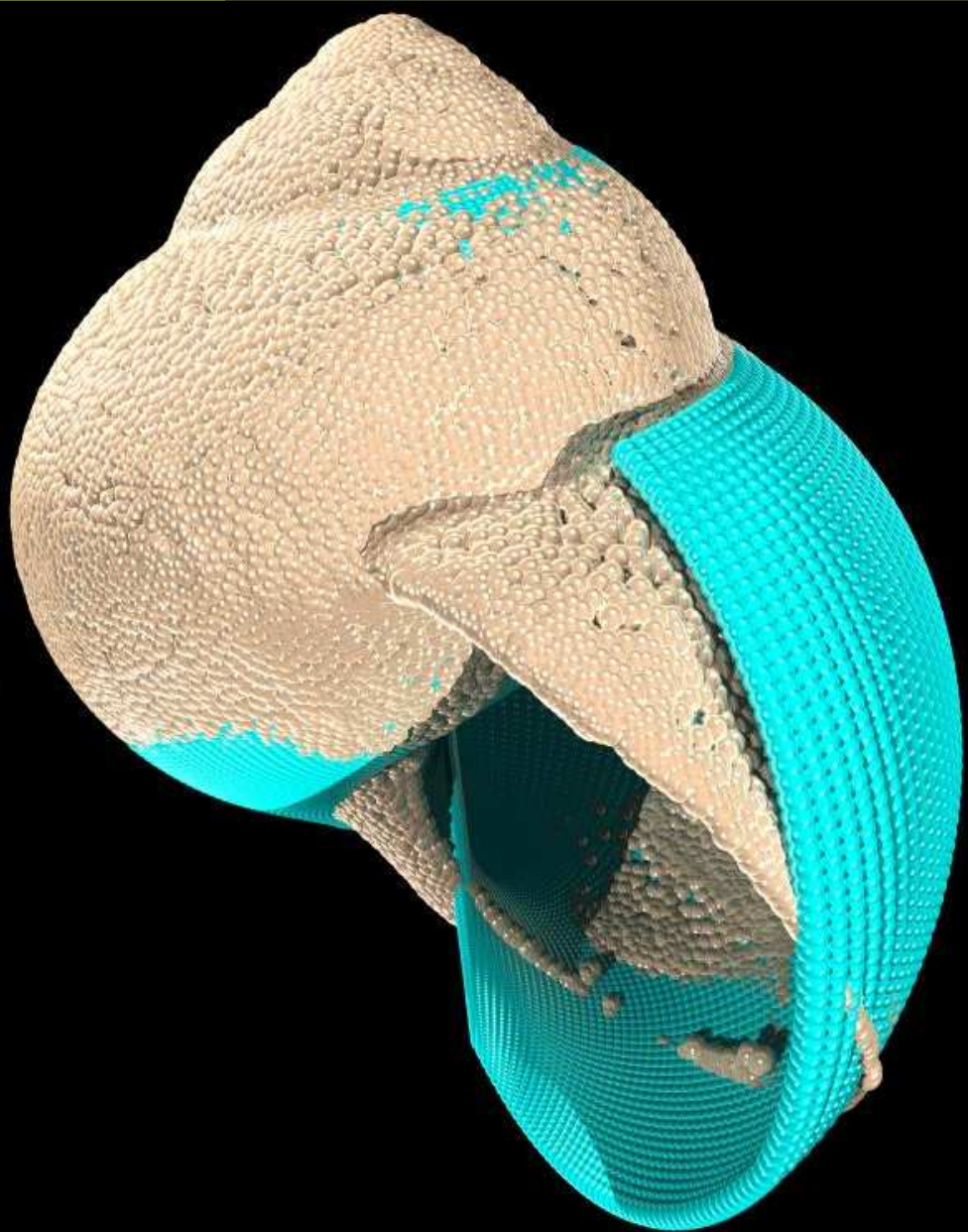
Beispiel 2: Vergleich



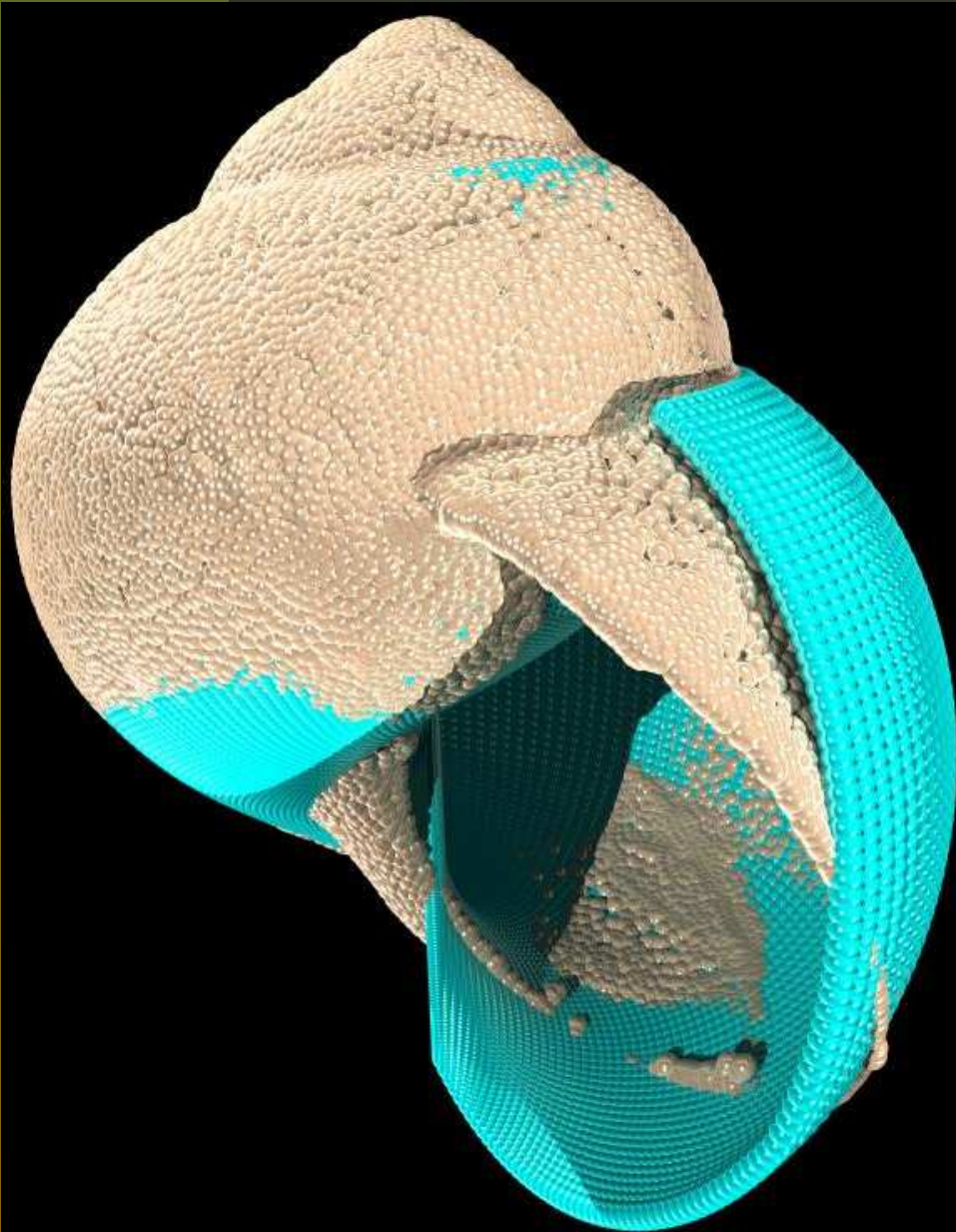
Beispiel 2: Vergleich



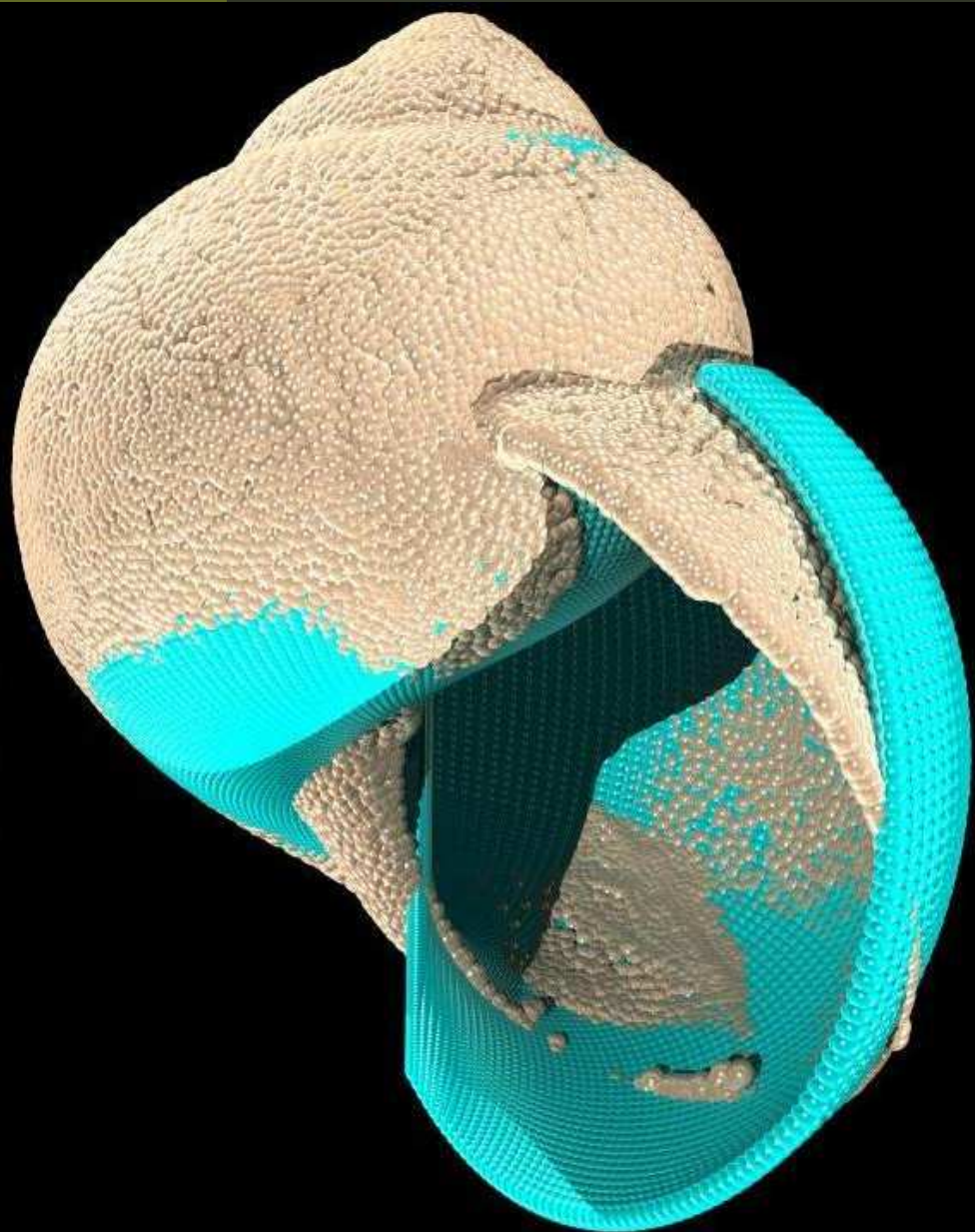
Beispiel 2: Vergleich



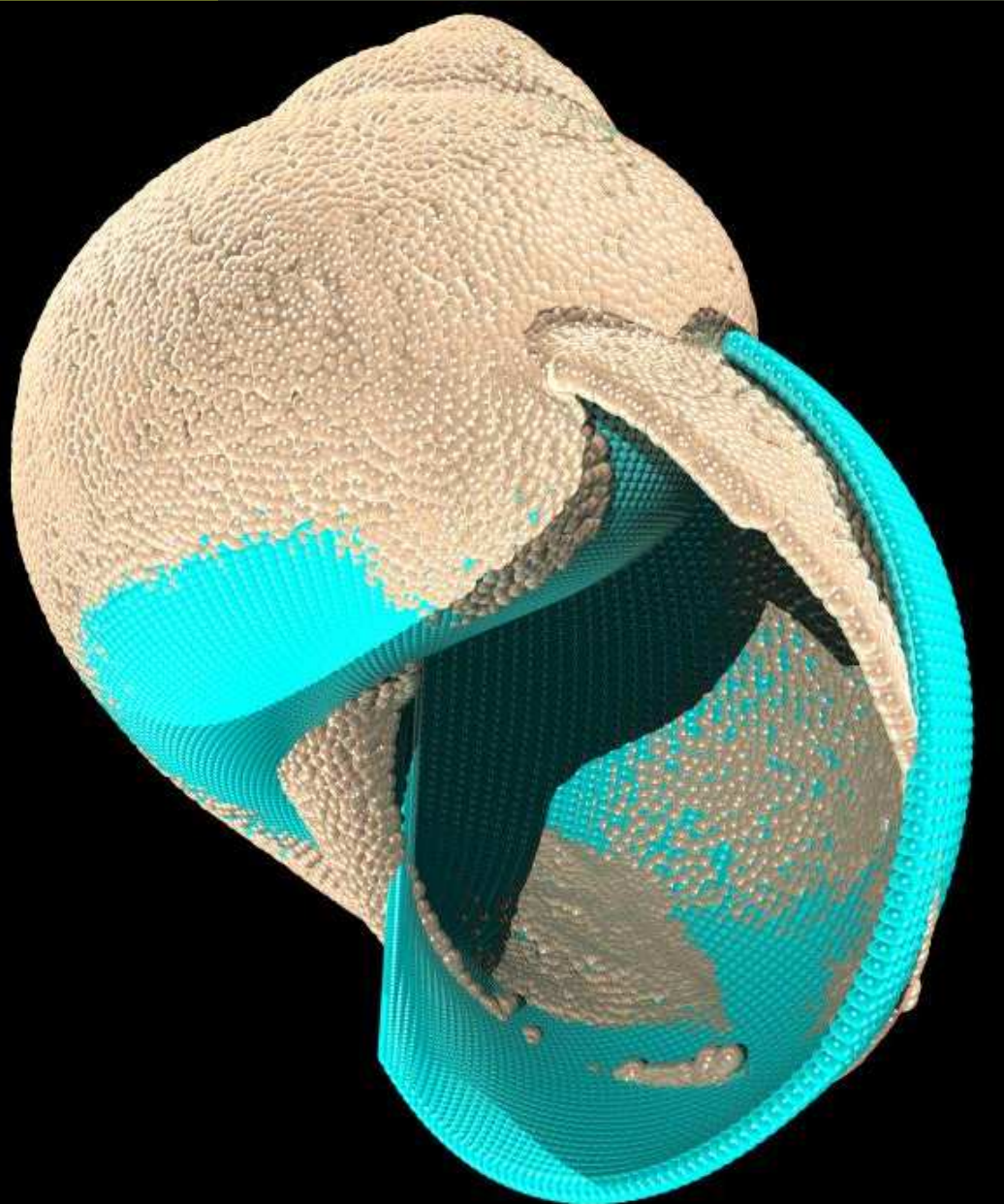
Beispiel 2: Vergleich



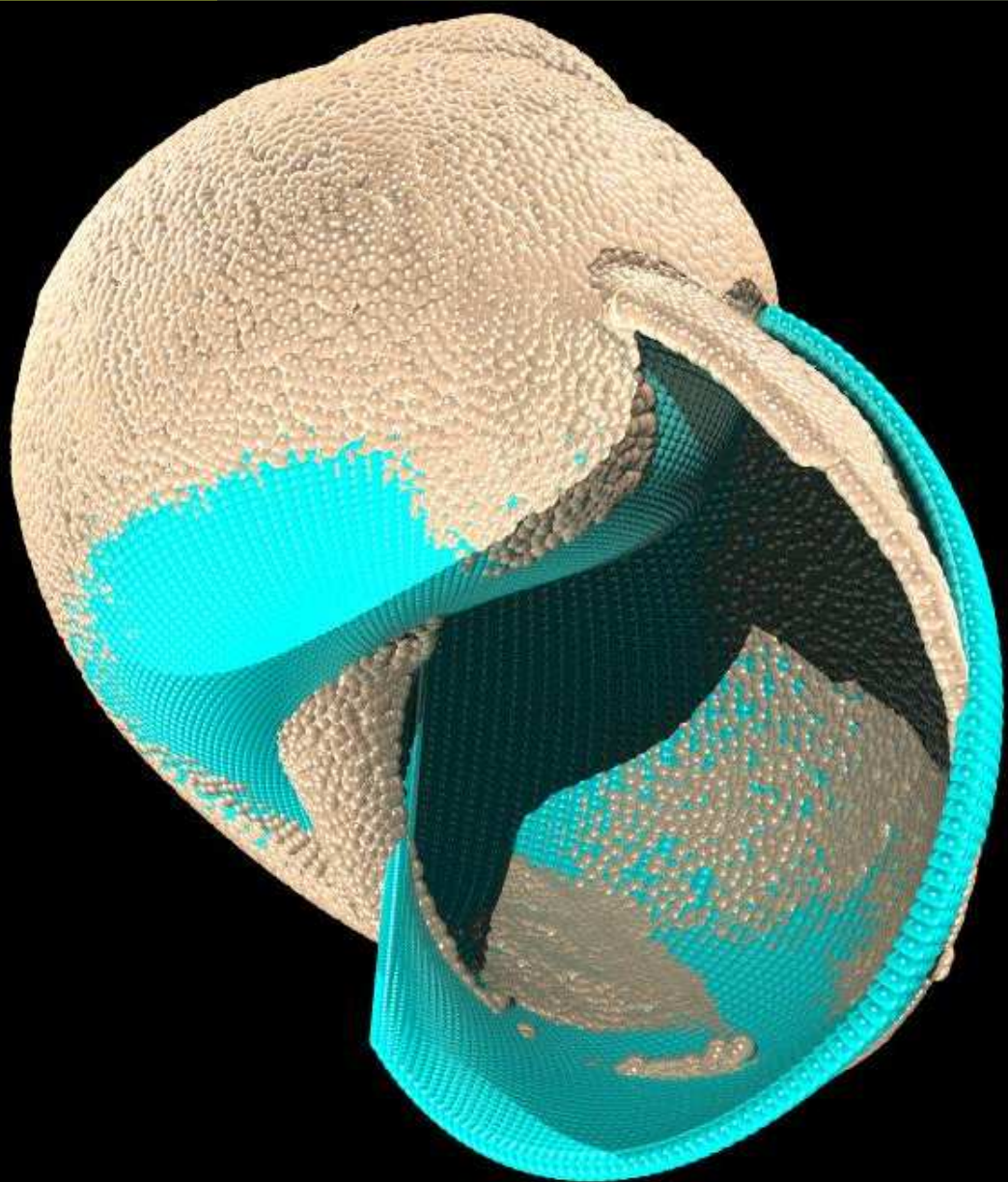
Beispiel 2: Vergleich



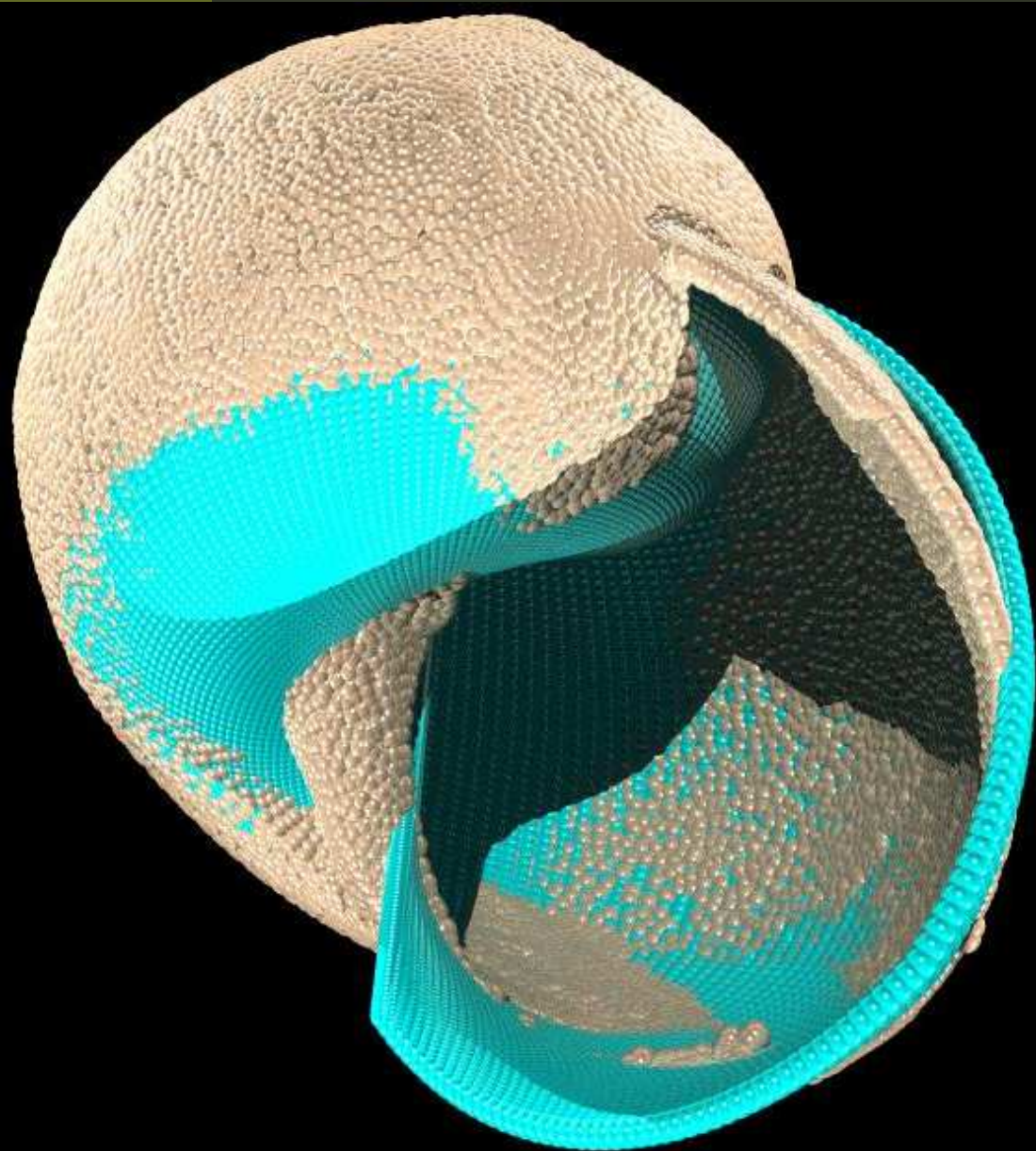
Beispiel 2: Vergleich



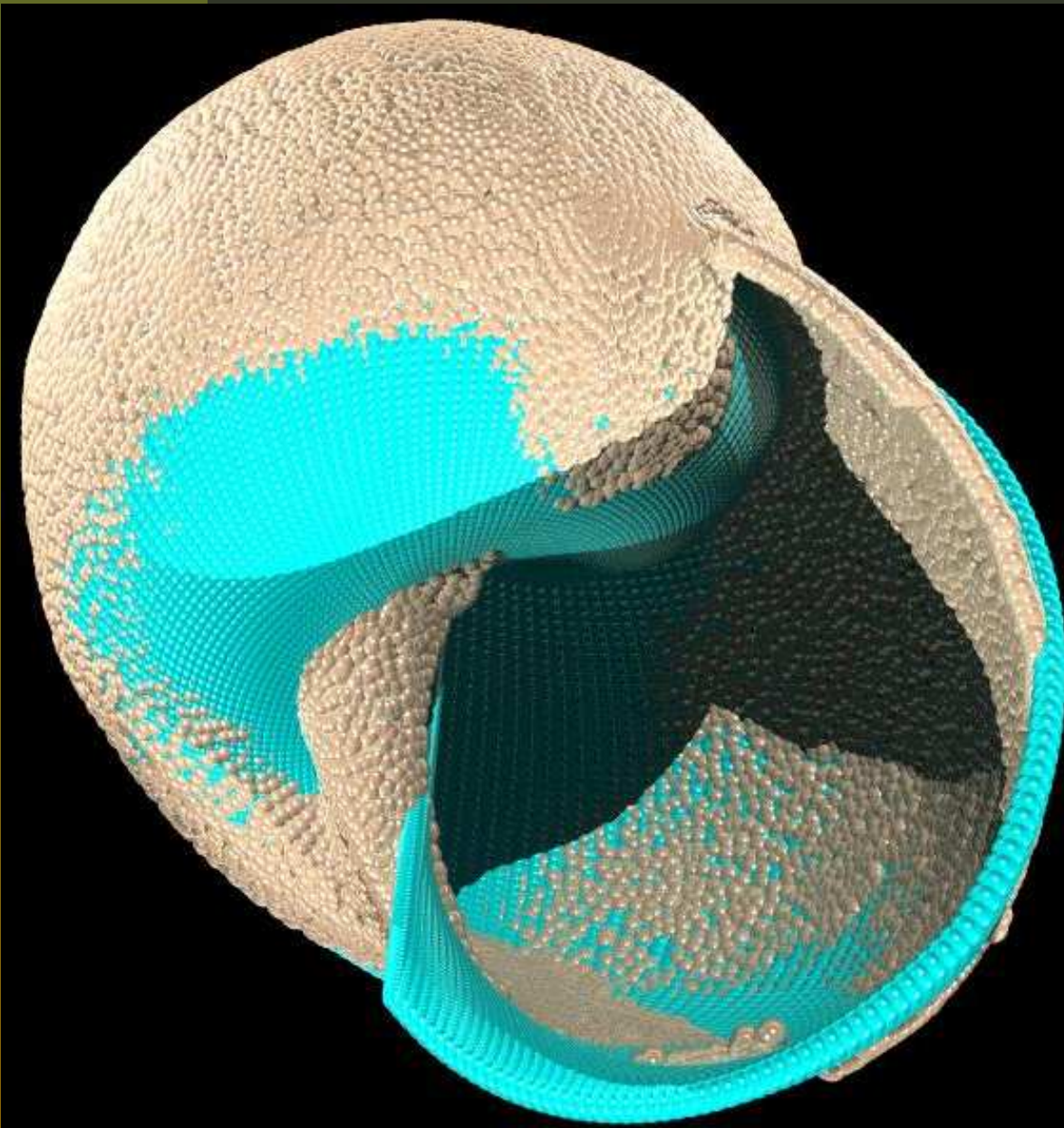
Beispiel 2: Vergleich



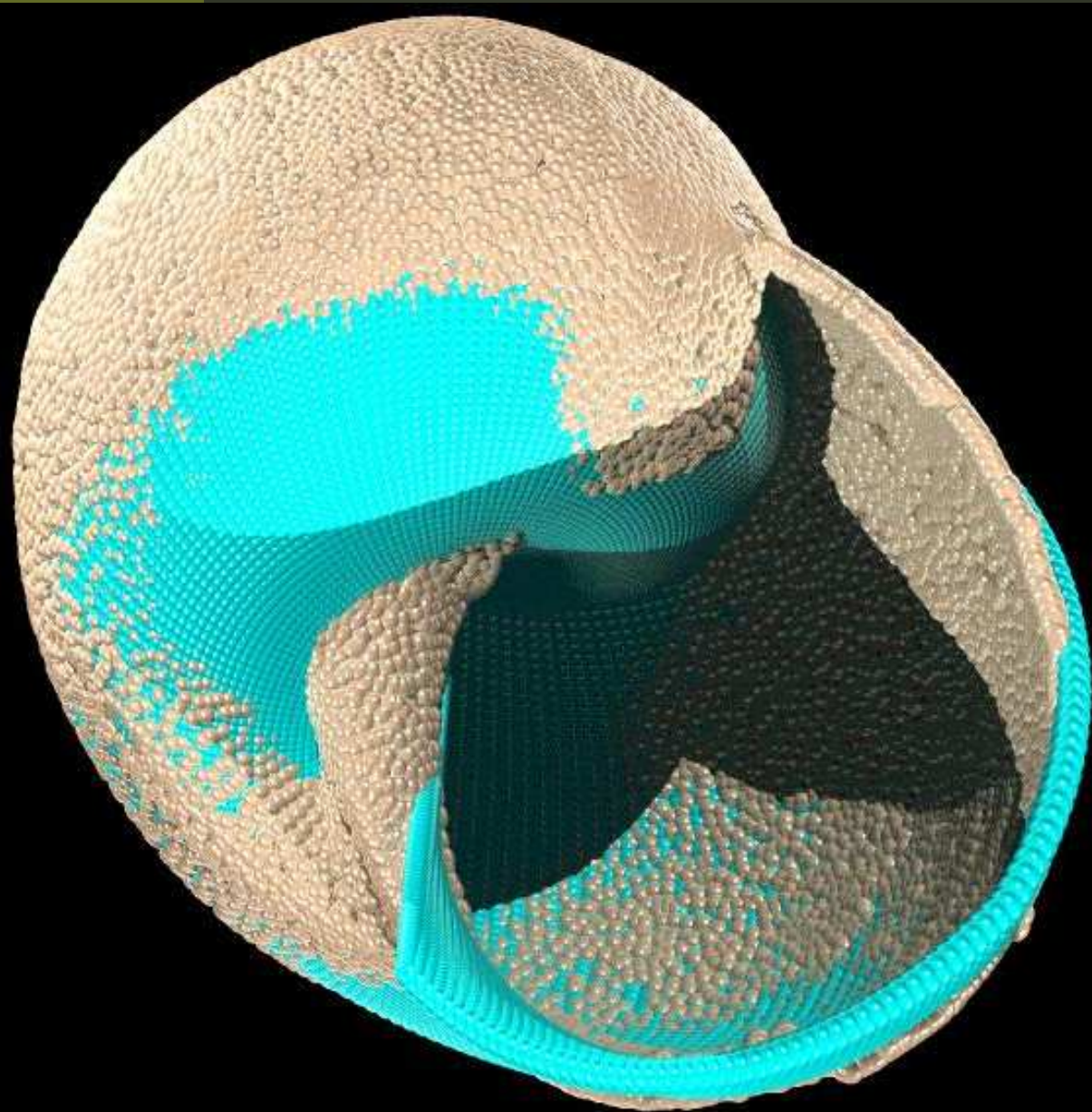
Beispiel 2: Vergleich



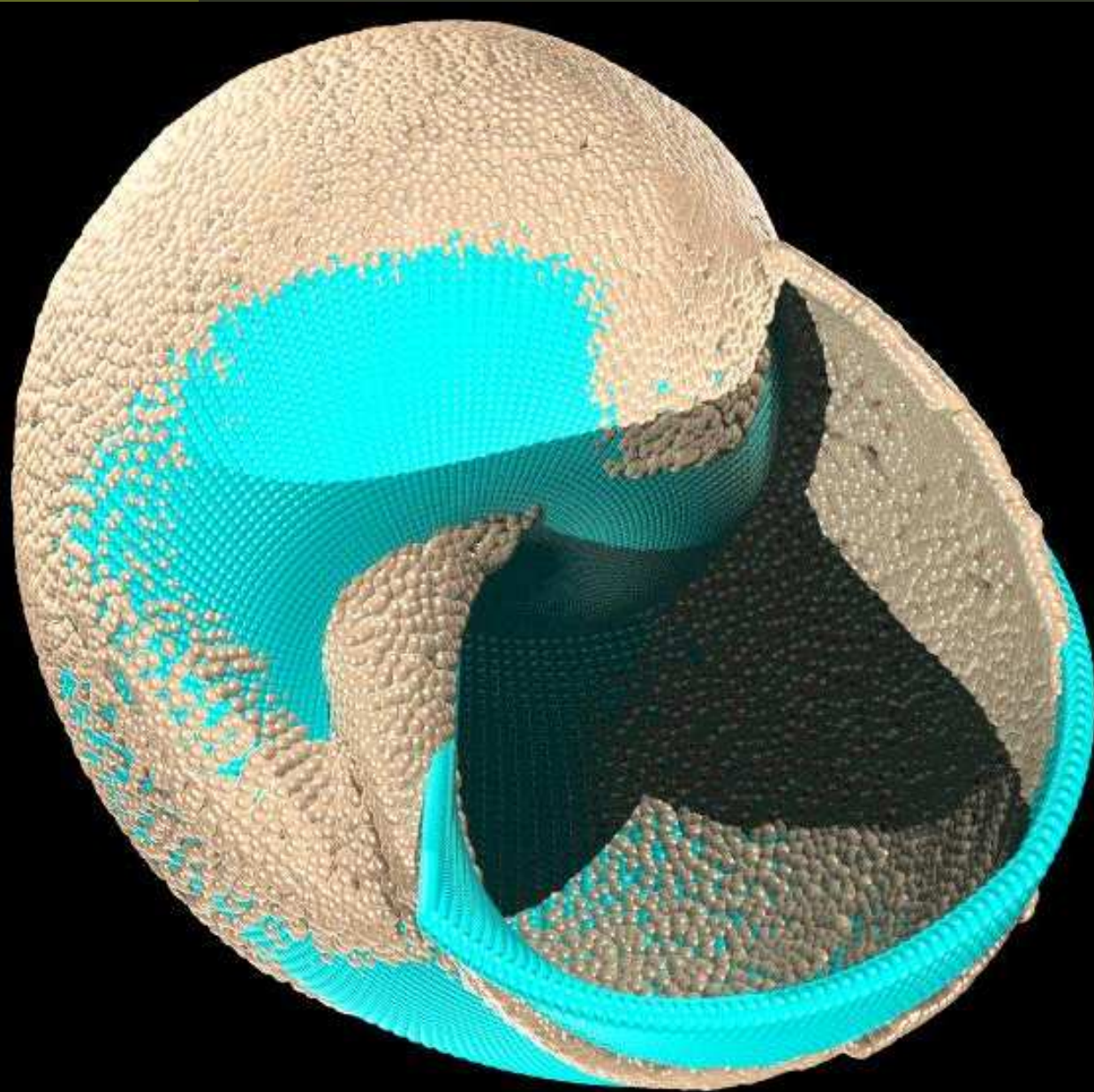
Beispiel 2: Vergleich



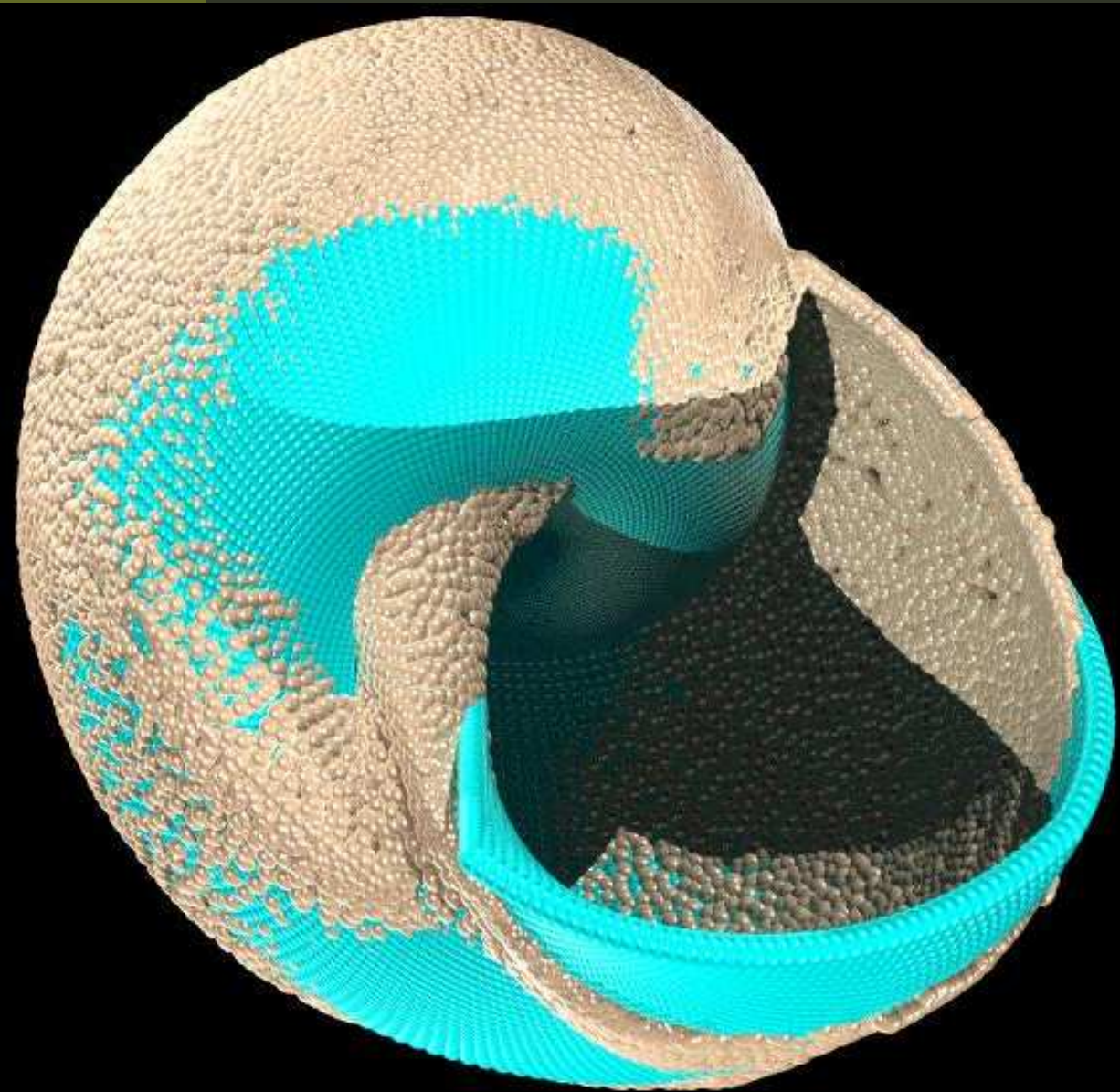
Beispiel 2: Vergleich



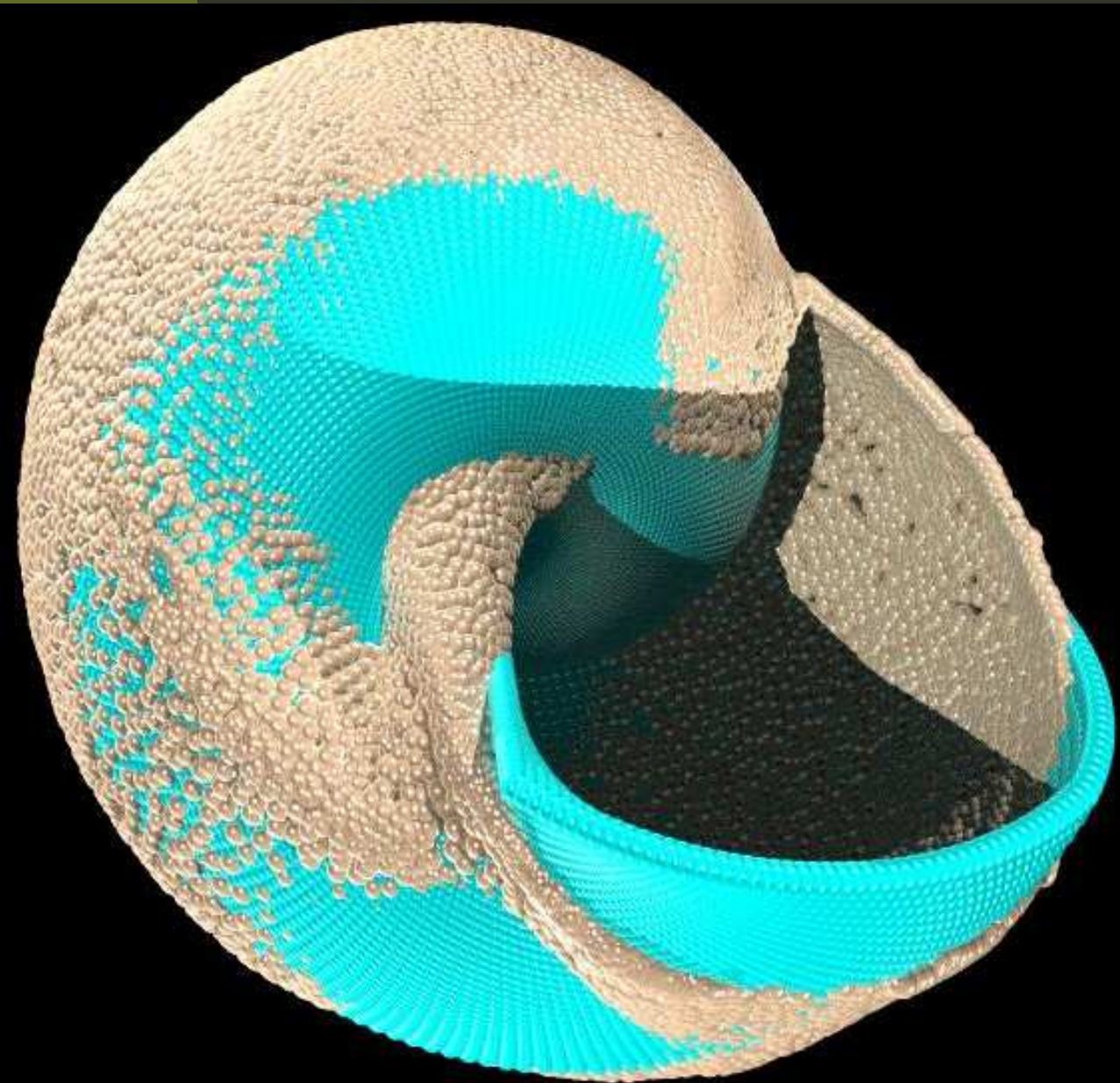
Beispiel 2: Vergleich



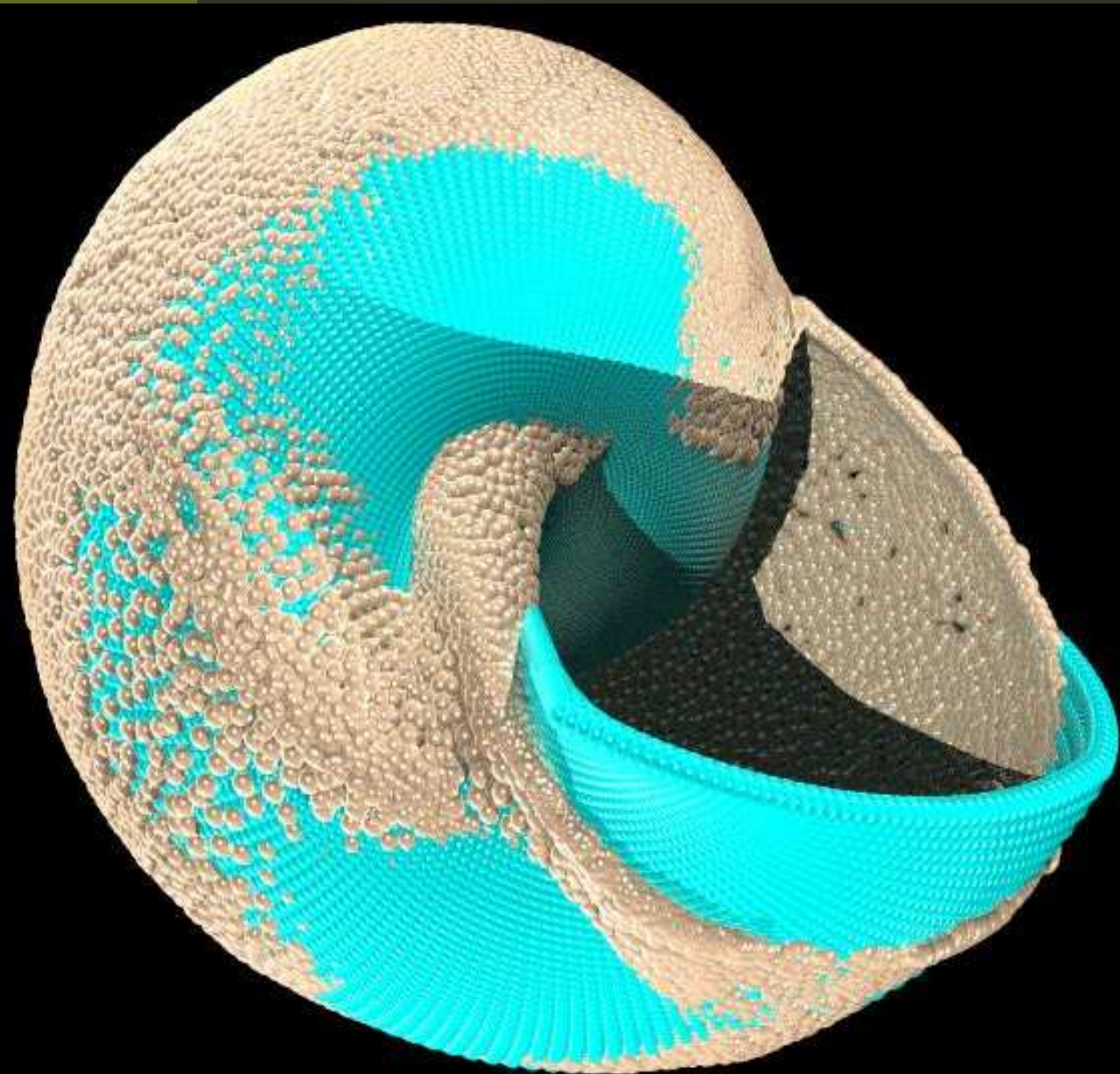
Beispiel 2: Vergleich



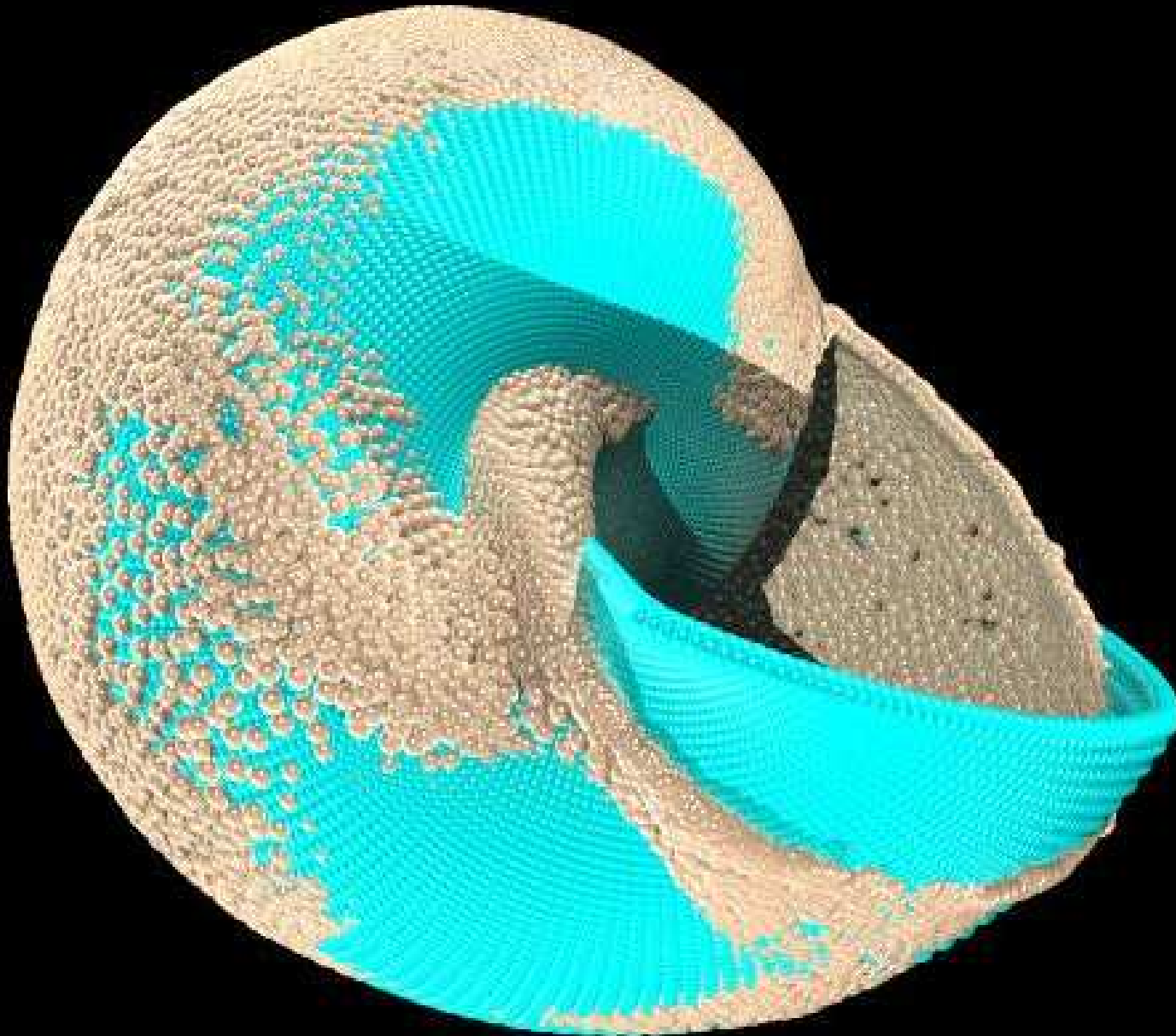
Beispiel 2: Vergleich



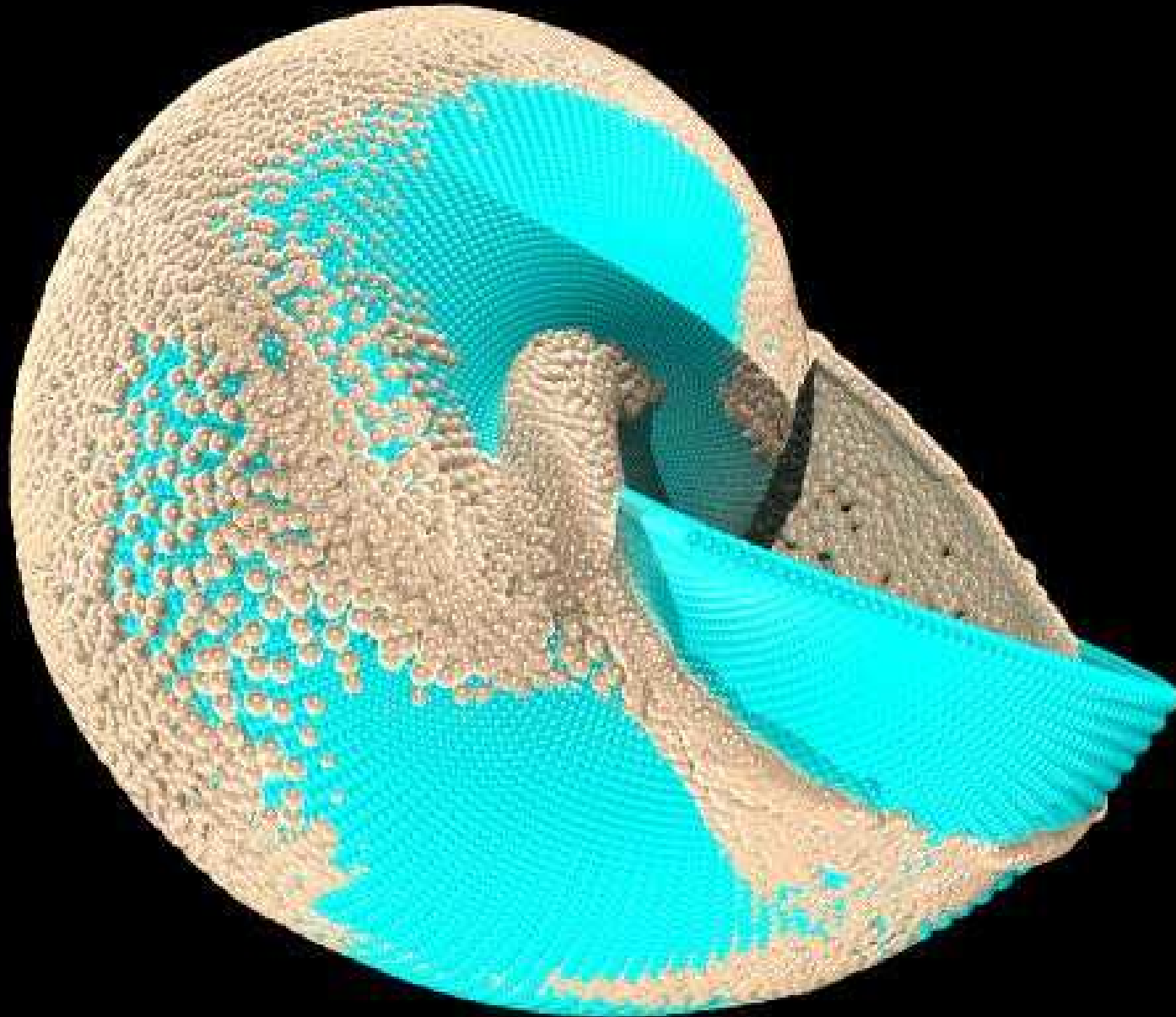
Beispiel 2: Vergleich



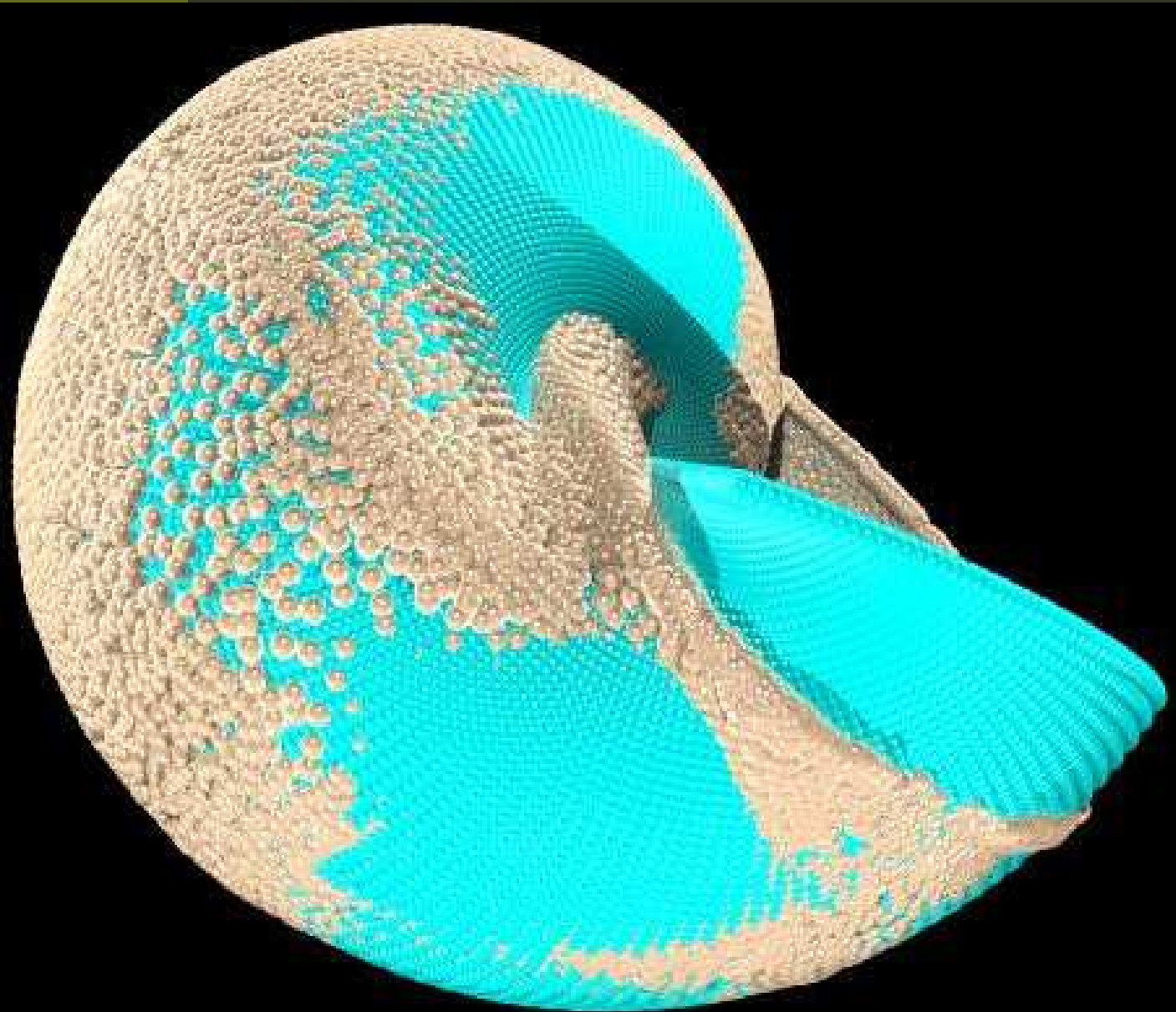
Beispiel 2: Vergleich



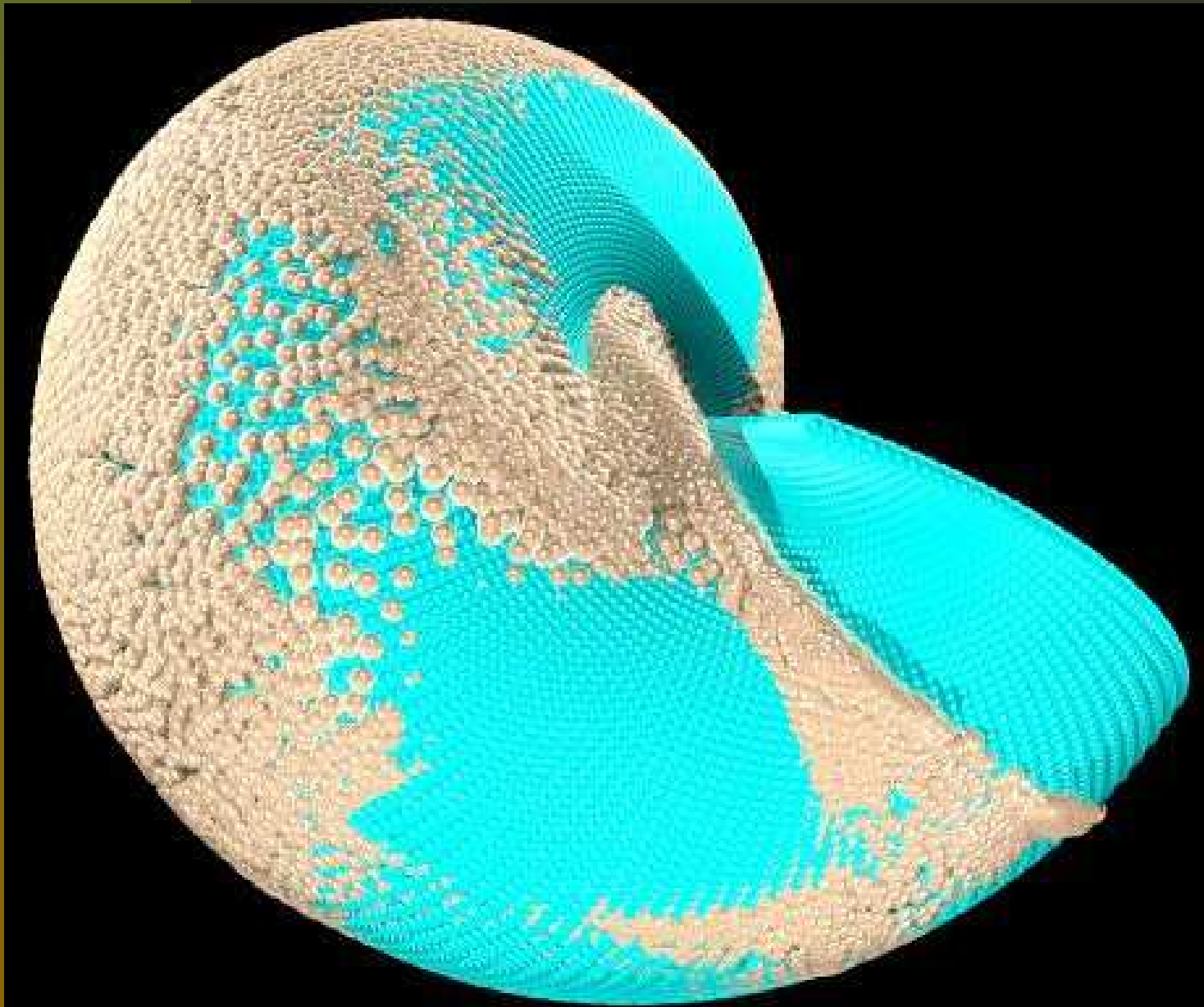
Beispiel 2: Vergleich



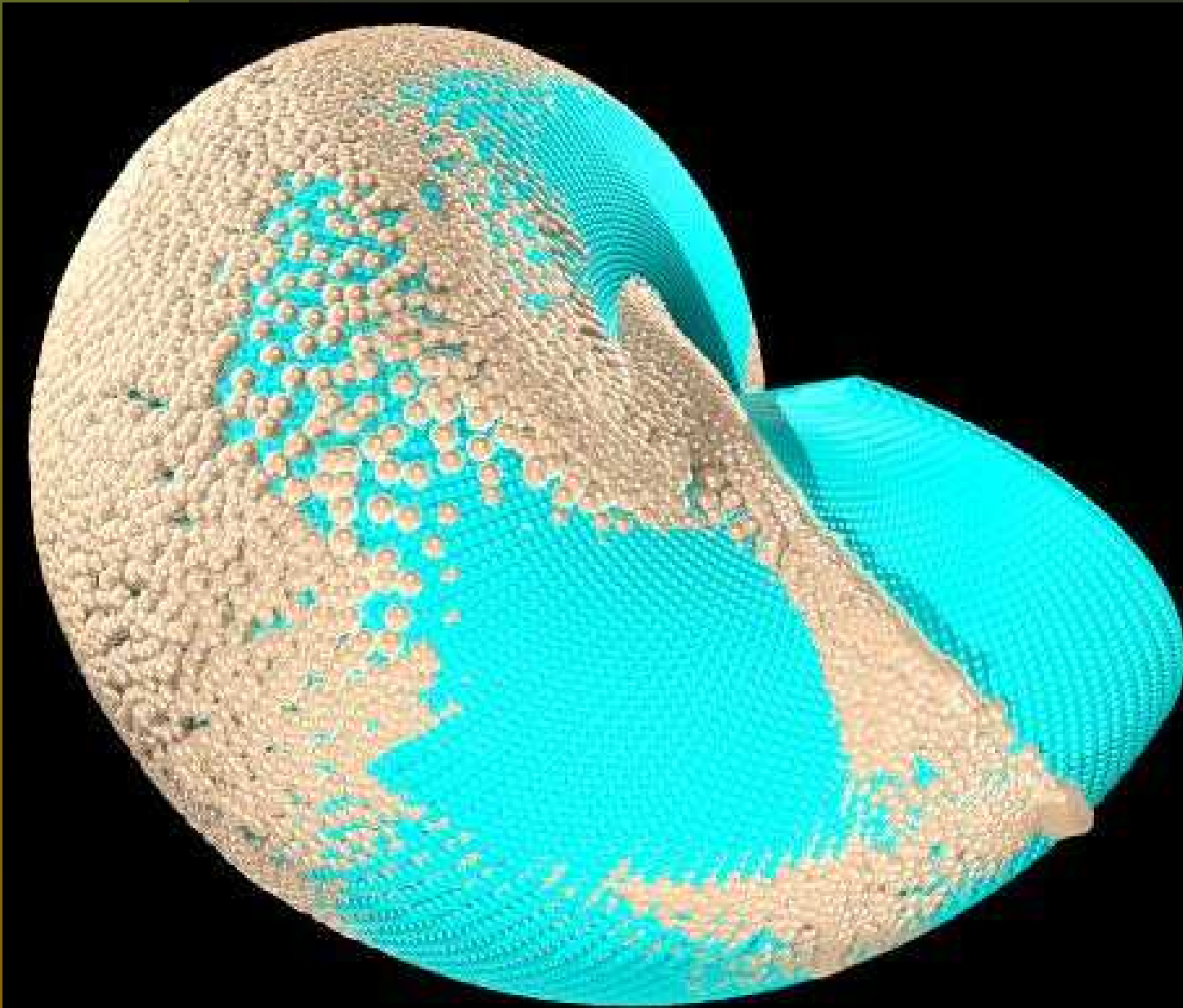
Beispiel 2: Vergleich



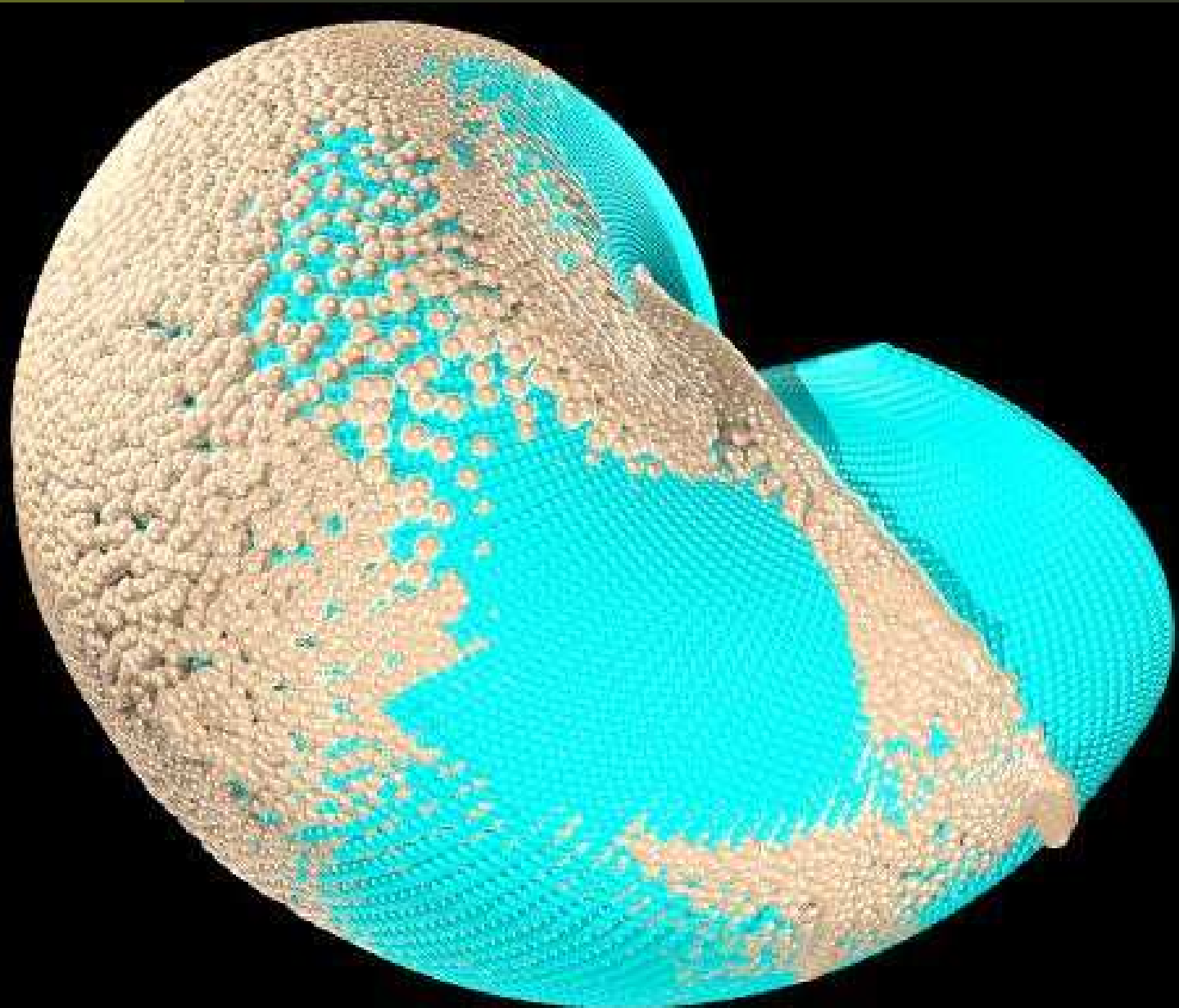
Beispiel 2: Vergleich



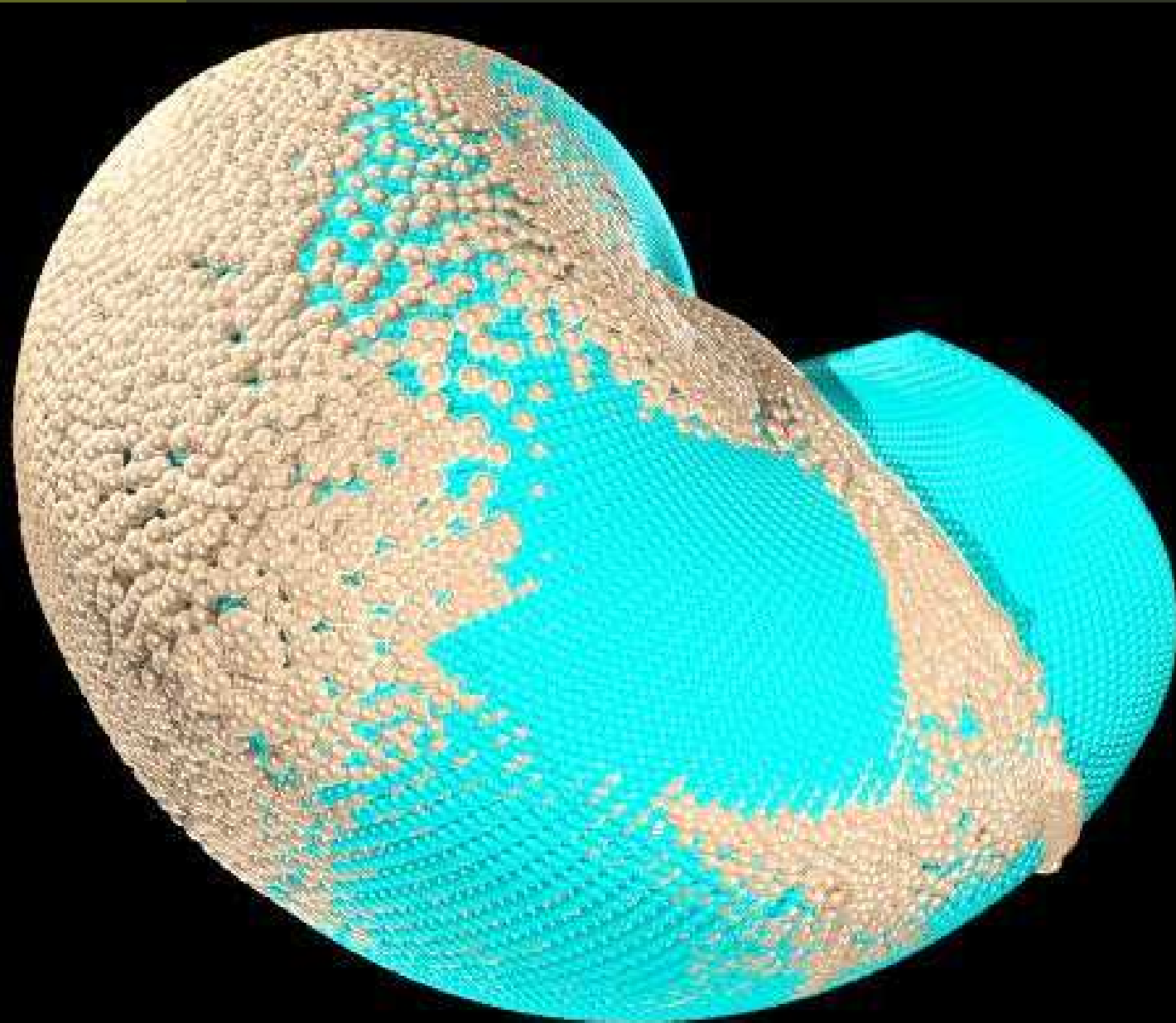
Beispiel 2: Vergleich



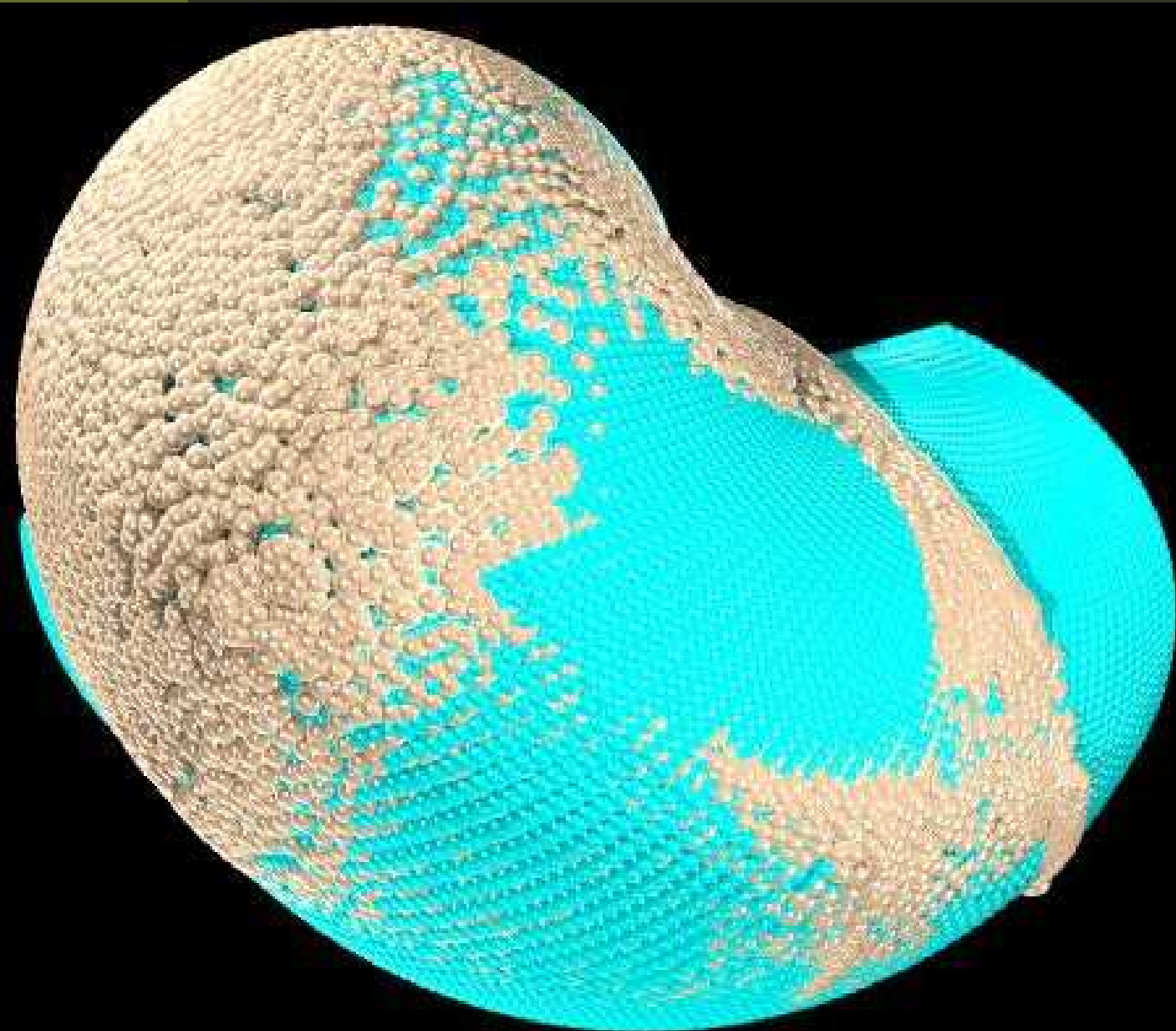
Beispiel 2: Vergleich



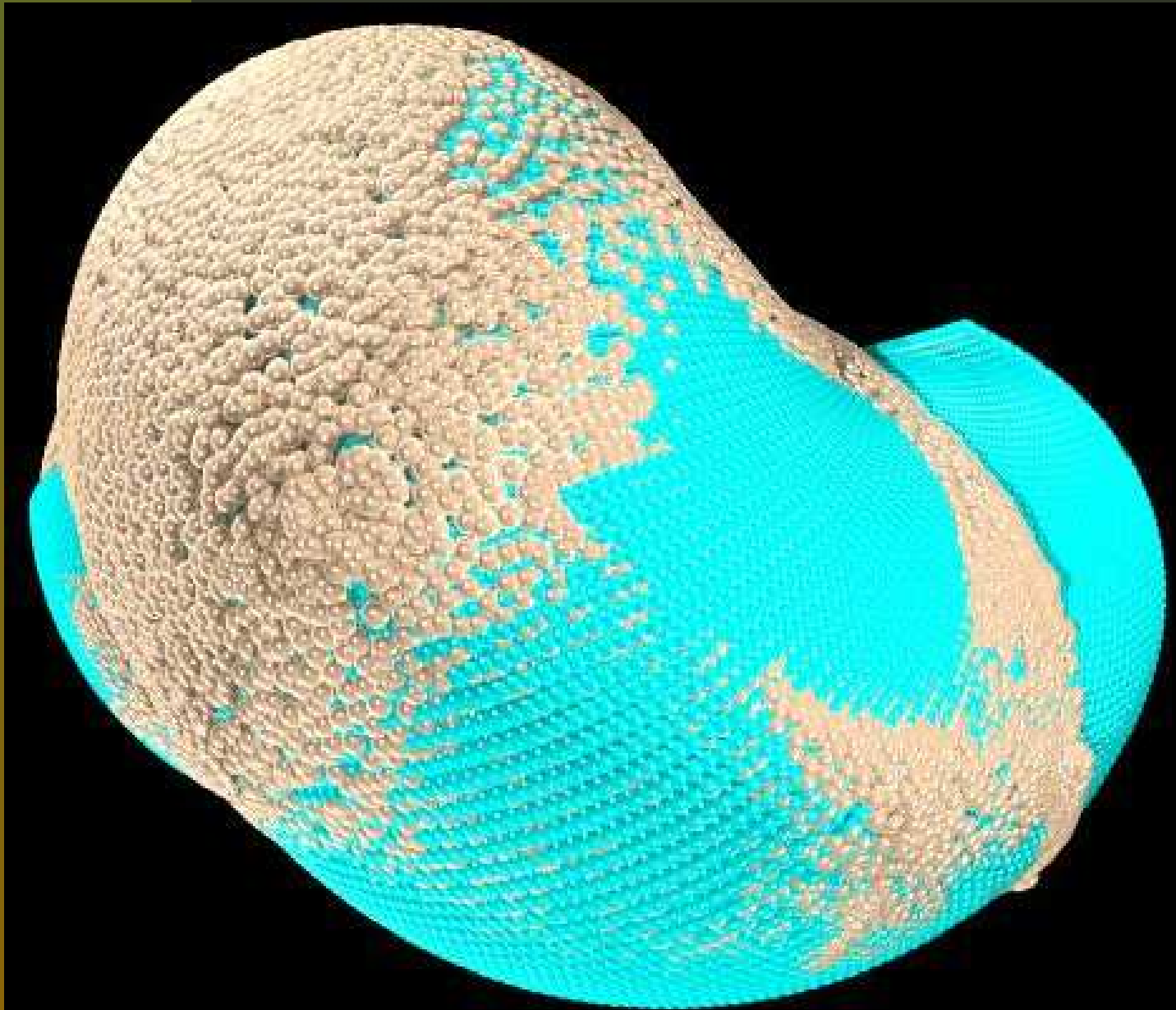
Beispiel 2: Vergleich



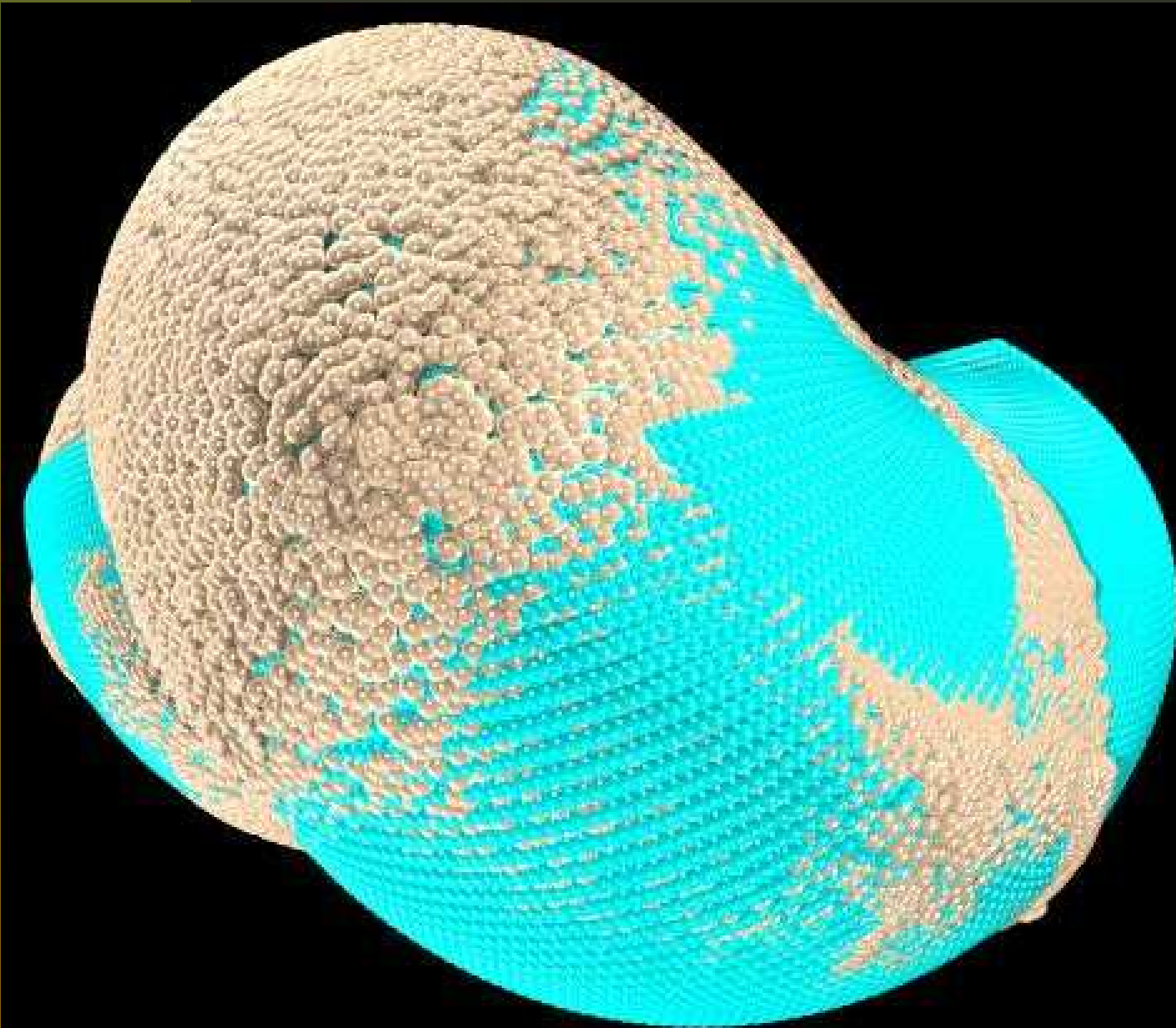
Beispiel 2: Vergleich



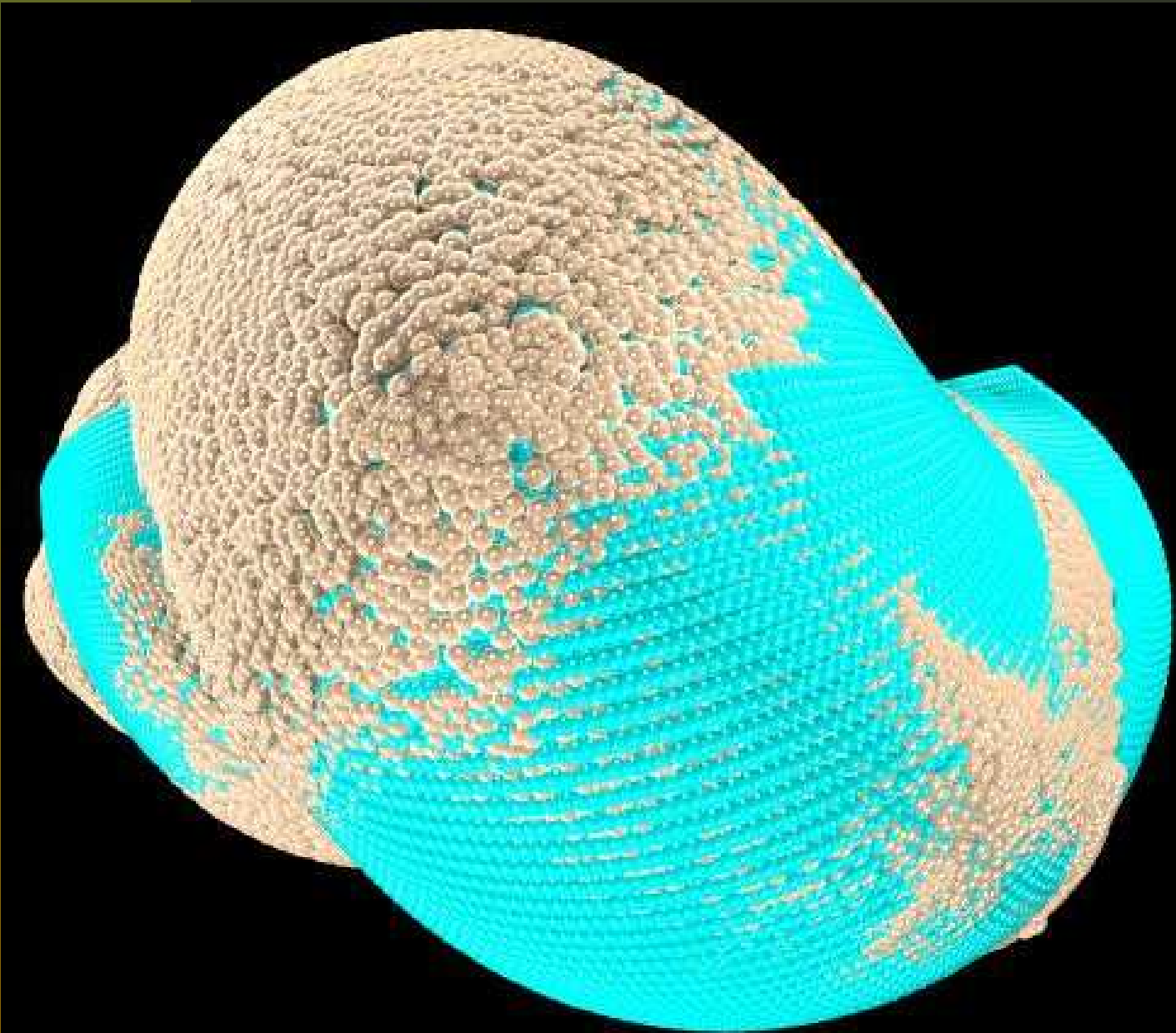
Beispiel 2: Vergleich



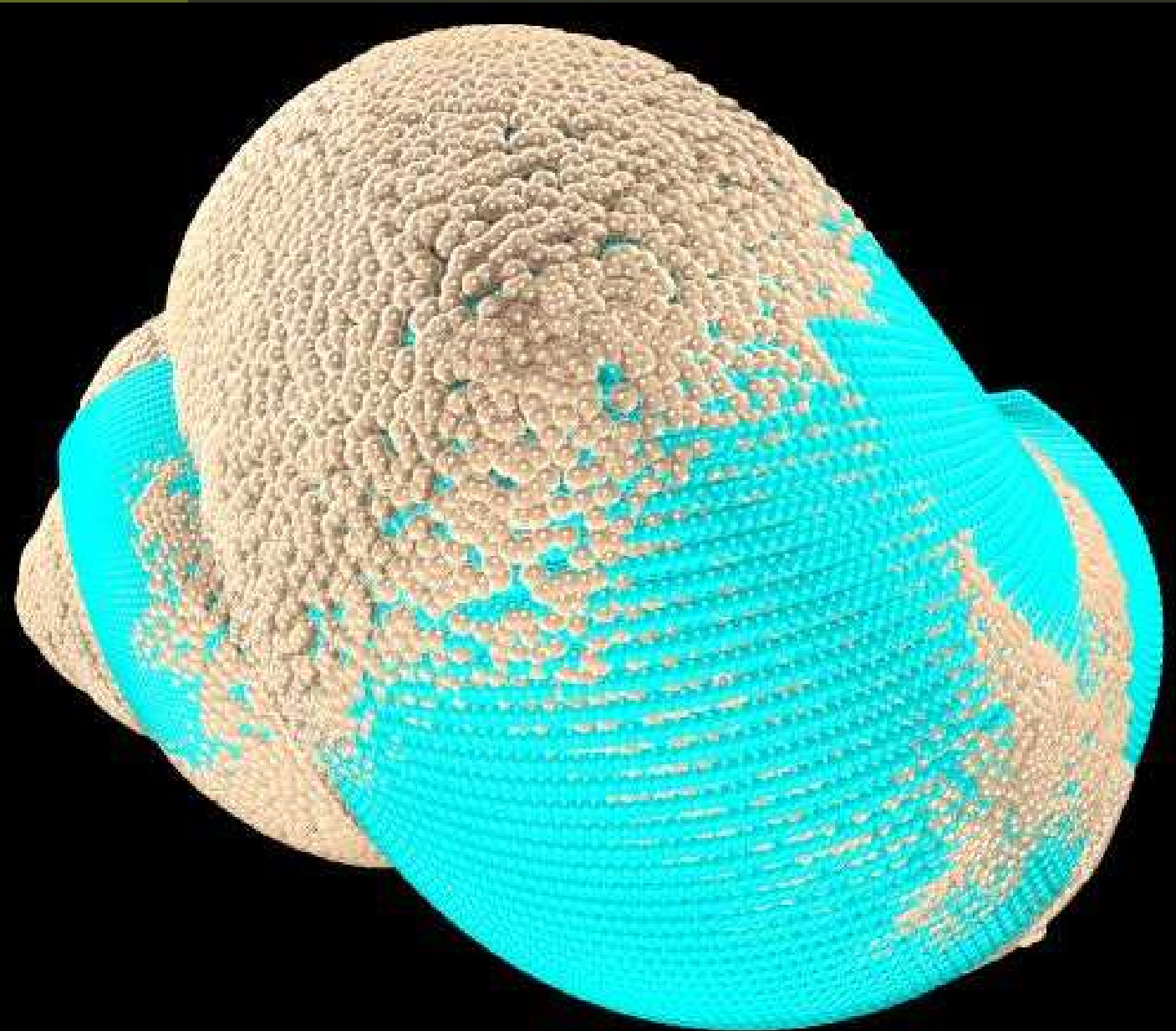
Beispiel 2: Vergleich



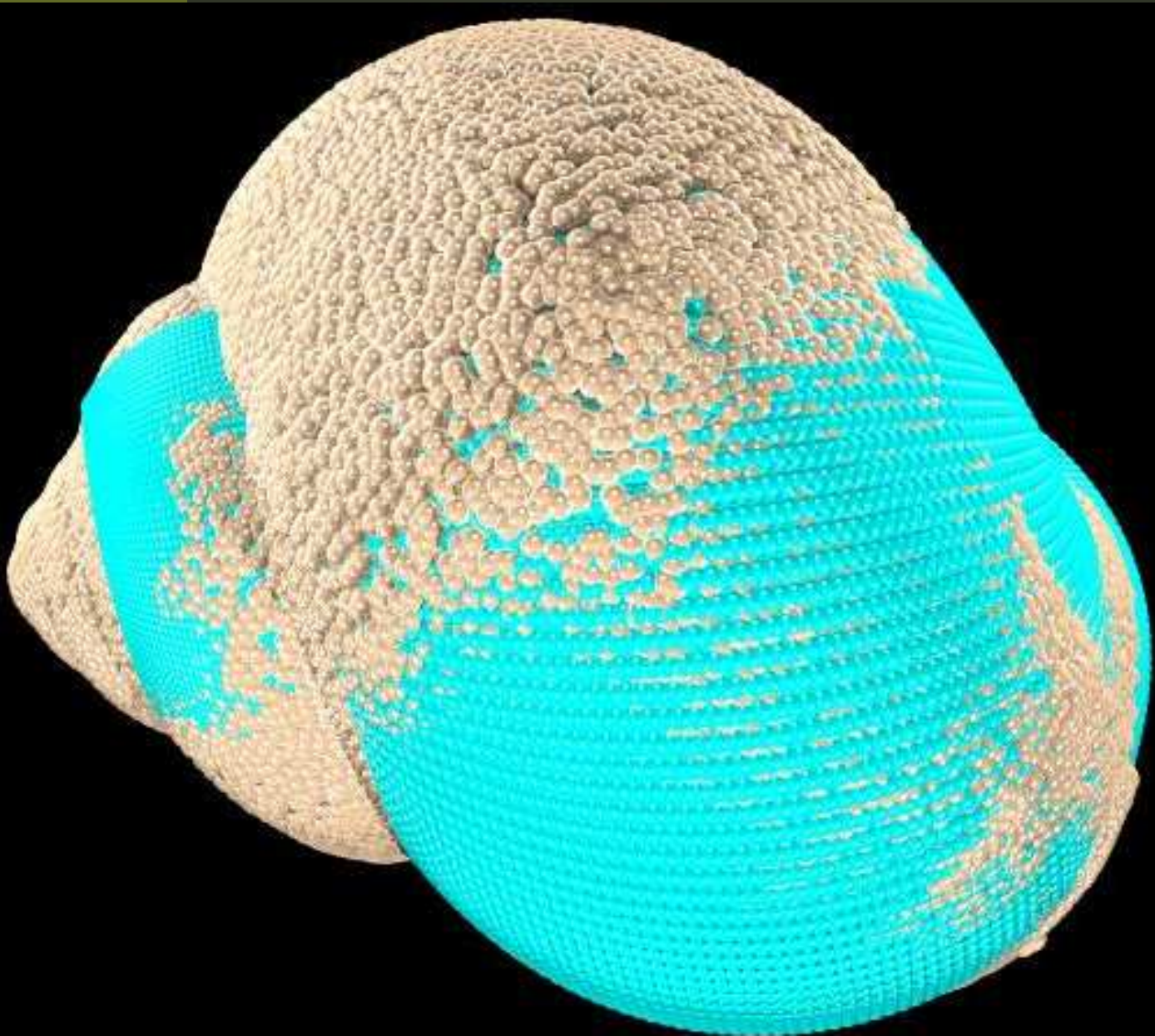
Beispiel 2: Vergleich



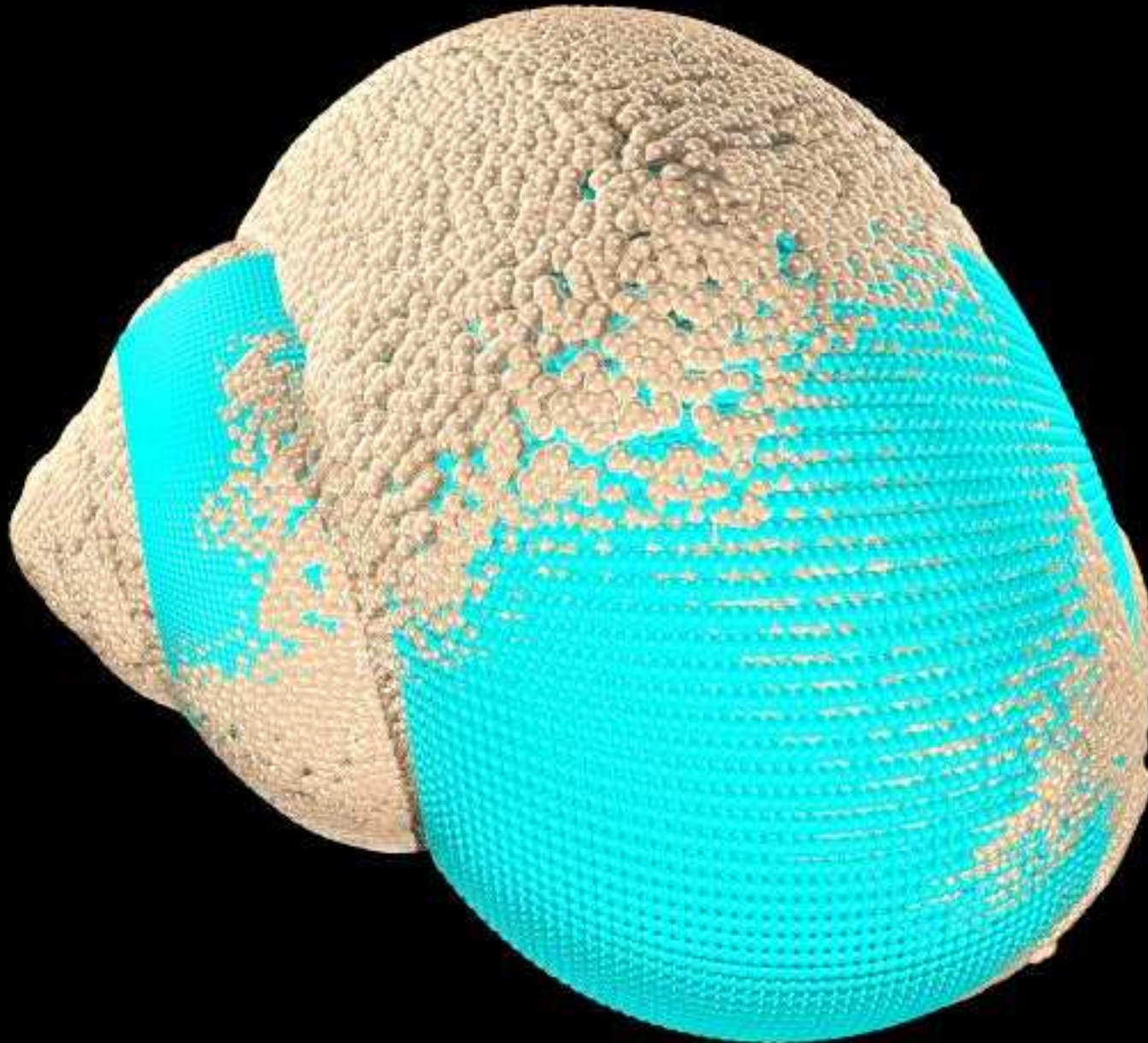
Beispiel 2: Vergleich



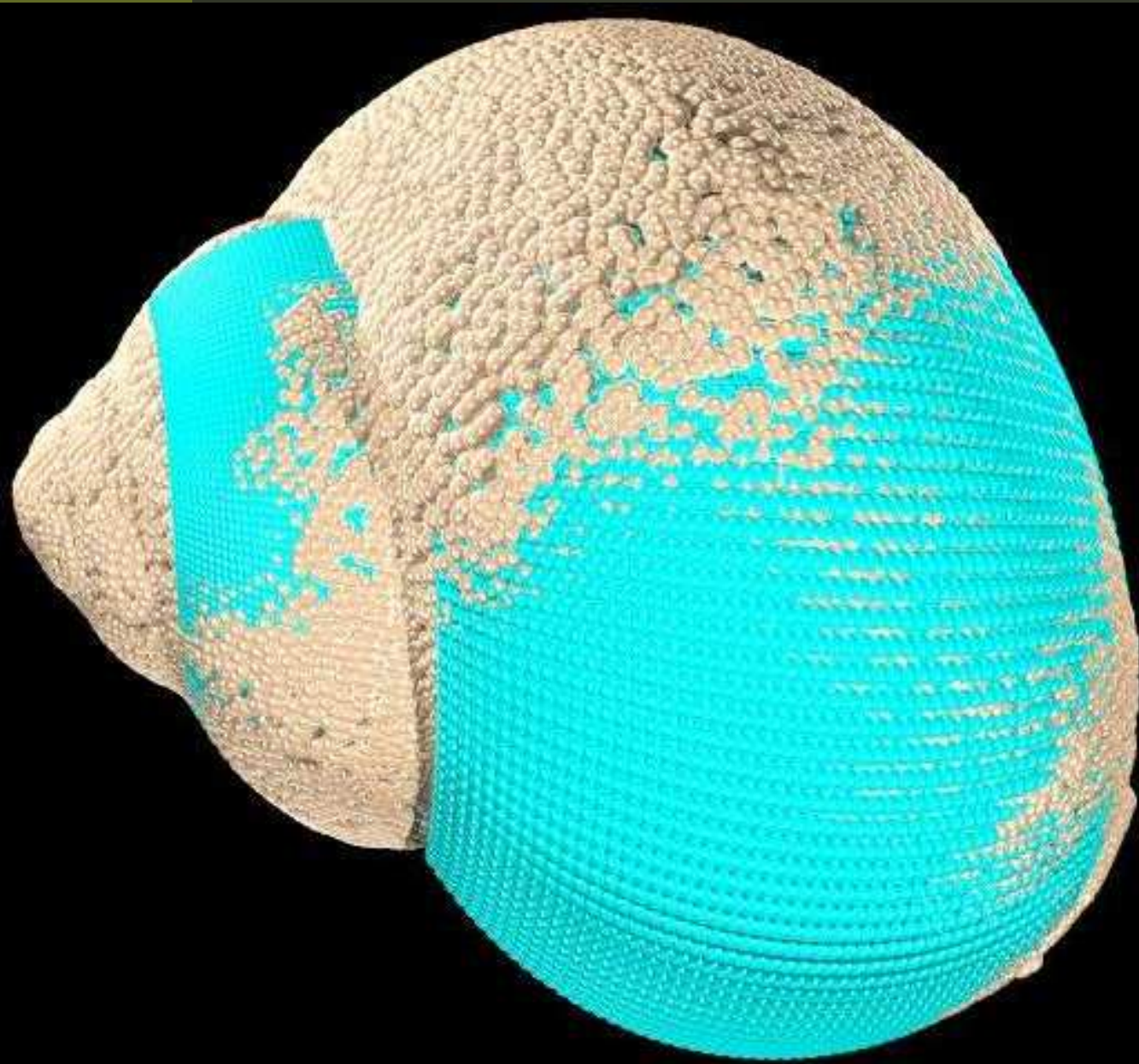
Beispiel 2: Vergleich



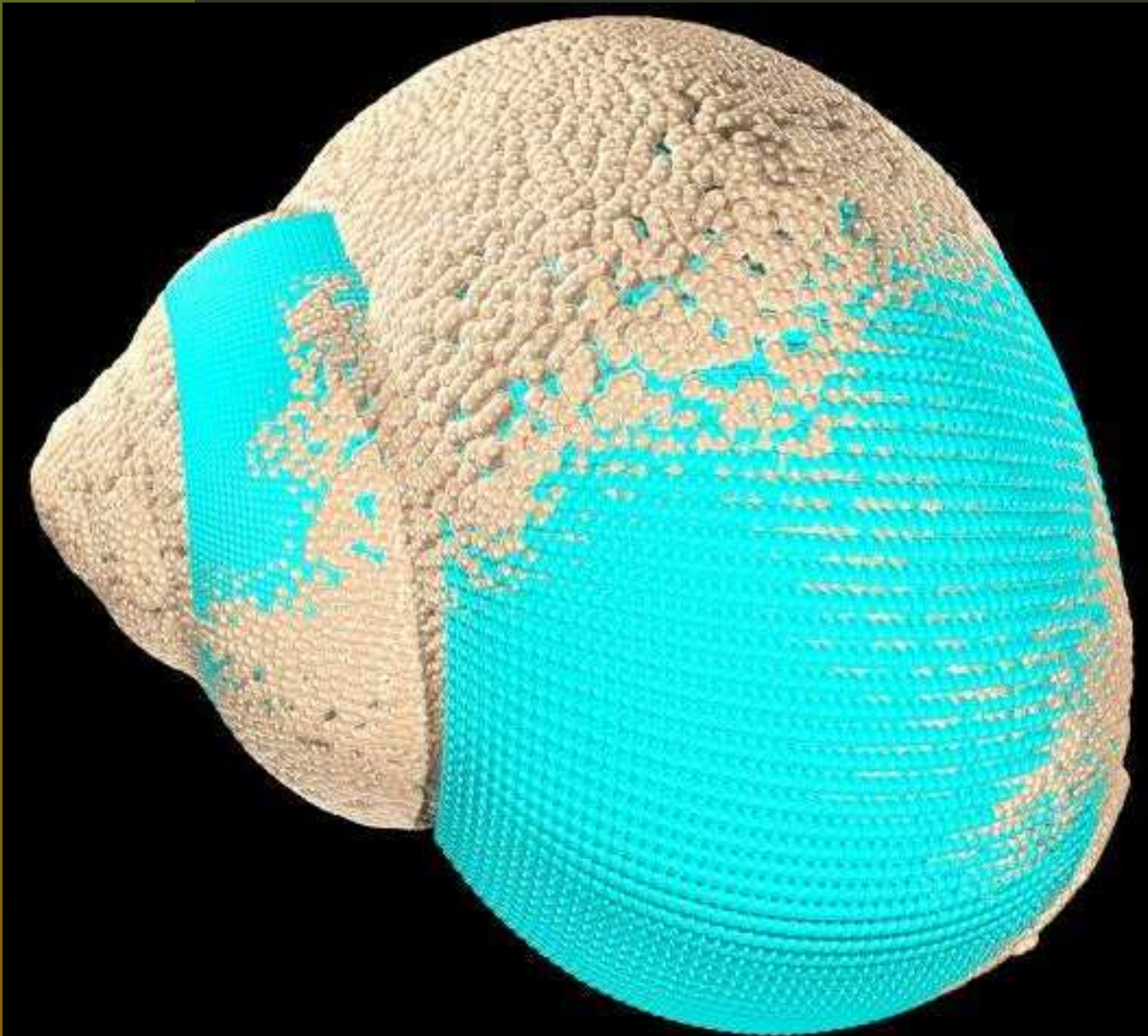
Beispiel 2: Vergleich



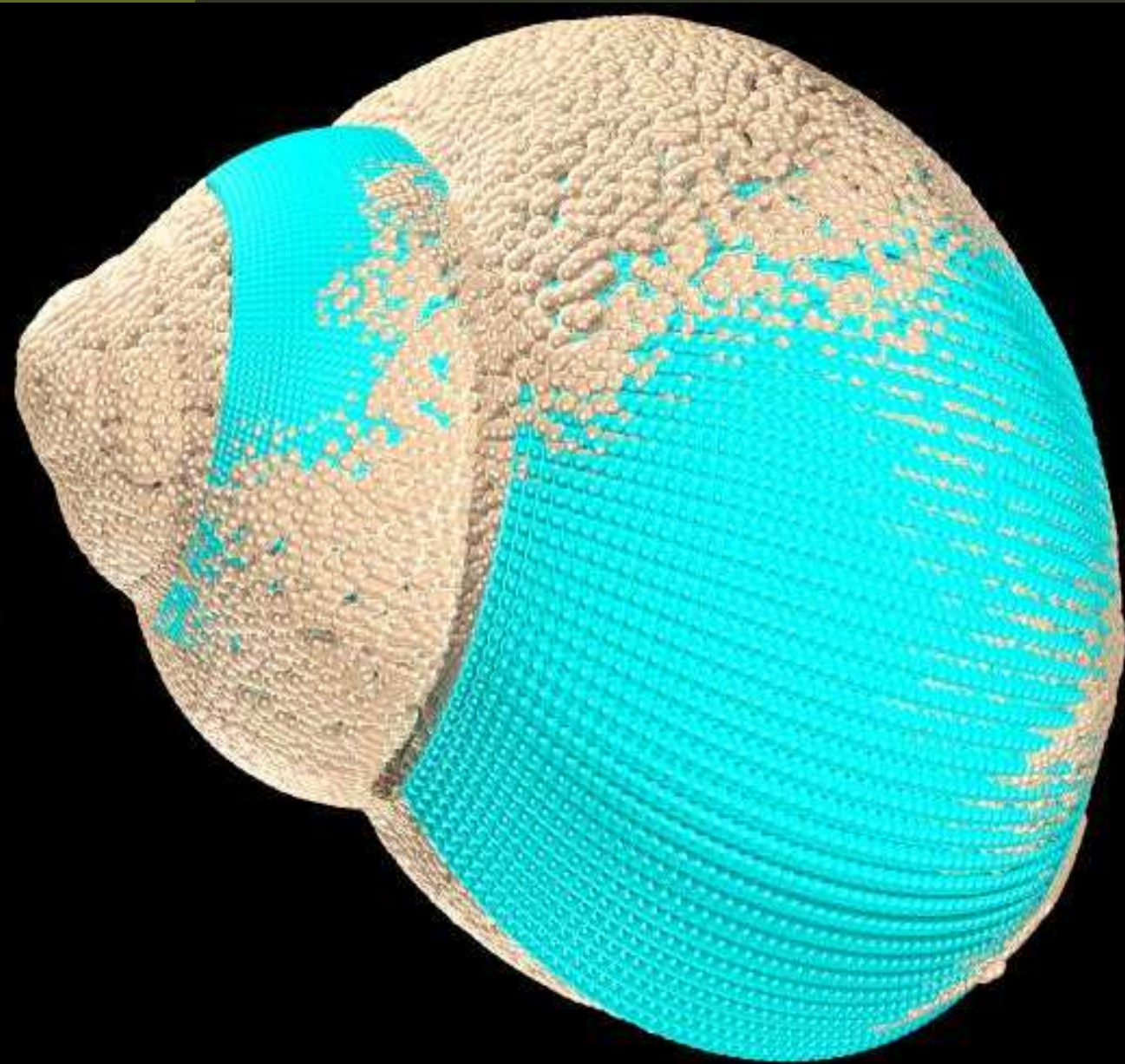
Beispiel 2: Vergleich



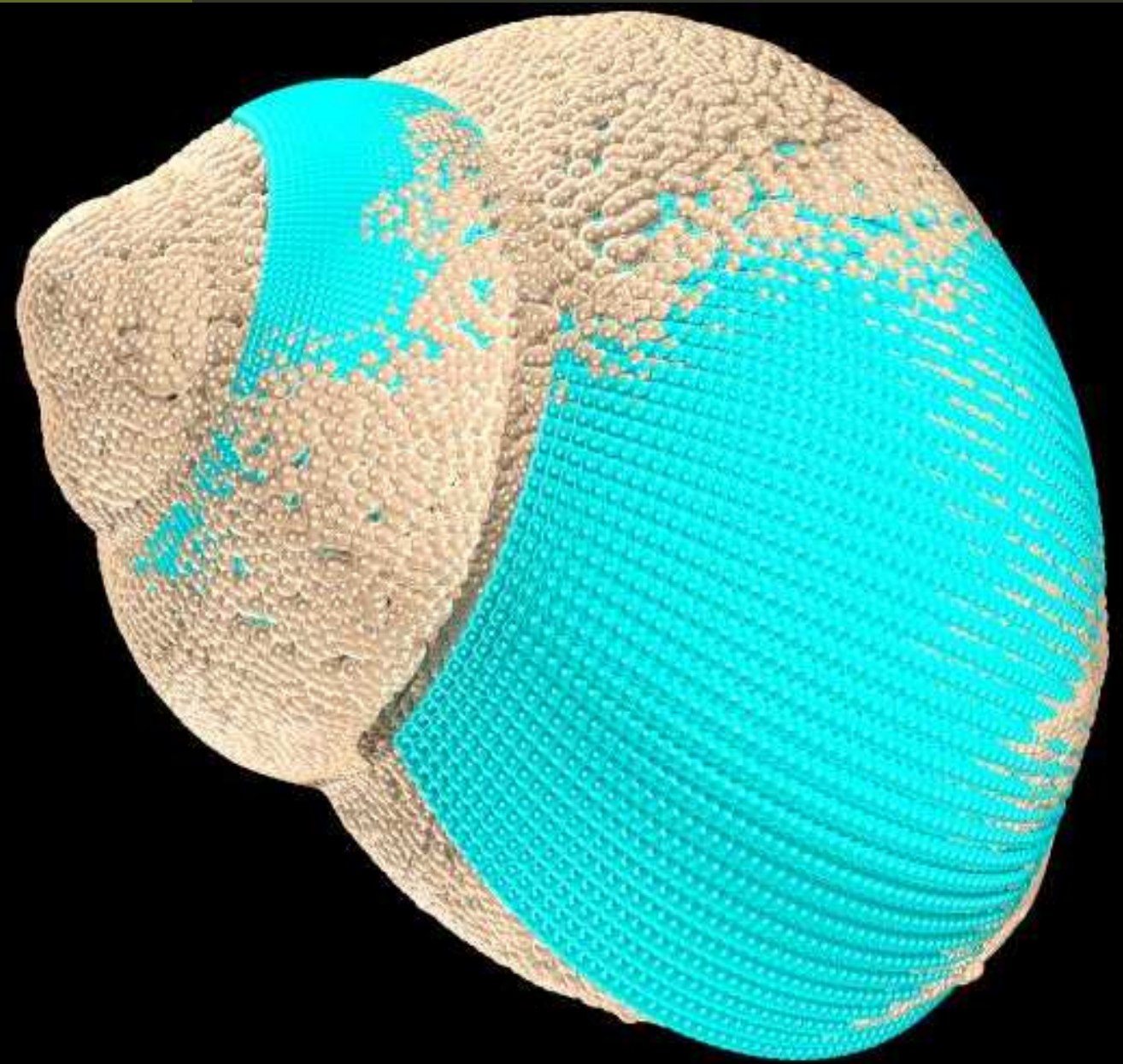
Beispiel 2: Vergleich



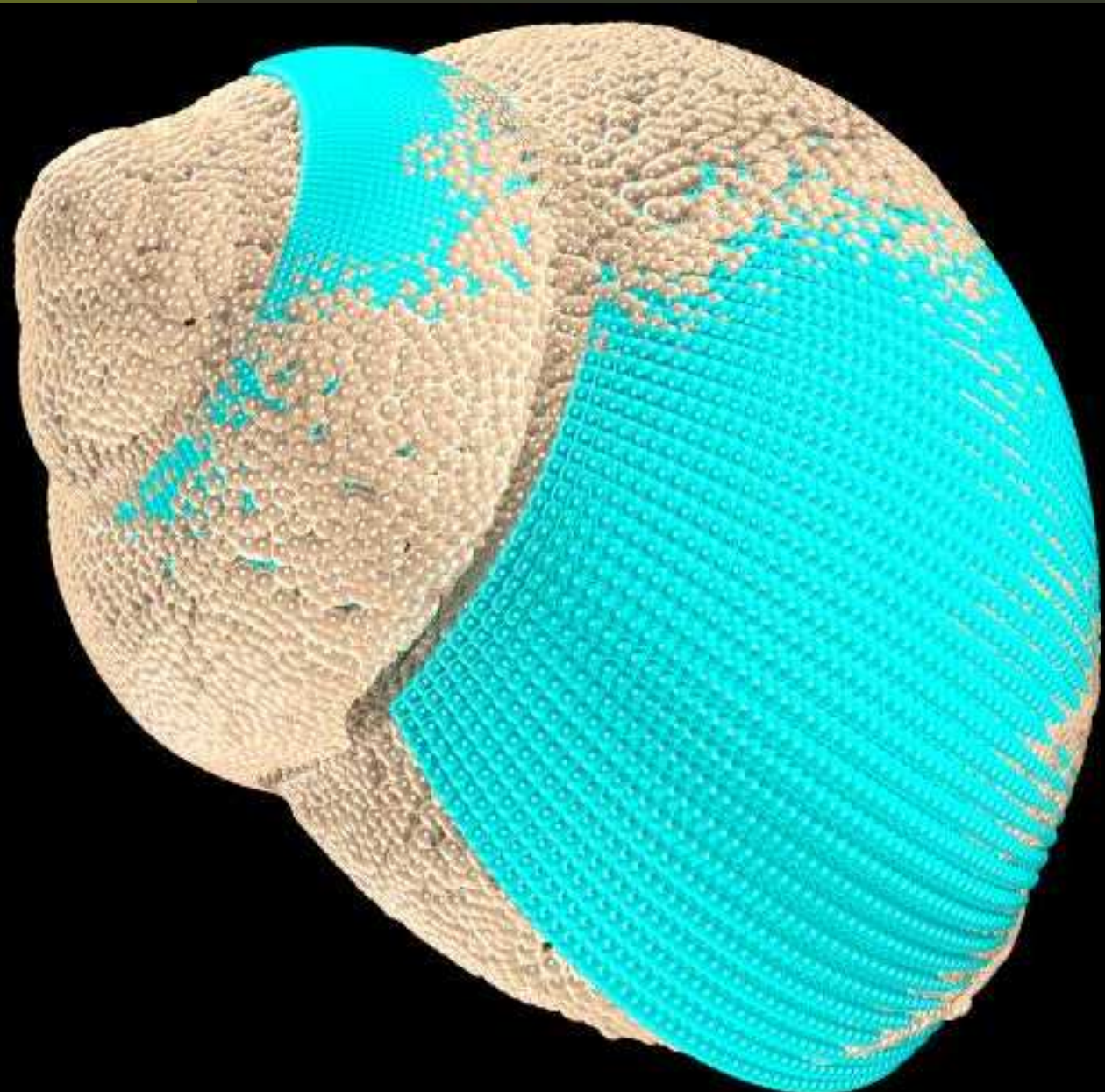
Beispiel 2: Vergleich



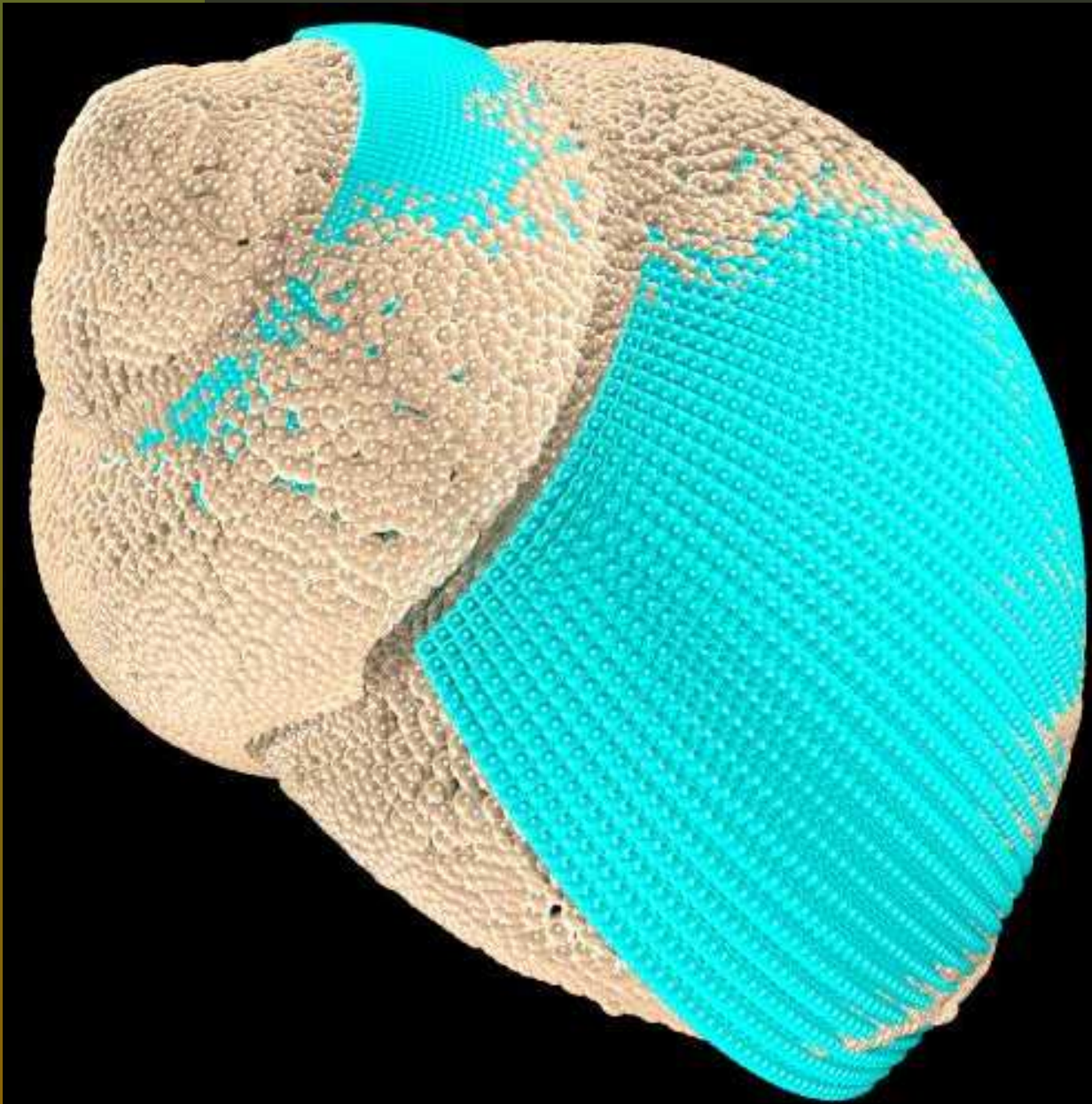
Beispiel 2: Vergleich



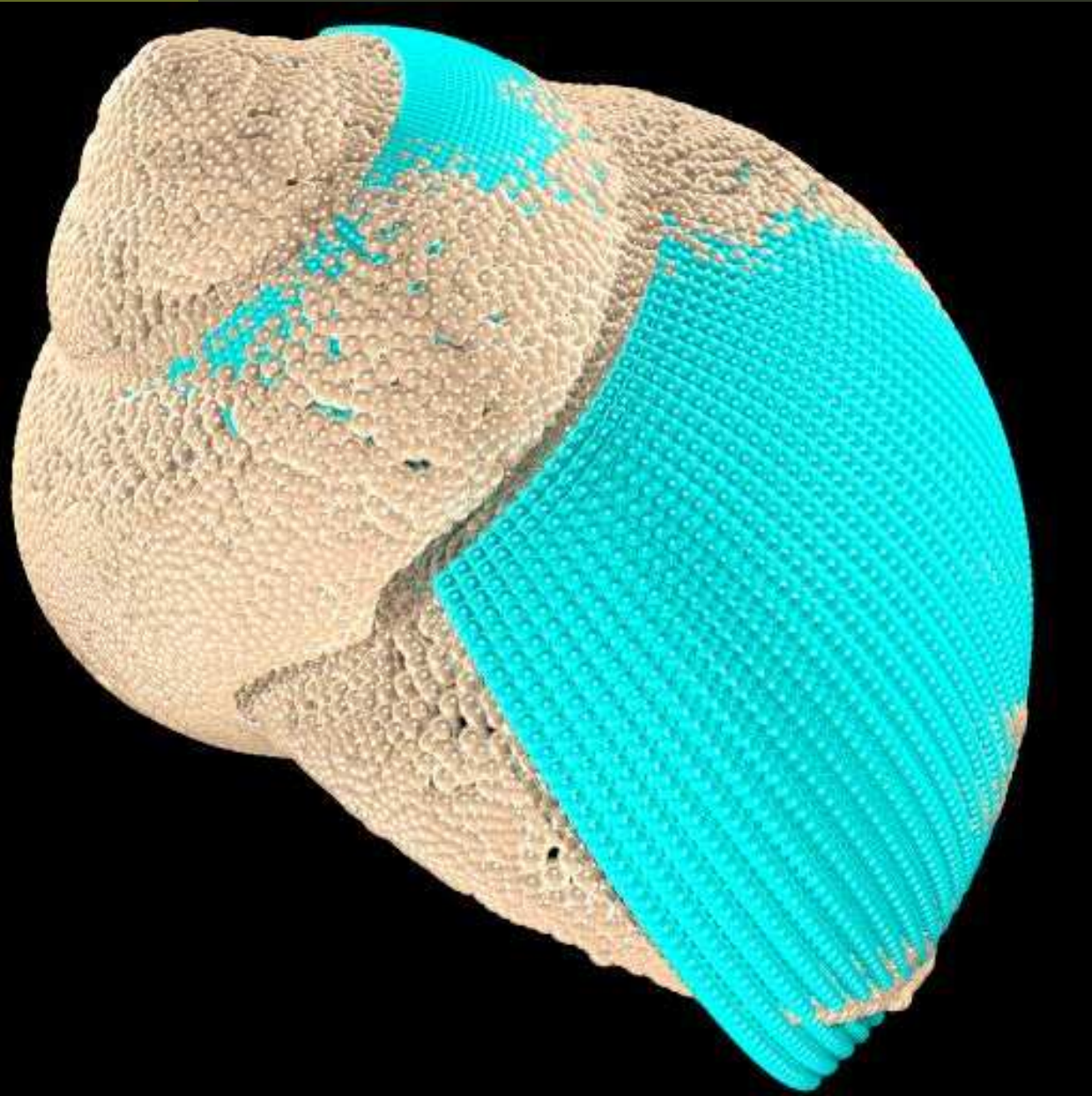
Beispiel 2: Vergleich



Beispiel 2: Vergleich



Beispiel 2: Vergleich



Übersicht

- Gruppe der äquiformen Bewegungen
- Koordinaten für Linienelemente
- Ein Punktmodell der Menge aller Linienelemente
- Lineare Linienelementkomplexe
- Spiralflächen
- Flächenerkennung und Rekonstruktion
- Beispiele