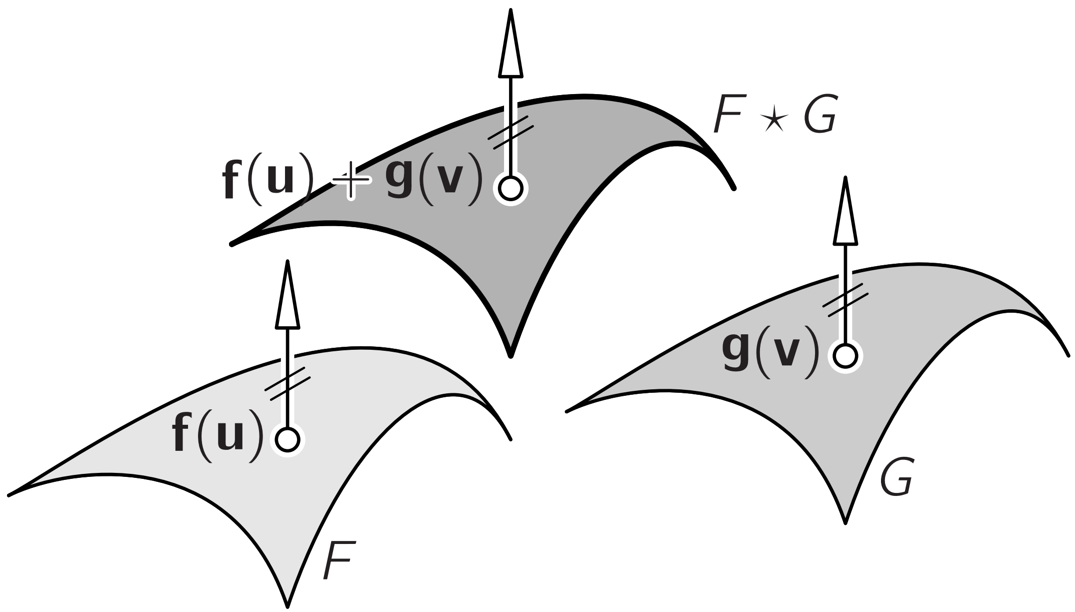
Quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen und deren Minkowski-Summen

Boris Odehnal

(aus einer gemeinsamen Arbeit mit M. Peternell)

Technische Universität Wien

Minkowski-Summe / Convolution



$$F \star G = \{\mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{v}) : \mathbf{n_f}(\mathbf{u}) \parallel \mathbf{n_g}(\mathbf{v})\}$$

$F \star G \ldots F$ unter allen Translationen von G

Numerische Berechnung ist kein Problem, aber exakte Parametrisierungen sind schwer zu bekommen!

Hier: keine Faltung, obwohl in der Computer-Graphik durchaus gebräuchlich.

Was ist bisher geschehen?

[Pot 1] Rational* curves and surfaces with rational offsets, 1995.

[Pet-Pot] A Laguerre geometric approach to rational offsets, 1998.

[Ju] Triangular Bézier patches with linear normal vector field, 1998.

[Pet-Man] Convolution of paraboloid and LN** surface, 2002.

[Mühl-Pot] Convolution of rational ruled surfaces, 2003.

[Sam] Convolution of rational surface and an LN surface is rational, 2006.

[Láv-Bas 1] Convolution surfaces of quadratic triangular Bézier surfaces are rational, 2006.

[Pet-Ode] Convolution surfaces of quadratic triangular Bézier surfaces. CAGD 25 (2008), 116–129.

[Láv-Bas 2] PN*** surfaces and their convolution with rational surfaces, 2008.

* rational . . . gestattet rationale Parametrisierung

** LN . . . linear normal, also i. W. $\mathbf{n}(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 1)^\top$

*** PN (Pythagorean normal) . . . rational parametrisiertes Einheitsnormalenvektorfeld

Warum gerade quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen?

1. niedriger Grad, Kontrollstruktur schnell und einfach zu bestimmen

2. Geometrie dahinter ist verständlich, sogar vom synthetischen Standpunkt aus

3. LN-Eigenschaft erlaubt einfache Berechnung der Minkowski-Summe, der Parallelflächen u.a.

4. findet Anwendung im geometry processing

Was sind die Probleme und wie löst man sie?

LN-Eigenschaft sieht man der Parametrisierung zuerst nicht an.

Daher: Umparametrisierung, oft mit Tricks, meist geometrische Überlegungen, die rationale Abbildungen zur Erzeugung der Parametrisierung nützen (stereographische Projektion, Netzprojektion, usw.)

Hier führt die Untersuchung der Dual-Fläche F^* gemeinsam mit Cremona-Transformationen zum Ziel:

$$F \text{ ist LN-Fläche.} \Longleftrightarrow F^* \text{ ist ein Graph.}$$

Was kommt auf Sie zu?

1. LN-Flächen: Dualfläche, die Normalen, . . .
2. Quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen: Veronese, . . .
3. Umparametrisierung: Basispunkte, Cremona-Transformationen, . . .
4. Beweis der LN-Eigenschaft: rechnerisch und synthetisch
5. Umparametrisierung aller affinen Typen
6. Minkowski-Summen: Beispiele

LN-Flächen

LN-Flächen

rationale Fläche F ist LN-Fläche

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists$ Parametrisierung $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ mit $\mathbf{n}_\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}_1 \cdot u_1 + \mathbf{n}_2 \cdot u_2 + \mathbf{n}_0, \qquad \mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^3$

wird i. A. nicht vorliegen $\Longrightarrow$ Ein Parmeterwechsel muß das erzwingen!

Rang von $N = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_0) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ entscheidend:

rg $N = 1 \ldots F$ ist Teil einer Ebene

rg $N = 2 \ldots F$ ist Teil eines Zylinders

daher im Folgenden rg $N = 3$

Ein Blick auf F^*

o.B.d.A.: $\mathbf{n}_1 = (1,0,0)^\top$, $\mathbf{n}_2 = (0,1,0)^\top$, $\mathbf{n}_0 = (0,0,1)^\top$ (eventuell nach linearem Parameterwechsel)

Tangentialebenen von F:

$T(u_1, u_2):\ u_1 x + u_2 y + z = h(u_1, u_2)$ ... mit Stützfunktion $h:\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow T(u_1, u_2) \text{ ist Graph über } \mathbb{R}^2,$$

$$\text{also } T(u_1, u_2) = (u_1, u_2, h(u_1, u_2))^\top \text{ und i. F. } h \text{ rational}$$

Noch ein Blick auf F^*

homogene Koordinaten im Raum der Tangentialebenen:

$$u_1 = y_1 y_3^{-1},\ u_2 = y_2 y_3^{-1},\ h(y_1, y_2) = y_0 y_3^{-1} = \frac{a(y_1 y_3^{-1}, y_2 y_3^{-1})}{b(y_1 y_3^{-1}, y_2 y_3^{-1})}$$

mit $\deg a = k$, $\deg b = l$ und der Annahme: F sei von der Klasse n

$$F^*:\ y_0 y_3^{k-l-1} b(y_1, y_2, y_3) - a(y_1, y_2, y_3) = 0, \text{ wenn } k \geq l+1,$$

$$F^*:\ y_0 b(y_1, y_2, y_3) - y_3^{l+1-k} a(y_1, y_2, y_3) = 0, \text{ wenn } k \leq l+1$$

alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $n-2$ verschwinden bei $(1:0:0:0) \Longrightarrow$

Die Fernebene $x_0 = 0$ ist Tangentialebene mit Vielfachheit $n-1$!

Ein Blick auf die Normalen

$\Longrightarrow$ Für $\mathbf{n}(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 1)^{\mathrm{T}}$ gibt es genau eine Tangentialebene und auch genau einen Berührpunkt mit F.

oder: Zu jeder Ebene $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = x_3$ gibt es genau eine parallele Tangentialebene von F.

unique tangent plane property = Grund für die Existenz der rationalen Parametrisierung der Minkowski-Summe

$$\Sigma = \text{rational} \star \text{LN}$$

Quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen

Quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen ...

projektiver Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (gegebenenfalls mit komplexer Erweiterung)

$$\mathbf{q} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3,$$
$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = (q_0(u_0 : u_1 : u_2) : \ldots : q_3(u_0 : u_1 : u_2))$$

ist eine quadratisch parametrisierte Fläche $F \subset \mathbb{P}^3$, $\deg q_i = 2$ und $\deg F = 4$ speziell Klasse 3:

o.B.d.A.: $q_0 = u_0^2 \Longrightarrow$ affine Darstellung

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_{11}u_1^2 + \mathbf{a}_{12}u_1u_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_{22}u_2^2 + \mathbf{a}_{01}u_1 + \mathbf{a}_{02}u_2 + \mathbf{a}_{00}$$

$$\mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}^3$$

. . . stammen von der Veronese V_2^2

Quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen sind Projektionen der Veronese-Varietät.

$$V_2^2(u_0 : u_1 : u_2) = (u_0^2 : u_0 u_1 : u_0 u_2 : u_1^2 : u_1 u_2 : u_2^2) \subset \mathbb{P}^5$$

reguläre Einbettung von $\mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^5$, Punktmodell für die Kegelschnittsgeometrie in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$

[Kummer, Steiner, Meyer, Schreier, Apery, Coffmann, Degen, Albrecht]

Geraden in $\mathbb{P}^2 \mapsto$ Kegelschnitte in $V_2^2 \Longrightarrow$

V_2^2 trägt 2-param. Schar von Kegelschnitten $\Longrightarrow$

gilt auch für die Dreiecks-Bézier-Flächen

Projektionen der V_2^2

speziell **quadratisch polynomial** parametrisierbare Flächen

$$\begin{bmatrix} u_0^2 \\ F(u_0, u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_{00} & \mathbf{a}_{01} & \mathbf{a}_{02} & \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} \cdot (u_0^2, \dots, u_2^2)^{\mathsf{T}}$$

Schnitt mit Fernebene $\omega:\ x_0 = 0$ liefert Kegelschnitt $(\mathbf{a}_{11}u_1^2 + 2\mathbf{a}_{12}u_1u_2 + \mathbf{a}_{22}u_2^2)\mathbb{R}$ mit Vielfachheit 2

$\Longrightarrow$ Quadratische Dreiecks-Bézier-Flächen sind LN-Flächen, da die Klasse 3 ist und ω eine Doppeltangentialebene ist.

Umparametrisierung

Struktur der Tangentialebenen - Umparametrisierung

partielle Ableitungen von $\mathbf{f}$ sind linear in u_i:
$\mathbf{f}_{,1} = \mathbf{a}_{11} u_1 + \mathbf{a}_{12} u_2 + \mathbf{a}_{01}$, $\mathbf{f}_{,2} = \mathbf{a}_{12} u_1 + \mathbf{a}_{22} u_2 + \mathbf{a}_{02}$

$$h(u_1, u_2) = -\det(\mathbf{f}, \mathbf{f}_{,1}, \mathbf{f}_{,2}), \qquad \mathbf{n} = \mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2}$$

$\mathbf{f}_{,1}$ und $\mathbf{f}_{,2}$ sind affine Abbildungen der $[u_1, u_2]$-Ebene und können zu projektiven Abbildungen fortgesetzt werden

$$p_1 : \mathbf{u}\mathbb{R} \mapsto (\mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}) \cdot \mathbf{u}\mathbb{R} = P_1 \cdot \mathbf{u}\mathbb{R} \qquad p_2 : \mathbf{u}\mathbb{R} \mapsto (\mathbf{a}_{02}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}) \cdot \mathbf{u}\mathbb{R} = P_2 \cdot \mathbf{u}\mathbb{R}$$

$\mathbf{u} = (u'_0 : u'_1 : u'_2) = (1 : u_1 : u_2)$.

Umparametrisieren

sei $\mathbf{u}^* \in \mathbb{P}^2$

$P_1 \cdot \mathbf{u}^*$, $P_2 \cdot \mathbf{u}^*$ linear abhängig $\Longrightarrow T(\mathbf{u}^*) = (0:0:0:0)$ und die Parametrisierung besitzt an der Stelle $\mathbf{u}^*$ einen Basispunkt

Basispunkte erlauben eine Gradreduktion der Parametrisierung.

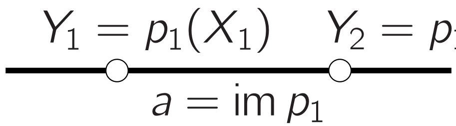
im Folgenden $\operatorname{rg} P_1 \geq 2$ und $\operatorname{rg} P_2 \geq 2$

Umparametrisieren - Basispunkte

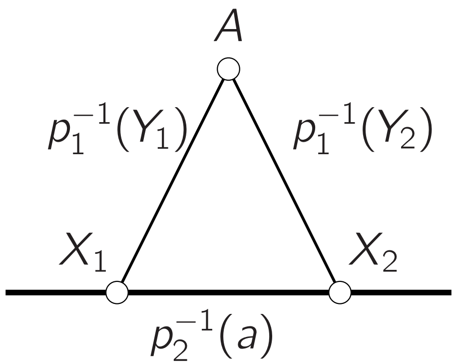
(1) $\text{rg}\, P_1 = \text{rg}\, P_2 = 3$:

Fixpunkte von $p_2^{-1} \circ p_1$ sind Basispunkte $\Longrightarrow$ 3 Stück (3 reelle oder 1 reeller + ein Paar k. k.)

(2) $\text{rg}\, P_1 = 2$ und $\text{rg}\, P_2 = 3$:



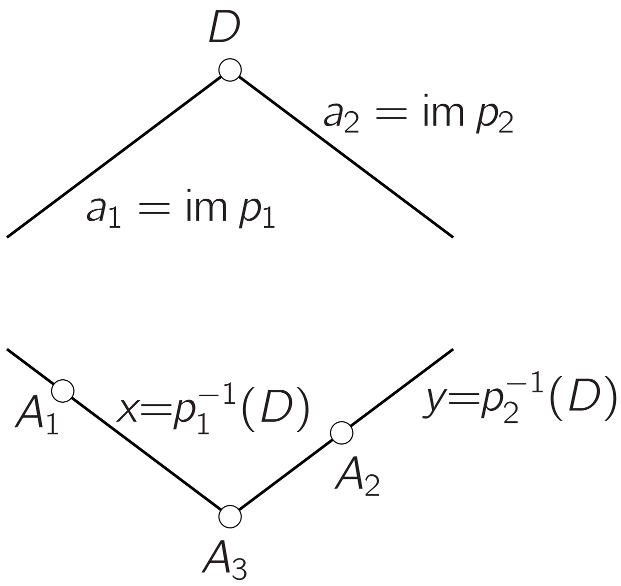
$\ker p_1 = A$ ... Punkt, $\text{im}\, p_1 = a$ ... Gerade



$p_2^{-1}|_a$ ist eine Projektivität mit 2 reellen / einem Paar k. k. Fixpunkte oder mit genau einem Fixpunkt $\Longrightarrow$
1, 2 oder 3 Basispunkte

Umparametrisieren - Basispunkte

(3) $\operatorname{rg} p_1 = \operatorname{rg} p_2 = 2$:



$\ker p_1 = A_1$, $\ker p_2 = A_2$ ... 2 Punkte,
$\operatorname{im} p_1 = a_1$, $\operatorname{im} p_2 = a_2$ ... 2 Geraden,
$D := a_1 \cap a_2$

Fasern $x_1 = p_1^{-1}(D)$ und $x_2 = p_2^{-1}(D) \Longrightarrow$

$A_3 = x_1 \cap x_2$ ist Basispunkt $\Longrightarrow$

1, 2, 3 Basispunkte, da $A_1{=}A_2{=}A_3$ möglich

$\Longrightarrow$ **n** ist quadratisch in u_i und hat bis zu drei Basispunkte!

Quadratische Cremona-Transformationen

$\varphi: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ heißt quadratisch birational (Cremona-Transformation)

$$\Longleftrightarrow$$

$\varphi(\mathbf{v}) = (q_0(\mathbf{v}) : q_1(\mathbf{v}) : q_2(\mathbf{v}))$ mit quadratischen Formen q_i

und φ^{-1} ist von derselben Gestalt

φ und φ^{-1} sind nicht auf ganz $\mathbb{P}^2$ erklärt!

φ ... quadratische Verwandtschaft wie z. B. Inversion, isogonale / isotomische Verwandtschaft, Höhenpunktverwandschaft, ...

Quadratische Cremona-Transformationen

Formen $q_i(\mathbf{v})$ sind nicht beliebig wählbar. [Fladt, 1933]

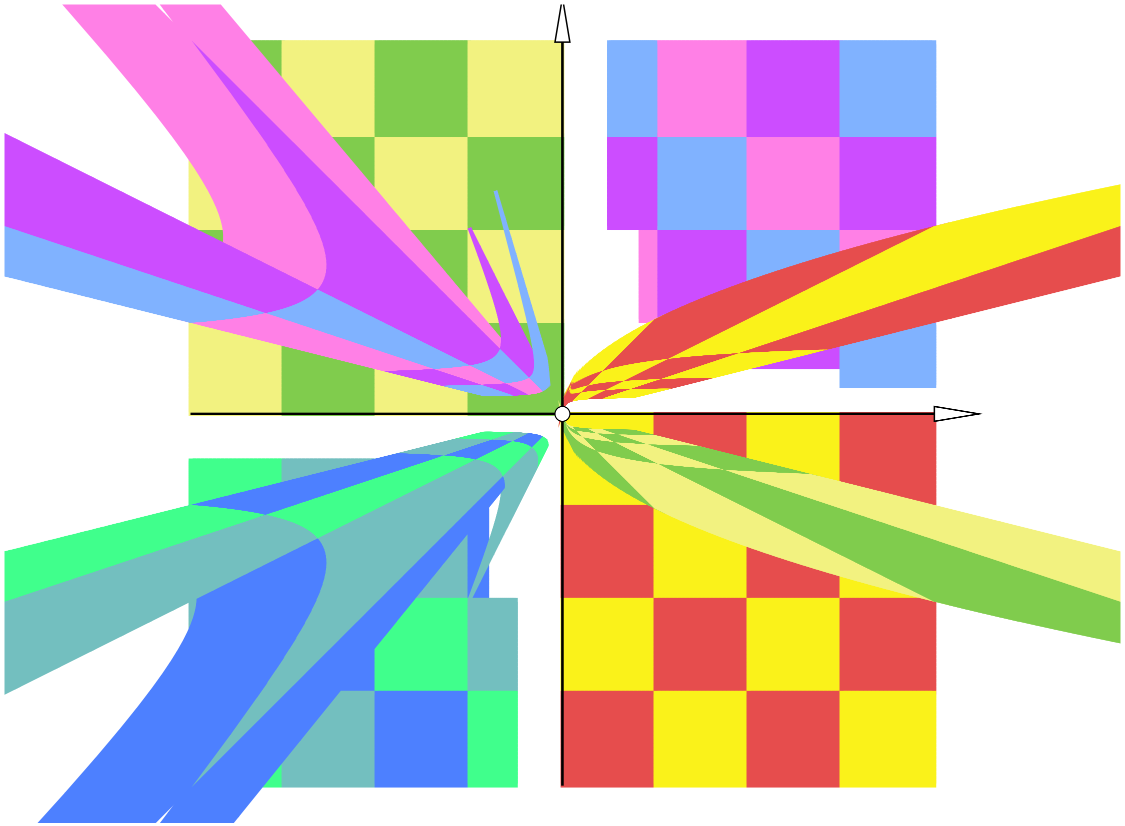
$q_i = 0$ sind Kegelschnitte in $\mathbb{P}^2$, die ein Netz bilden, haben also (algebraisch gezählt) 3 gemeinsame Punkte, die Basispunkte von φ

Die Kegelschnitte $\lambda^0 q_0 + \lambda^1 q_1 + \lambda^2 q_2 = k(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$ bilden das Netz und gehen alle durch die Basispunkte.

$\varphi :$ Geraden $\mapsto$ Kegelschnitte durch die Basispunkte und umgekehrt (i. A.)

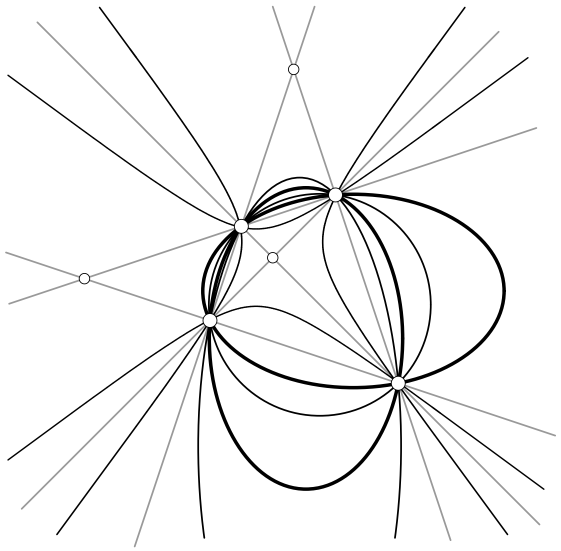
$\Longrightarrow$ Das Netz von Kegelschnitten durch die Basispunkte wird geradgestreckt!

Wirkung einer quadratischen Cremona-Transformation



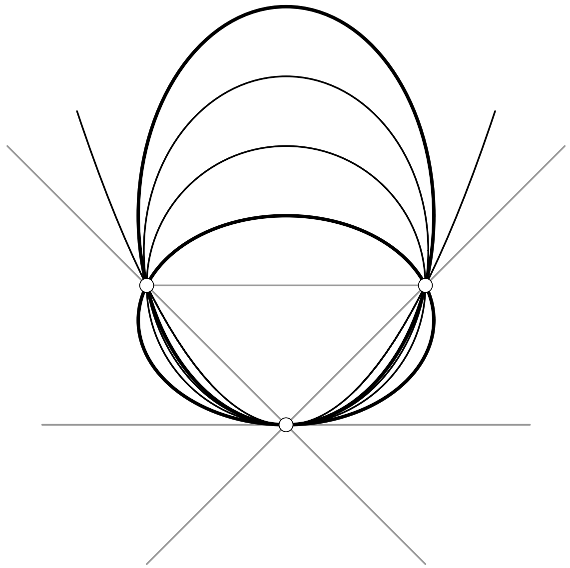
Typologie der KS-Büschel 1

Typ 1



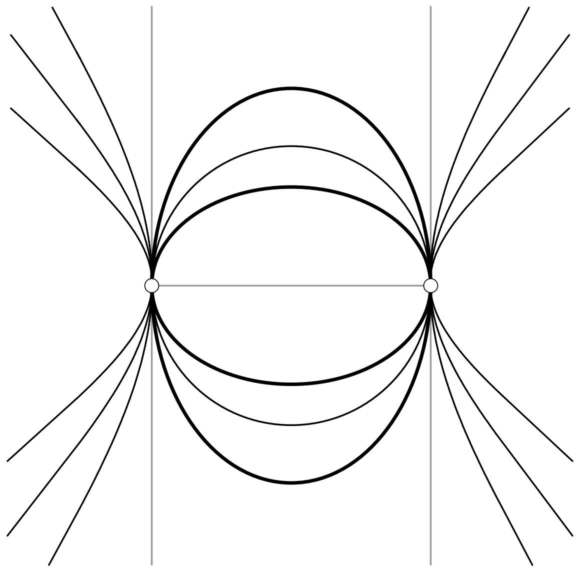
4 Punkte

Typ 2



1 Linienelement + 2 Punkte

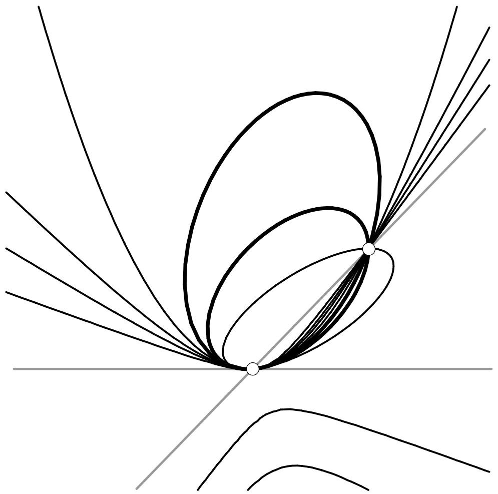
Typ 3



2 Linienelemente

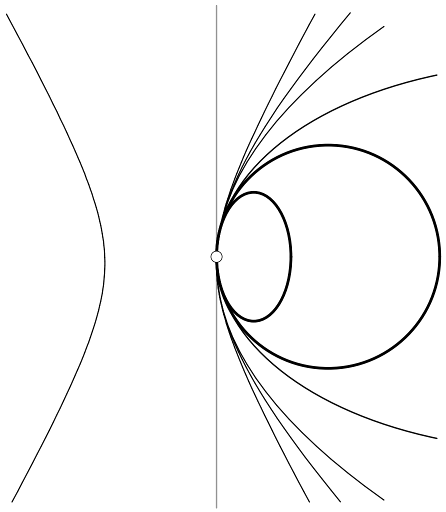
Typologie der KS-Büschel 2

Typ 4



oskulierend

Typ 5



hyperoskulierend

streiche einen Angabepunkt

$\Longrightarrow$

Kegelschnittnetz (Kegelschnitte durch 3 Punkte)

$\Longrightarrow$

nur Büschel vom Typ 1, 2 oder 4 brauchbar

$\Longrightarrow$

es gibt 3 Typen quadratischer Verwandtschaften

Die drei Typen quadratischer Verwandtschaften

(1) 3 Basispunkte

$\varphi : \ (u_0 : u_1 : u_2) \mapsto (u_1 u_2 : u_0 u_2 : u_0 u_1)$

$\varphi^{-1} = \varphi$

hierzu gehören auch: Inversion, Höhenpunktverwandtschaft, isogonale/isotomische Verwandtschaft

Basispunkte $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$

Die drei Typen quadratischer Verwandtschaften

(2) 2 Basispunkte

$\varphi\colon\ (u_0 : u_1 : u_2) \mapsto (u_1 u_2 : u_0 u_2 : u_1^2) \quad \varphi^{-1}\colon\ (u_0 : u_1 : u_2) \mapsto (u_1 u_2 : u_0 u_2 : u_0^2)$

Basispunkte $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$

(3) 1 Basispunkt

$\varphi\colon\ (u_0 : u_1 : u_2) \mapsto (u_1 u_2 : u_1^2 - u_0 u_2 : u_2^2) \quad \varphi^{-1}\colon\ (u_0 : u_1 : u_2) \mapsto (u_0^2 - u_1 u_2 : u_0 u_2 : u_2^2)$

Basispunkt $(0 : 1 : 0)$

Beweis der LN-Eigenschaft

LN-Eigenschaft, rechnerisch

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}_{11}u_1^2 + \mathbf{a}_{12}u_1u_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_{22}u_2^2 + \mathbf{a}_{01}u_1 + \mathbf{a}_{02}u_2 + \mathbf{a}_{00} \quad \mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}^3$$

Normalen $\mathbf{n} = (n_1(u_1, u_2), n_2(u_1, u_2), n_3(u_1, u_2))^\top = \mathbf{f}_{,1} \times \mathbf{f}_{,2} =$

$$(\mathbf{a}_{11} \times \mathbf{a}_{12})u_1^2 + \mathbf{a}_{11} \times \mathbf{a}_{22}u_1u_2 + (\mathbf{a}_{12} \times \mathbf{a}_{22})u_2^2 +$$
$$(\mathbf{a}_{11} \times \mathbf{a}_{02} + \mathbf{a}_{01} \times \mathbf{a}_{12})u_1 + (\mathbf{a}_{12} \times \mathbf{a}_{02} + \mathbf{a}_{01} \times \mathbf{a}_{22})u_2 + \mathbf{a}_{01} \times \mathbf{a}_{02}$$

$\mathbf{n} = (0, 0, 0)^\top$ ... drei Kegelschnitte in der $[u_1, u_2]$-Ebene

gehören einem Netz an $\Longleftrightarrow$ haben drei gemeinsame Punkte $\Longleftrightarrow$

Res(n_1, n_2, u_k), Res(n_2, n_3, u_k), Res(n_3, n_1, u_k) haben einen gemeinsamen kubischen Faktor. $(k = 1, 2)$

LN-Eigenschaft, rein rechnerisch bewiesen

es gilt zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(n_1, n_2, u_2) &= (\mathbf{a}_{12,3}\mathbf{a}_{02,3} - \mathbf{a}_{22,3}\mathbf{a}_{01,3} + (\mathbf{a}_{12,3}^2 - \mathbf{a}_{11,3}\mathbf{a}_{22,3})u_1)p(u_1),\\
\mathrm{Res}(n_2, n_3, u_2) &= (\mathbf{a}_{12,1}\mathbf{a}_{02,1} - \mathbf{a}_{22,1}\mathbf{a}_{01,1} + (\mathbf{a}_{12,1}^2 - \mathbf{a}_{11,1}\mathbf{a}_{22,1})u_1)p(u_1),\\
\mathrm{Res}(n_3, n_1, u_2) &= (\mathbf{a}_{12,2}\mathbf{a}_{02,2} - \mathbf{a}_{22,2}\mathbf{a}_{01,2} + (\mathbf{a}_{12,2}^2 - \mathbf{a}_{11,2}\mathbf{a}_{22,2})u_1)p(u_1),
\end{aligned}
$$

wobei $p(u_1) = \sum_{i=0}^{3} c_i u^i$ mit

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \det(\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{01}) \det(\mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) - \det(\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{02}) \det(\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}),\\
c_1 &= 2\det(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}) \det(\mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{01}, \mathbf{a}_{02}) + \det(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{02}) \det(\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{02})\\
&\qquad\qquad + \det(\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{01})^2 - \det(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{01}) \det(\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{02}),\\
c_2 &= \det(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}) \left(2\det(\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{01}) - \det(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{02})\right),\\
c_3 &= \det(\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{22})^2.
\end{aligned}
$$

LN-Eigenschaft, synthetisch

F mit polynomialer quadratischer Parametrisierung $\mathbf{f}(\mathbf{u})$

Zeige zuerst: F^* ist ein Graph:

$\mathbf{f}_{,1}$, $\mathbf{f}_{,2}$ bestimmen projektive Abbildungen p_1 und $p_2 \Longrightarrow$

Basispunkte der Parametrisierung $\Longrightarrow$

Basispunkte der Parametrisierung und Cremona-Transformation zur Umparametrisierung. Das Kegelschnittnetz wird geradgestreckt und $\mathbf{n}$ wird linear parametrisiert.

Umparametrisierung aller affinen Typen

Typologie der quadratisch polynomial parametrisierbaren Flächen im $\mathbb{R}^3$

[Peters-Reif]

affine Klassifikation der quadratisch polynomial parametrisierbaren Flächen

Normalformen für Parametrisierungen = Normalformen für Projektionen aus dem $\mathbb{P}^5$

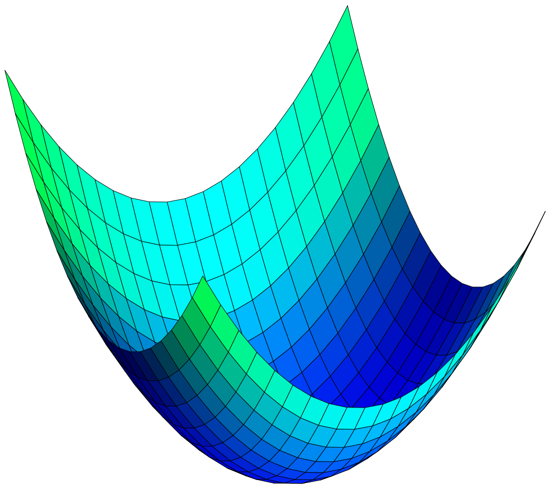
42 verschiedene Typen $\Longrightarrow$

Raumdimension	0	1	2	**3**	4	5
Anzahl	1	5	15	**15**	5	1

darunter bekannte Flächen: Cayley-Fläche, Whitney-Umbrella, Quadriken, Schieb-Römerflächen [Wun 1] und andere Römerflächen [Wun 2], [Wun 3], . . .

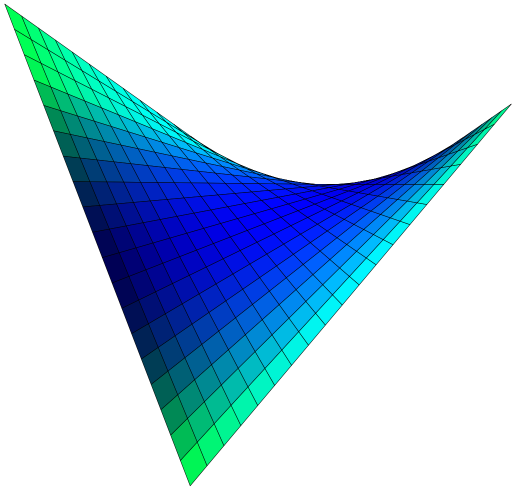
Umparametrisierung

$r_{311} = (u^2 + v^2, u, v)^\mathrm{T}$



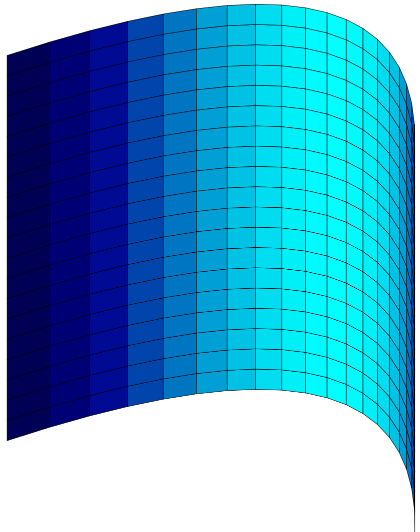
elliptisches Paraboloid

$r_{312} = (uv, u, v)^\mathrm{T}$



hyperbolisches Paraboloid

$r_{313} = (u^2, u, v)^\mathrm{T}$

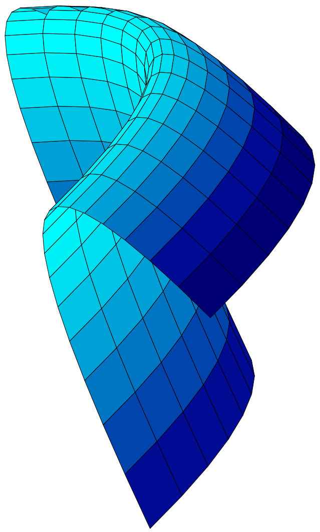


parabolischer Zylinder

kein Parameterwechsel nötig!

Umparametrisierung

$r_{321a} = (u^2, v^2, u + v)^{\mathrm{T}}$

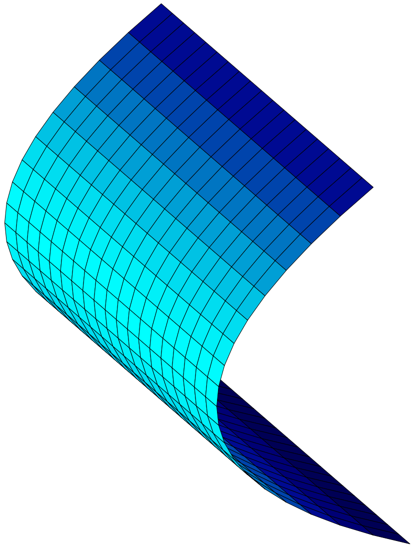


Schiebfläche

$u \to -\frac{1}{2s},\ v \to -\frac{1}{2t}$

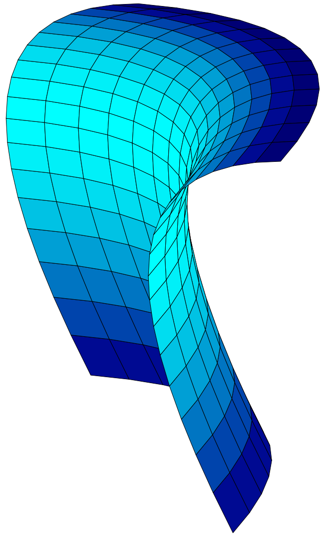
Typ 1

$r_{321b} = (u^2, v^2, u)^{\mathrm{T}}$



Zylinder

$r_{321c} = (u^2, v^2 + u, v)^{\mathrm{T}}$



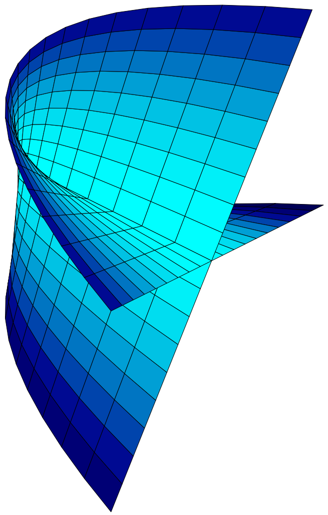
Schiebfläche

$u \to -\frac{t}{2s},\ v \to -\frac{1}{2t}$

Typ 2

Umparametrisierung

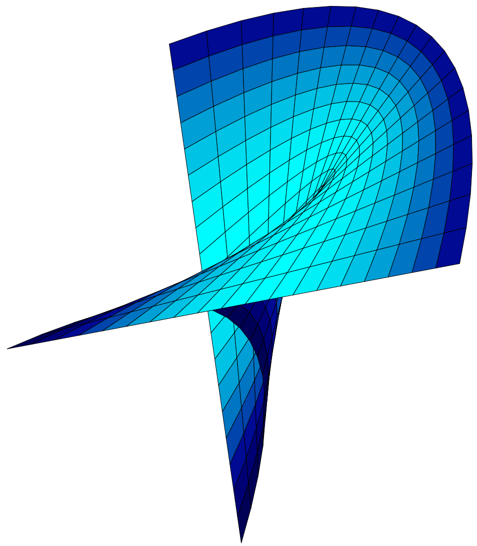
$r_{322a} = (u^2, uv, v)^{\mathrm{T}}$ $\quad$ $r_{322b} = (u^2 + v, uv, u)^{\mathrm{T}}$ $\quad$ $r_{322c} = (u^2, uv, u)^{\mathrm{T}}$



Whitney-Umbrella

$u \to -\frac{1}{t},\ \ v \to \frac{2s}{t^2}$

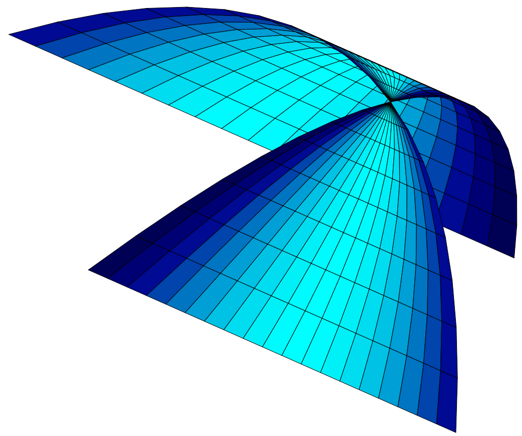
Typ 2



Cayley-Fläche

$u \to -\frac{s}{t},\ \ v \to \frac{2s^2 - t}{t^2}$

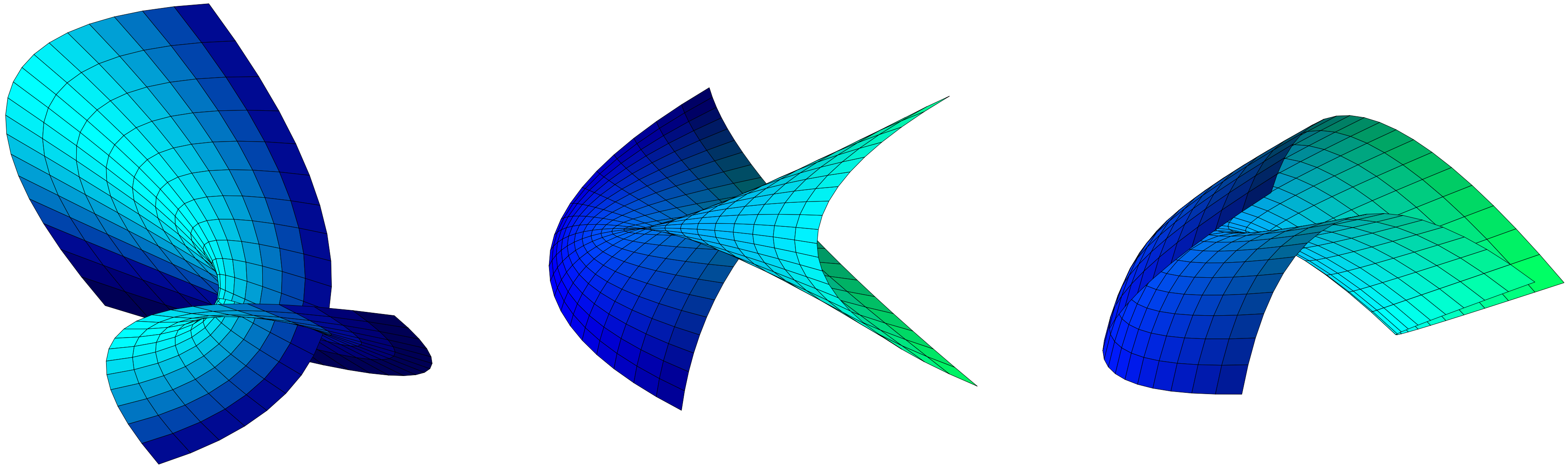
Typ 3



parabolischer Zylinder

Umparametrisierung

$r_{323} = (u^2 - v^2, uv, u)^{\mathsf{T}}$ $\quad r_{332a} = (u^2, v^2 + u, uv)^{\mathsf{T}}$ $\quad r_{332b} = (u^2, v^2 + u, uv - v)^{\mathsf{T}}$



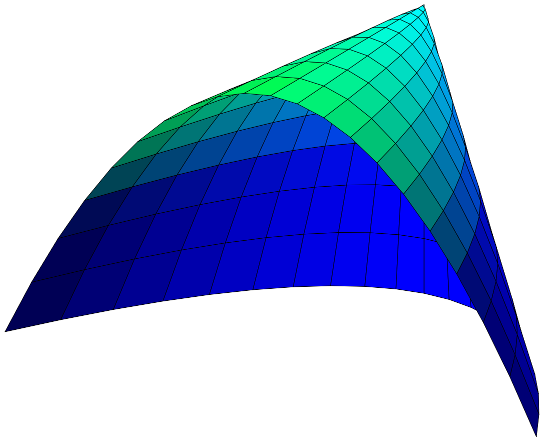
$u \to \frac{-2s}{4s^2+t^2},\ v \to \frac{-t}{4s^2+t^2}$
Typ 1

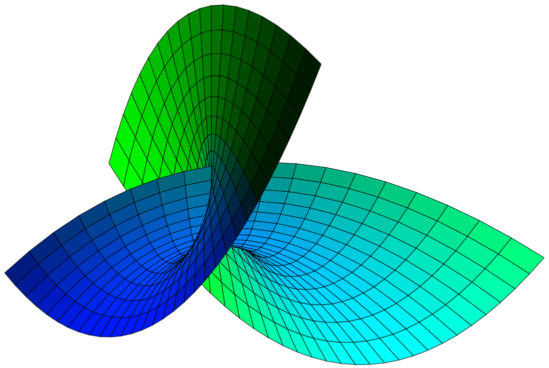
$u \to \frac{2t^2}{1-4st},\ v \to \frac{-t}{1-4st}$
Typ 3

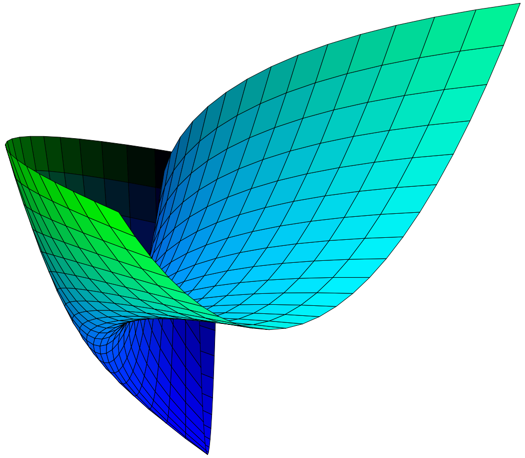
$u \to \frac{1+2t^2}{1-4st},\ v \to \frac{-t-2s}{1-4st}$
Typ 2

Umparametrisierung

$r_{331a} = (u^2, v^2, uv)^{\mathrm{T}}$ $r_{331b} = (u^2, v^2, uv + u)^{\mathrm{T}}$ $r_{331c} = (u^2, v^2, uv + u + v)^{\mathrm{T}}$







quadratischer Kegel

$u \to \frac{2t}{1-4st},\ v \to \frac{-1}{1-4st}$

Typ 2

$u \to \frac{2t-1}{1-4st},\ v \to \frac{2s-1}{1-4st}$

Typ 1

Minkowski-Summen, Beispiele

Beispiel 1

$F: \ \mathbf{f} = (u^2, v^2 + u, v)^\mathrm{T}, \ G: \ \mathbf{g} = (st, s^2, s + t)^\mathrm{T},$

$\mathbf{n}_F = (1, -2u, 4uv)^\mathrm{T}, \ \mathbf{n}_G = (2s, s - t, -2s^2)^\mathrm{T}$

Cremona-Transformation in $[u, v]$-Ebene und $[s, t]$-Ebene

$$\varphi_F^{-1}: \ u = -\frac{y}{2x}, \quad v = -\frac{1}{2y}, \qquad \varphi_G^{-1}: \ s = -\frac{1}{x}, \quad t = \frac{2y - x}{x^2}.$$

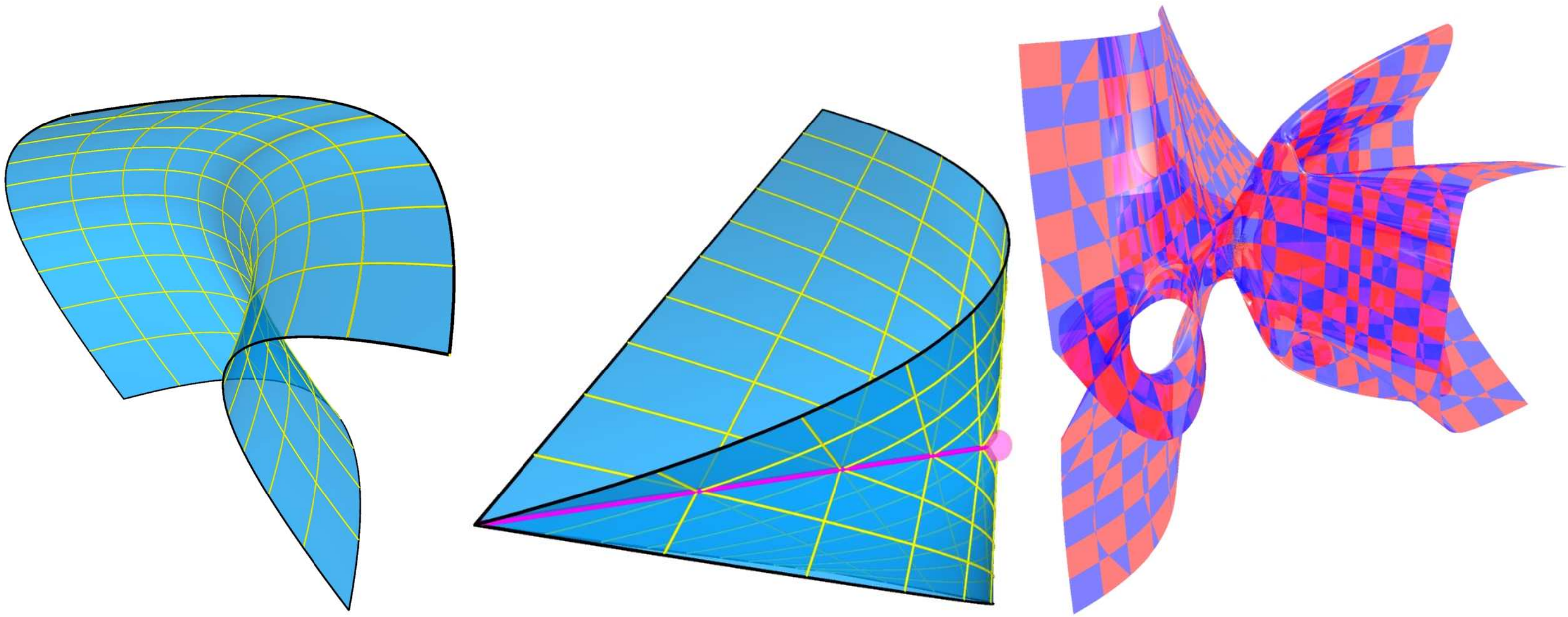
liefert

$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{4x^2y^2}(y^4, x(x - 2y^3), -2x^2y)^T, \ \ \mathbf{g}(x, y) = \frac{1}{x^3}(x - 2y, x, 2x(y - x))^T.$$

Beispiel 1

Parametrisierung der Minkowski-Summe $C = F \star G$ durch $\mathbf{f} + \mathbf{g}$

$$\mathbf{c}(x,y) = \frac{1}{4x^2y^2}(xy^2 + 4x - 8y, x^2 - 2xy^3 + 4y^2, 4y^2 - x^2 - 4xy)^T.$$



Beispiel 2

$F: \ \mathbf{f} = (2u^2, 2v^2, 2(u+v))^\top$, $G: \ \mathbf{g} = (s^2, t, t^2+s)^\top$

$\mathbf{n}_F = (-8v, -8u, 16uv)^\top$, $\mathbf{n}_G = (-1, -4st, 2s)^\top$

Cremona-Transformationen in $[u, v]$-Ebene und in $[s, t]$-Ebene

$$\varphi_F^{-1}: \ u = -\frac{1}{2y}, \quad v = -\frac{1}{2x} \quad \varphi_G^{-1}: \ s = -\frac{y}{2}, \quad t = -\frac{1}{2x}.$$

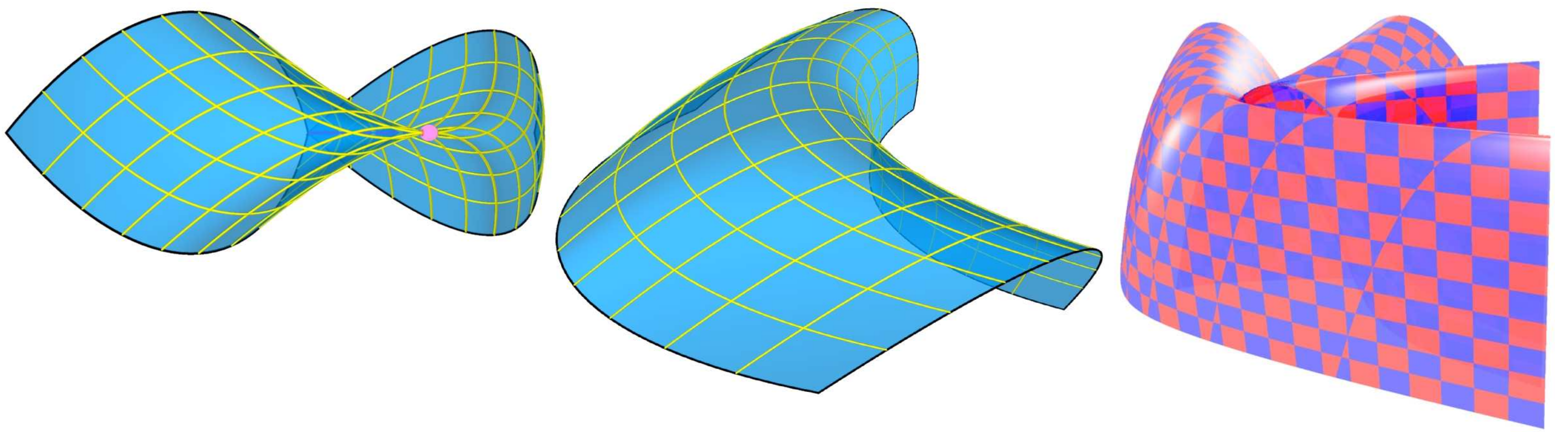
liefert

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{2x^2y^2}(y^2, x^2, -2xy(x+y))^\top, \quad \mathbf{g}(x,y) = \frac{1}{4x^2}(1, -2xy, x(xy^2-2))^\top.$$

Beispiel 2

Parametrisierung der Minkowski-Summe $C = F \star G$ durch $\mathbf{f} + \mathbf{g}$

$$\mathbf{c}(x, y) = \frac{1}{4x^2y^2}(3y^2, 2x^2(1 - y^3), xy(xy^3 - 4x - 6y))^{\mathsf{T}}.$$



Literatur

[Albrecht] G. Albrecht: *The Veronese surface revisited.* J. Geom. **73**(2002), 22 –38.

[Apery] F. Apery: *Models of the Real Projective Plane: Computer Graphics of Steiner and Boy Surfaces.* Vieweg, Braunschweig, 1987.

[Bloom] J. Bloomenthal, K. Shoemake: *Convolution Surfaces.* Comp. Graphics **25**/4(1987), 251–256.

[Coff] A. Coffmann, A.J. Schwartz, C. Stanton: *The algebra and geometry of Steiner and other quadratically parameterizable surfaces.* CAGD **13**(1996), 257–286.

[Degen] W.L.F. Degen: *The Types of Triangular Bézier Surfaces.* IMA Conf. Math. of Surfaces 1994, 153–170.

[Farin] G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier, 2002.

[Fladt] K. Fladt: *Die Umkehrungen der ebenen quadratischen Cremona Transformationen.* J. reine u. angew. Math. **170**(1933), 64–68.

[Ho-La] J. Hoschek, D., Lasser: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design.* A. K. Peters, Wellesley, MA 1993.

[Ju] B. Jüttler: *Triangular Bézier surface patches with a linear normal vector field.* The Mathematics of Surfaces VIII 1998, Information Geometers, 431–446.

[Kummer] E. Kummer: *Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen.* J. reine u. angew. Math. **64**(1865), 66–96.

Literatur

[Láv-Bas 1] M. Lávička, B. Bastl B: Rational parameterized curves and surfaces with rational convolutions. Algebraic Geometry and Geometric Modeling, Proc. of the Conf., Barcelona, 2006, 74–79.

[Láv-Bas 2] M. Lávička, B. Bastl: *PN surfaces and their convolutions with rational surfaces.* CAGD **25**/9(2008), 763–774.

[Lee 1] I.-K. Lee, M.-S. Kim, G. Elber: *Polynomial/Rational Approximation of Minkowski Sum Boundary Curves.* Graphical Models **60**/2(1998), 136–165.

[Lee 2] I.-K. Lee, M.-S. Kim, G. Elber: The Minkowski Sum of 2D Curved Objects, Proc. Israel-Korea Bi-National Conf.: New Themes in Computerized Geometrical Modeling, 1998, Tel-Aviv University, 155–164.

[Meyer] W.F. Meyer: *Spezielle algebraische Flächen.* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Teubner, Leipzig, 1903-1915, Bd. III C 10, 1483–1490, 1647–1660.

[Mühl-Pot] H. Mühlthaler, H. Pottmann: *Computing the Minkowski sum of ruled surfaces.* Graphical Models **65**(2003), 369–384.

[Pet-Man] M. Peternell, F. Manhart: *The convolution of a paraboloid and a parametrized surface.* J. Geom. Graph. **7**(2003), 157–171.

[Pet-Pot] M. Peternell, H. Pottmann: *A Laguerre geometric approach to rational offsets.* CAGD **15**(1998), 223–249.

Literatur

[Peters-Reif] J. Peters, U. Reif: *The 42 equivalence classes of quadratic surfaces in affine n-space.* CAGD **15**(1998), 459–473.

[Pot 1] H. Pottmann: *Rational curves and surfaces with rational offsets.* CAGD **12**(1995), 175–192.

[Pot 2] H. Pottmann: *Studying NURBS curves and surfaces with classical geometry.* Vanderbilt University Press. 1995, 413–438.

[Sam] M.L. Sampoli, M. Peternell, B. Jüttler: *Exact parameterization of convolution surfaces and rational surfaces with linear normals.* CAGD **23**(2006), 179–192.

[Schreier] O. Schreier, E. Sperner: *Projective Geometry of n Dimensions.* Chelsea, New York, 1961.

[Sed-And] T.W. Sederberg, D.C. Anderson: *Steiner surface patches.* IEEE Comp. Graphics & Applications **5**(1985), 23–36.

[Steiner] J. Steiner: Gesammelte Werke II, Berlin, 723–724, 741–742, 1882.

[Wun 1] W. Wunderlich: *Durch Schiebung erzeugbare Römerflächen.* Sitzber. Österr. Akad. Wiss. **176**(1968), 473–497.

[Wun 2] W. Wunderlich: *Kinematisch erzeugbare Römerflächen.* J. reine u. angew. Math. **236**(1969), 67–78.

[Wun 3] W. Wunderlich: *Römerflächen mit ebenen Fallinien.* Ann. di Mat. pura ed appl. **57**(1962), 97–108.

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!