Isotrope Geradenkongruenzen

B. Odehnal

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Technische Universität Wien

Inhalt

Inhalt

- Geradenkongruenzen

Inhalt

- Geradenkongruenzen
- Modellwechsel

Inhalt

- Geradenkongruenzen
- Modellwechsel
- rationale Parametrisierungen

Inhalt

- Geradenkongruenzen
- Modellwechsel
- rationale Parametrisierungen
- Eigenschaften

Inhalt

- Geradenkongruenzen
- Modellwechsel
- rationale Parametrisierungen
- Eigenschaften
- Beispiele

Geradenkongruenzen.

Definitionen

- Geradenkongruenzen = 2-parametrige Geradenfamilien

Definitionen

- Geradenkongruenzen = 2-parametrige Geradenfamilien
- $G = a + u^3 g$ ..... Gerade durch Aufpunkt a und Richtungsvektor g mit $\|g\| = 1$

Definitionen

- Geradenkongruenzen = 2-parametrige Geradenfamilien
- $G = a + u^3 g$ ..... Gerade durch Aufpunkt a und Richtungsvektor g mit $\|g\| = 1$
- $a = a(u^1, u^2) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ .... Leitfläche
  $g = g(u^1, u^2) : D \to S^2$ .... sphärisches Bild

Definitionen

- Geradenkongruenzen = 2-parametrige Geradenfamilien
- $G = a + u^3 g$ ..... Gerade durch Aufpunkt a und Richtungsvektor g mit $\|g\| = 1$
- $a = a(u^1, u^2) : \ D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ .... Leitfläche
  $g = g(u^1, u^2) : \ D \to S^2$ .... sphärisches Bild
- Geraden einer Kongruenz $G(u^1, u^2; u^3) = a(u^1, u^2) + u^3 g(u^1, u^2)$ mit $u^3 \in \mathbb{R}$

Definitionen

- Geradenkongruenzen = 2-parametrige Geradenfamilien
- $G = a + u^3 g$ ..... Gerade durch Aufpunkt a und Richtungsvektor g mit $\|g\| = 1$
- $a = a(u^1, u^2) : \ D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ .... Leitfläche
  $g = g(u^1, u^2) : \ D \to S^2$ .... sphärisches Bild
- Geraden einer Kongruenz $G(u^1, u^2; u^3) = a(u^1, u^2) + u^3 g(u^1, u^2)$ mit $u^3 \in \mathbb{R}$
- a, g .... hinreichend oft differenzierbar

Fundamentalformen

- $\mathrm{I} = \langle dg, dg \rangle = g_{ij} du^i du^j$

Fundamentalformen

- $\mathrm{I} = \langle dg, dg \rangle = g_{ij} du^i du^j$
- $\mathrm{II} = -\langle da, dg \rangle = \gamma_{ij} du^i du^j$

Fundamentalformen.

- $\mathrm{I} = \langle dg, dg \rangle = g_{ij} du^i du^j$
- $\mathrm{II} = -\langle da, dg \rangle = \gamma_{ij} du^i du^j$
- I .... Metrik des sphärischen Bildes

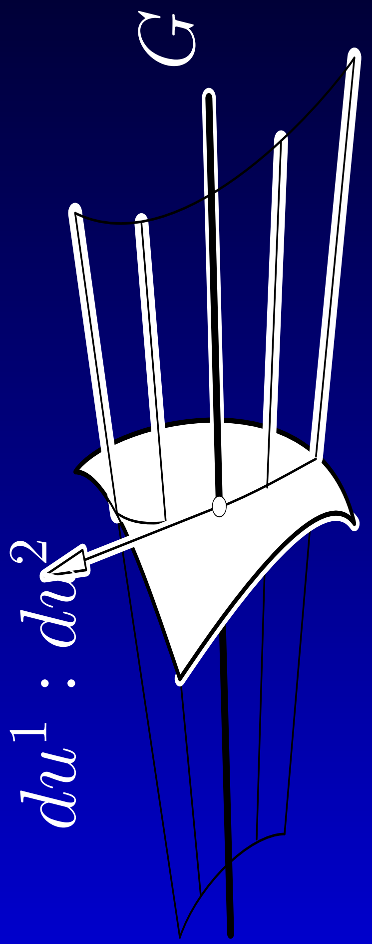
Fundamentalformen

- $\mathrm{I} = \langle dg, dg \rangle = g_{ij} du^i du^j$
- $\mathrm{II} = -\langle da, dg \rangle = \gamma_{ij} du^i du^j$
- I . . . . Metrik des sphärischen Bildes
- II . . . . Striktionsform

Fundamentalformen

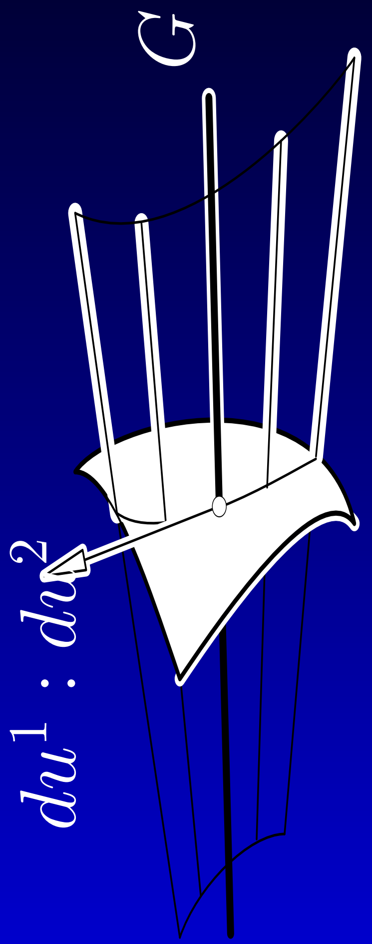
- $\mathrm{I} = \langle dg, dg \rangle = g_{ij} du^i du^j$
- $\mathrm{II} = -\langle da, dg \rangle = \gamma_{ij} du^i du^j$
- I ………………. Metrik des sphärischen Bildes
- II ………………………… Striktionsform
- $\exists$ weitere FF:
  Drallform, Form v. Stephanidis, …

Fundamentalformen



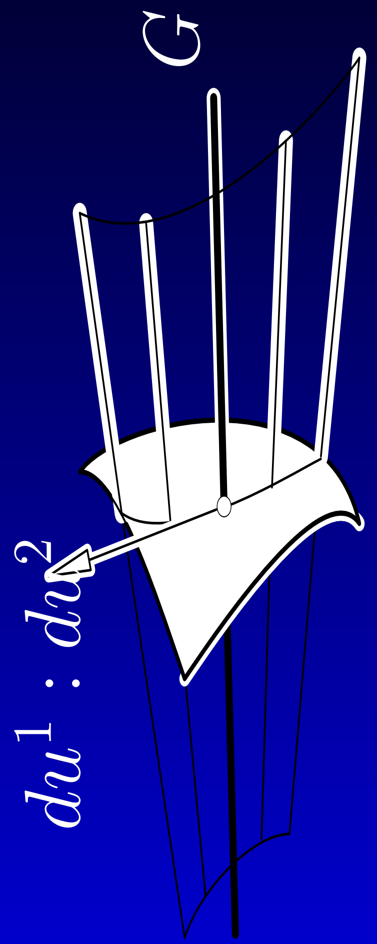
- $u_S^3 = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ liefert den Striktionspunkt auf G für alle Regelflächen durch G mit Richtung $du^1 : du^2$

Fundamentalformen



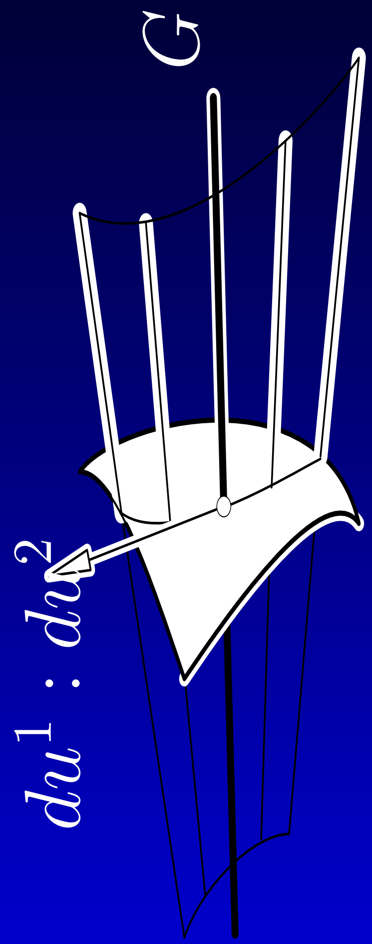
- $u_S^3 = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ liefert den Striktionspunkt auf G für alle Regelflächen durch G mit Richtung $du^1 : du^2$
- Extrema u_E^3 ......Grenzpunkte E_1, E_2

Fundamentalformen



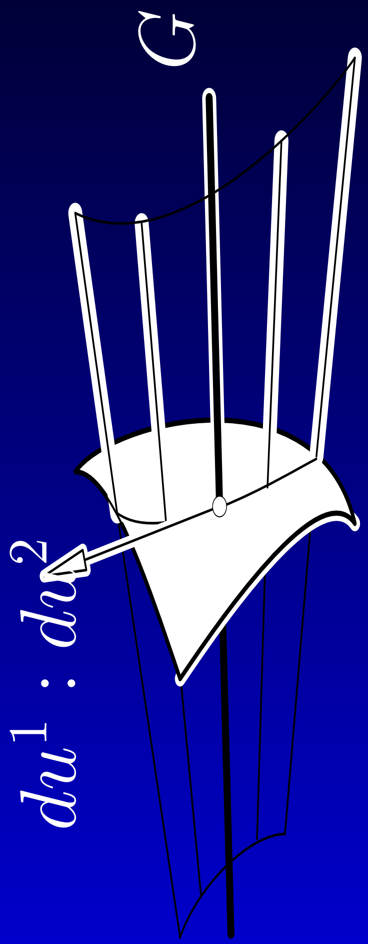
- $u_S^3 = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ liefert den Striktionspunkt auf G für alle Regelflächen durch G mit Richtung $du^1 : du^2$
- Extrema u_E^3 ……Grenzpunkte E_1, E_2
- $du_E^1 : du_E^2$ ………. Hauptrichtungen

Fundamentalformen



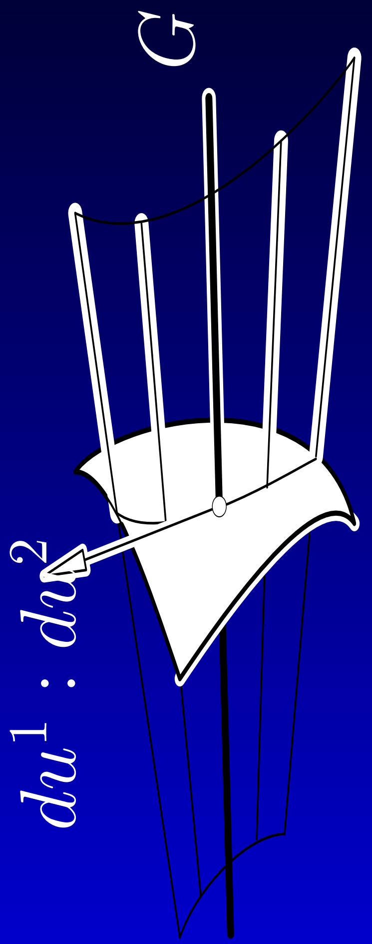
- $u^3_S = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ liefert den Striktionspunkt auf G für alle Regelflächen durch G mit Richtung $du^1 : du^2$
- Extrema u^3_E ……Grenzpunkte E_1, E_2
- $du^1_E : du^2_E$ ………… Hauptrichtungen
- u^3_E……………Eigenwerte von $\overline{\gamma} g^{-1}$, $\overline{\gamma} := (\gamma + \gamma^T)/2$

Fundamentalformen



- $u^3_S = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ liefert den Striktionspunkt auf G für alle Regelflächen durch G mit Richtung $du^1 : du^2$
- Extrema u^3_E ......Grenzpunkte E_1, E_2
- $du^1_E : du^2_E$ .... Hauptrichtungen
- u^3_E .... Eigenwerte von $\overline{\gamma} g^{-1}$, $\overline{\gamma} := (\gamma + \gamma^T)/2$
- Hauptrichtungen: Eigenvektoren von $\overline{\gamma} g^{-1}$

Fundamentalformen



- $u_S^3 = \mathrm{II}/\mathrm{I}$ liefert den Striktionspunkt auf G für alle Regelflächen durch G mit Richtung $du^1 : du^2$
- Extrema u_E^3 ......Grenzpunkte E_1, E_2
- $du_E^1 : du_E^2$ .... Hauptrichtungen
- u_E^3 .... Eigenwerte von $\overline{\gamma} g^{-1}$, $\overline{\gamma} := (\gamma + \gamma^T)/2$
- Hauptrichtungen: Eigenvektoren von $\overline{\gamma} g^{-1}$
- Mittelpunkt von G = Mittelpunkt von $\overline{E_1 E_2}$

mit einer Kongruenz verbundene Flächen

- Mittelpunkte aller Kongruenzgeraden bilden die Mittenfläche

mit einer Kongruenz verbundene Flächen

- Mittelpunkte aller Kongruenzgeraden bilden die Mittenfläche
- Brennfläche = Menge der singulären Punkte der Abbildung $G: \ D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$ Brennflächen durch $F(u^1, u^2, u^3) = \det(G_{,1}, G_{,2}, G_{,3}) = 0$ gekennzeichnet, F = Fokalpolynom

mit einer Kongruenz verbundene Flächen

- Mittelpunkte aller Kongruenzgeraden bilden die Mittenfläche
- Brennfläche = Menge der singulären Punkte der Abbildung $G: \ D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$ Brennflächen durch $F(u^1, u^2, u^3) = \det(G_{,1}, G_{,2}, G_{,3}) = 0$ gekennzeichnet, F = Fokalpolynom
- Mitteneinhüllende = Einhüllende der Symmetrieebenen von $\overline{E_1 E_2}$

spezielle Kongruenzen

- $\gamma = \gamma^T$ .... Normalenkongruenz

spezielle Kongruenzen

- $\gamma = \gamma^T$ .... Normalenkongruenz
- $\overline{\gamma} = tg,\ t \in \mathbb{R}$ ...... isotrope Geradenkongruenz
  $\nexists$ Hauptrichtungen, keine Richtung in der Kongruenz ist ausgezeichnet

spezielle Kongruenzen

- $\gamma = \gamma^T$ .... Normalenkongruenz
- $\overline{\gamma} = tg,\ t \in \mathbb{R}$ ...... isotrope Geradenkongruenz
  $\nexists$ Hauptrichtungen, keine Richtung in der Kongruenz ist ausgezeichnet
- ist a die Mittenfläche:
  isotrope Kongruenz durch

$$\gamma_{12} + \gamma_{21} = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$$

gekennzeichnet.

Modellwechsel

Modellwechsel

- $(g, \overline{g})$ .... normierte Plücker-Koordinaten von G,
  $\overline{g} := a \times g$ .... Momentenvektor

Modellwechsel

- $(g, \overline{g})$ .... normierte Plücker-Koordinaten von G,
  $\overline{g} := a \times g$ .... Momentenvektor
- $\langle g, g \rangle = 1$ .... Normierung, wie zuvor
  $\langle g, \overline{g} \rangle = 0$ .... Plücker-Bedingung

Modellwechsel

- $(g, \overline{g})$ .... normierte Plücker-Koordinaten von G,
  $\overline{g} := a \times g$ .... Momentenvektor
- $\langle g, g \rangle = 1$ .... Normierung, wie zuvor
  $\langle g, \overline{g} \rangle = 0$ .... Plücker-Bedingung
- $\langle g, \overline{g} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \overline{g}$ ist Tangentialvektor von S^2 im Punkt g

Modellwechsel

- $(g, \overline{g})$ .... normierte Plücker-Koordinaten von G,
  $\overline{g} := a \times g$ .... Momentenvektor
- $\langle g, g \rangle = 1$ .... Normierung, wie zuvor
  $\langle g, \overline{g} \rangle = 0$ .... Plücker-Bedingung
- $\langle g, \overline{g} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \overline{g}$ ist Tangentialvektor von S^2 im Punkt g
- $g(D)$ .... ein Stück von S^2
  $\overline{g}(D)$ .... 'Geschwindigkeitsvektoren', ein Stück Tangentialvektorfeld von S^2

Modellwechsel

- $(g, \overline{g})$ .... normierte Plücker-Koordinaten von G,
  $\overline{g} := a \times g$ .... Momentenvektor
- $\langle g, g \rangle = 1$ .... Normierung, wie zuvor
  $\langle g, \overline{g} \rangle = 0$ .... Plücker-Bedingung
- $\langle g, \overline{g} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \overline{g}$ ist Tangentialvektor von S^2 im Punkt g
- $g(D)$ .... ein Stück von S^2
  $\overline{g}(D)$ .... 'Geschwindigkeitsvektoren', ein Stück Tangentialvektorfeld von S^2
- $G \mapsto (g, \overline{g})$ infinitesimale sphärisch kinematische Abbildung

Parametrisierungen

Parametrisierungen

H. R. MÜLLER (1950):
Isotrope Geradenkongruenzen induzieren infinitesimal konforme Abbildungen.

Folgen für die Parametrisierung einer isotropen Kongruenz:

- sei g eine isotherme Parametrisierung von S^2

Parametrisierungen

H. R. MÜLLER (1950):
Isotrope Geradenkongruenzen induzieren infinitesimal konforme Abbildungen.

Folgen für die Parametrisierung einer isotropen Kongruenz:

- sei g eine isotherme Parametrisierung von S^2
- dann ist
  $\overline{g} = \lambda^1 g_{,1} + \lambda^2 g_{,2}$ wobei
  $\lambda(u^1, u^2) = \lambda^1(u^1, u^2) + i\lambda^2(u^1, u^2)$ eine holomorphe Funktion $D \to \mathbb{C}$ ist

Parametrisierungen

H. R. MÜLLER (1950):
Isotrope Geradenkongruenzen induzieren infinitesimal konforme Abbildungen.

Folgen für die Parametrisierung einer isotropen Kongruenz:

- sei g eine isotherme Parametrisierung von S^2
- dann ist
  $\overline{g} = \lambda^1 g_{,1} + \lambda^2 g_{,2}$ wobei
  $\lambda(u^1, u^2) = \lambda^1(u^1, u^2) + i\lambda^2(u^1, u^2)$ eine holomorphe Funktion $D \to \mathbb{C}$ ist
- $\lambda^1_{,1} = \lambda^2_{,2}$ & $\lambda^1_{,2} = -\lambda^2_{,1}$

Eigenschaften.

Eigenschaften

- $G = a + u^3 g,\, a = g \times \overline{g}$ . . . . . . Fußpunktsfläche

Eigenschaften

- $G = a + u^3 g,\, a = g \times \overline{g}$ .... Fußpunktsfläche
- $G = \lambda^1 g_{,2} - \lambda^2 g_{,1} + u^3 g$

Eigenschaften

- $G = a + u^3 g,\, a = g \times \overline{g}$ .... Fußpunktsfläche
- $G = \lambda^1 g_{,2} - \lambda^2 g_{,1} + u^3 g$

  Satz:

Eigenschaften

- $G = a + u^3 g,\, a = g \times \overline{g}$ .... Fußpunktsfläche
- $G = \lambda^1 g_{,2} - \lambda^2 g_{,1} + u^3 g$

  Satz:

1 Jede isotrope Geradenkongruenz gestattet diese Parametrisierung (g = isotherme Param. von S^2, λ^i = Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion).

Eigenschaften

- $G = a + u^3 g,\, a = g \times \overline{g}$ .... Fußpunktsfläche
- $G = \lambda^1 g_{,2} - \lambda^2 g_{,1} + u^3 g$

Satz:

1. Jede isotrope Geradenkongruenz gestattet diese Parametrisierung (g = isotherme Param. von S^2, λ^i = Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion).
2. Ist eine Kongruenz so parametrisiert, dann ist sie eine isotrope.

Eigenschaften

g .... rational und isotherm parametrisiert

$g = [2u^1, 2u^2, 1 - (u^2)^2 - (u^2)^2]/N,$

$N := 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2$

- Mittenfläche rational parametrisiert

Eigenschaften

g ....rational und isotherm parametrisiert

$g = [2u^1, 2u^2, 1 - (u^2)^2 - (u^2)^2]/N,$

$N := 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2$

- Mittenfläche rational parametrisiert
- Mitteneinhüllende rational parametrisiert

Eigenschaften

g .... rational und isotherm parametrisiert
$g = [2u^1, 2u^2, 1 - (u^2)^2 - (u^2)^2]/N,$
$N := 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2$

- Mittenfläche rational parametrisiert
- Mitteneinhüllende rational parametrisiert

Satz:
Brennflächen gestatten rationale Parametrisierungen.

Eigenschaften

g . . . . rational und isotherm parametrisiert

$g = [2u^1, 2u^2, 1 - (u^2)^2 - (u^2)^2]/N,$

$N := 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2$

- Mittenfläche rational parametrisiert
- Mitteneinhüllende rational parametrisiert

Satz:
Brennflächen gestatten rationale Parametrisierungen.

Beweis:
Mittenfläche M als Leitfläche wählen
Fokalpolynom: $F = (u^3)^2\varphi^2 + \gamma_{12}^2\varphi^{-2},$
$\varphi := 2/N$
Brennflächen: $B_{1,2} = M \pm i\gamma_{12}\varphi^{-2}g$

Eigenschaften

A. RIBAUCOUR (1880):
Ist $v \in \mathbb{R}^3$, $v = const.$, dann ist

$$G' = M + v \times g + u^3 g$$

ebenfalls eine istrope Kongruenz.

G . . . . rational parametrisiert (wie oben):

- Mittenfläche, Mitteneinhüllende und Brennflächen von G' ebenfalls rational

Eigenschaften

A. RIBAUCOUR (1880):
Ist $v \in \mathbb{R}^3$, $v = const.$, dann ist

$$G' = M + v \times g + u^3 g$$

ebenfalls eine istrope Kongruenz.

G .... rational parametrisiert (wie oben):

- Mittenfläche, Mitteneinhüllende und Brennflächen von G' ebenfalls rational
- die erzeugende Funktion λ transformiert gemäß $\lambda^{1'} = \lambda^1 - \langle v, g_{,1}\rangle \varphi^{-2}$ und $\lambda^{2'} = \lambda^2 - \langle v, g_{,2}\rangle \varphi^{-2}$

Eigenschaften

- Brennflächen $B_{1,2}$ = ein Paar konjugiert komplexer rationaler Torsen

Eigenschaften

- Brennflächen $B_{1,2}$ = ein Paar konjugiert komplexer rationaler Torsen
- Gratlinien $r_{1,2}$ = rationale *isotrope* Kurven (isotrop: Anstieg $\pm i$)

Eigenschaften

- Brennflächen $B_{1,2}$ = ein Paar konjugiert komplexer rationaler Torsen
- Gratlinien $r_{1,2}$ = rationale *isotrope* Kurven (isotrop: Anstieg $\pm i$)
- $r_{1,2} = M \pm i\mu g \pm i(\mu_{,1} \pm i\mu_{,2})\varphi^{-2}(g_{,1} \mp i g_{,2})$

Eigenschaften

- Brennflächen $B_{1,2}$ = ein Paar konjugiert komplexer rationaler Torsen
- Gratlinien $r_{1,2}$ = rationale *isotrope* Kurven (isotrop: Anstieg $\pm i$)
- $r_{1,2} = M \pm i\mu g \pm i(\mu_{,1} \pm i\mu_{,2})\varphi^{-2}(g_{,1} \mp i g_{,2})$
- Mitteneinhüllende = rational parametrisierte Minimalfläche

$$R = M - \mu_{,2}\varphi^{-2}g_{,1} + \mu_{,1}\varphi^{-2}g_{,2}, \quad \mu := \gamma_{12}\varphi^{-2}$$

Eigenschaften

- S. LIE (1877):
  Erzeugung der Minimalflächen als Schiebflächen konjugiert komplexer Schiebkurven

$$2R = r_1 + r_2$$

Eigenschaften

- S. LIE (1877):
  Erzeugung der Minimalflächen als Schiebflächen konjugiert komplexer Schiebkurven

$$2R = r_1 + r_2$$

Satz:
Die Mitteneinhüllende ist sogar polynomial parametrisiert, wenn λ ein Polynom ist.

Eigenschaften

- S. Lie (1877):
  Erzeugung der Minimalflächen als Schiebflächen konjugiert komplexer Schiebkurven

  $$2R = r_1 + r_2$$

  Satz:
  Die Mitteneinhüllende ist sogar polynomial parametrisiert, wenn λ ein Polynom ist.

  Satz:
  Die Geradenbündel sind die einzigen isotropen Kongruenzen, die gleichzeitig Normalenkongruenzen sind.

Beispiele

Beispiele

- $\lambda(u) = \sum_{i=0}^{N} A_i u^i,\ u = u^1 + iu^2$
  $(A_0, \ldots, A_N) \neq (0, \ldots, 0)$

Beispiele

- $\lambda(u) = \sum_{i=0}^{N} A_i u^i$, $u = u^1 + iu^2$
  $(A_0, \ldots, A_N) \neq (0, \ldots, 0)$
- Geradenbündel genau für:
  $A_2 = -(c + ia/2)$, $A_1 = ib$, $A_0 = \overline{A_2}$,
  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
  Bündelscheitel $(-a, -2c, -b)$

Beispiele

- $\lambda(u) = \sum_{i=0}^{N} A_i u^i$, $u = u^1 + iu^2$
  $(A_0, \dots, A_N) \neq (0, \dots, 0)$
- Geradenbündel genau für:
  $A_2 = -(c + ia/2)$, $A_1 = ib$, $A_0 = \overline{A_2}$,
  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
  Bündelscheitel $(-a, -2c, -b)$
- A_0, A_1, A_2 reell:
  Brennflächen sind *isotrope* Drehkegel mit konjugiert komplexen Spitzen
  $S_1 = (i(A_0 - A_2), A_0 + A_2, iA_1)$, $S_2 = \overline{S}_2$

Beispiele

- $\lambda(u) = \sum_{i=0}^{N} A_i u^i$, $u = u^1 + iu^2$
  $(A_0, \ldots, A_N) \neq (0, \ldots, 0)$
- Geradenbündel genau für:
  $A_2 = -(c + ia/2)$, $A_1 = ib$, $A_0 = \overline{A_2}$,
  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
  Bündelscheitel $(-a, -2c, -b)$
- A_0, A_1, A_2 reell:
  Brennflächen sind *isotrope* Drehkegel mit konjugiert komplexen Spitzen
  $S_1 = (i(A_0 - A_2), A_0 + A_2, iA_1)$, $S_2 = \overline{S}_2$
- $A_3 \neq 0, A_i = 0, \forall i$:
  R = Minimalfläche von Enneper

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Übersicht

- Inhalt
- Geradenkongruenzen
- Parametrisierungen
- Eigenschaften
- Beispiele