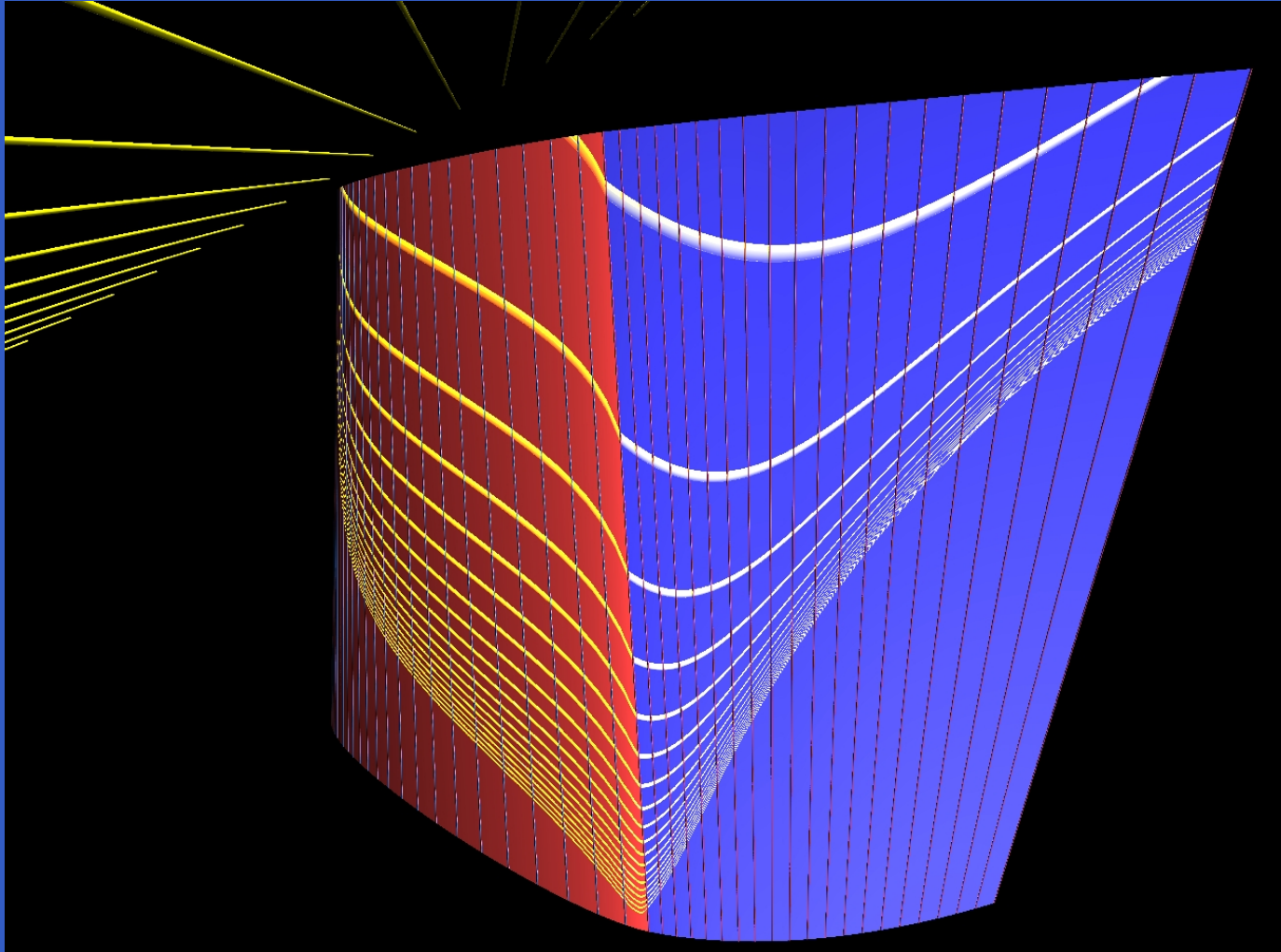


G^k -Hermite-Interpolation mit Regelflächen

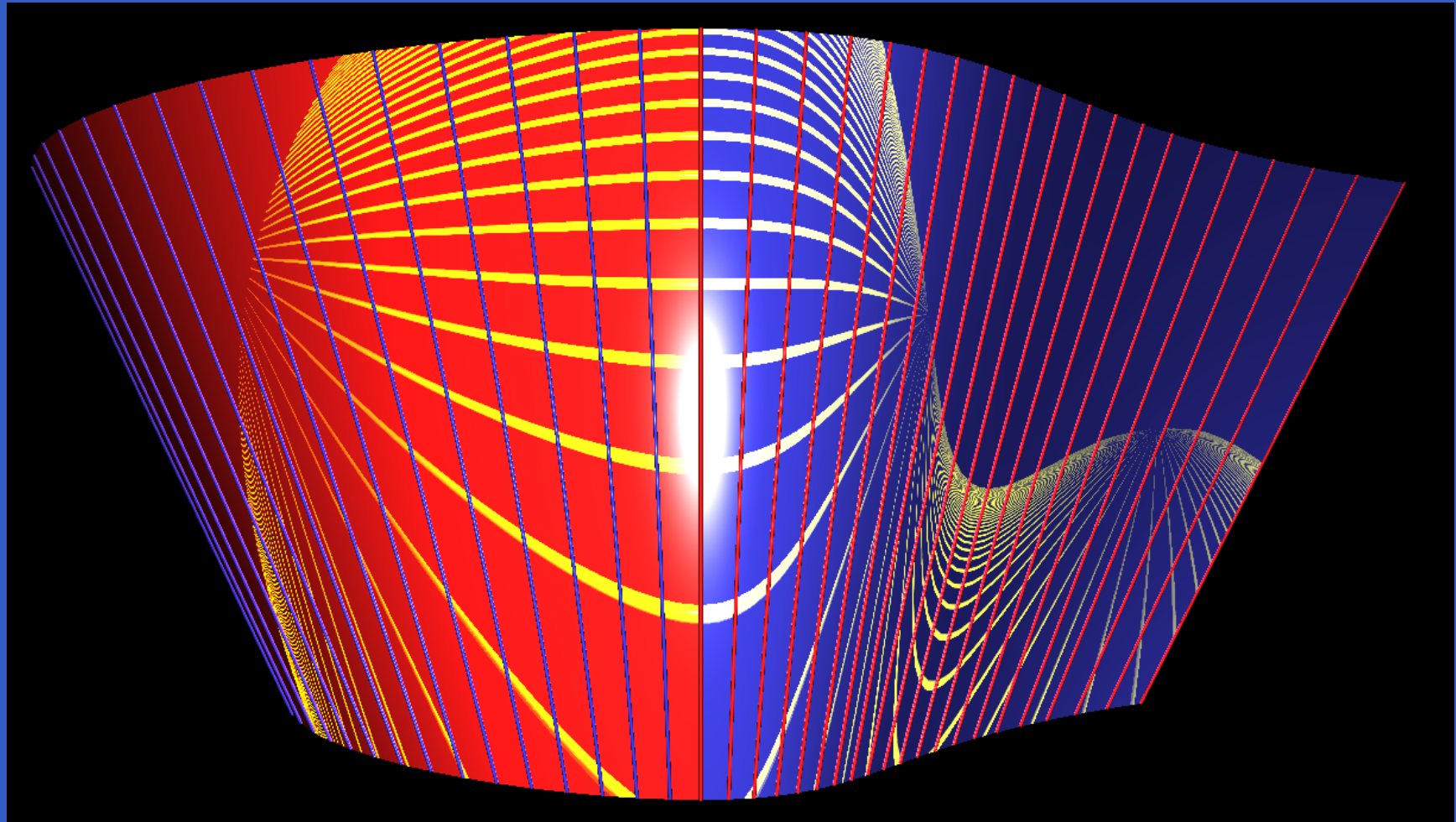
Boris Odehnal

Technische Universität Wien

G^1 -Verbindung zweier Regelflächenstücke



G^2 -Verbindung zweier Regelflächenstücke



Motivation & Ziele

- G^1 -Verbindungen sind für Designzwecke in der Regel nicht glatt genug.
- Interpolation von G^2 -, G^3 -, ... Daten mit Regelflächen möglichst niedrigen Grades wären wünschenswert.
- geeigneter Modellraum \implies Interpolation mit Kurven
- Bedingungen für die Lösbarkeit / Nicht-Lösbarkeit gestellter Aufgaben

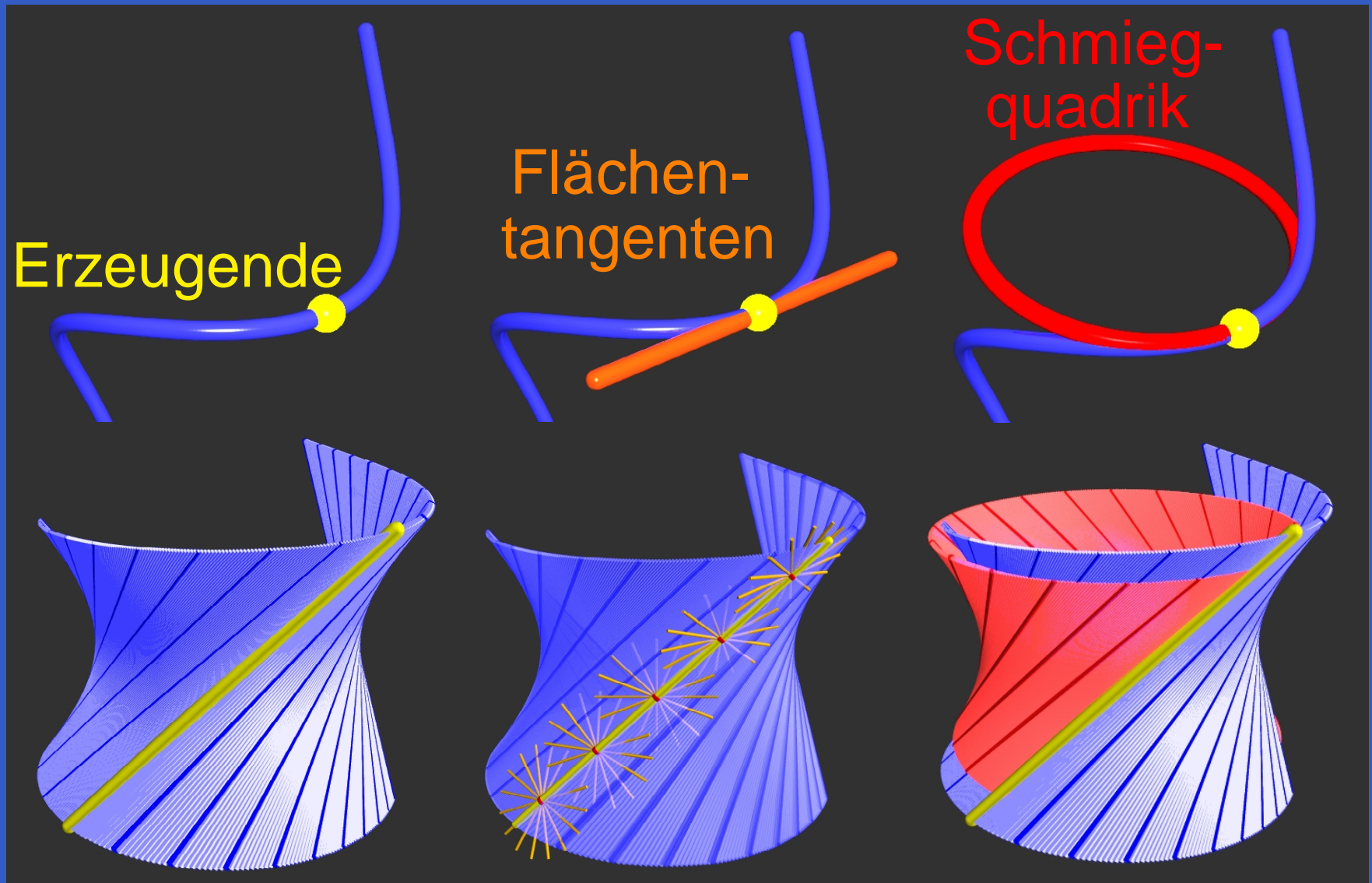
Literatur

- [1] R. Dietz, J. Hoschek, B. Jüttler: *An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics.*
Comp. Aided Geom. Design 10 (1993), 211–229.
- [2] A. Gfrerrer: *Rational Interpolation on a hypersphere.*
Comput. Aided Geom. Design 16/1 (1998).
- [3] J. Hoschek, H. Pottmann: *Interpolation and approximation with developable B-spline surfaces.*
Mathematical Methods for Curves and Surfaces, 1995.
- [4] M. Peterzell: *G^1 -Hermite Interpolation of Ruled Surfaces.*
In: CAGD, Oslo 2000, Vanderbilt Univ. Press, 2001.
- [5] H. Pottmann, G. Farin: *Developable rational Bézier and B-spline surfaces.* Comput. Aided Geom. Design 12 (1995).
- [6] J. Wallner: *Hopf mappings for complex quaternions.*
Beitr. Algebra Geom. 44 (2003), 245–262.

der geeignete Modellraum

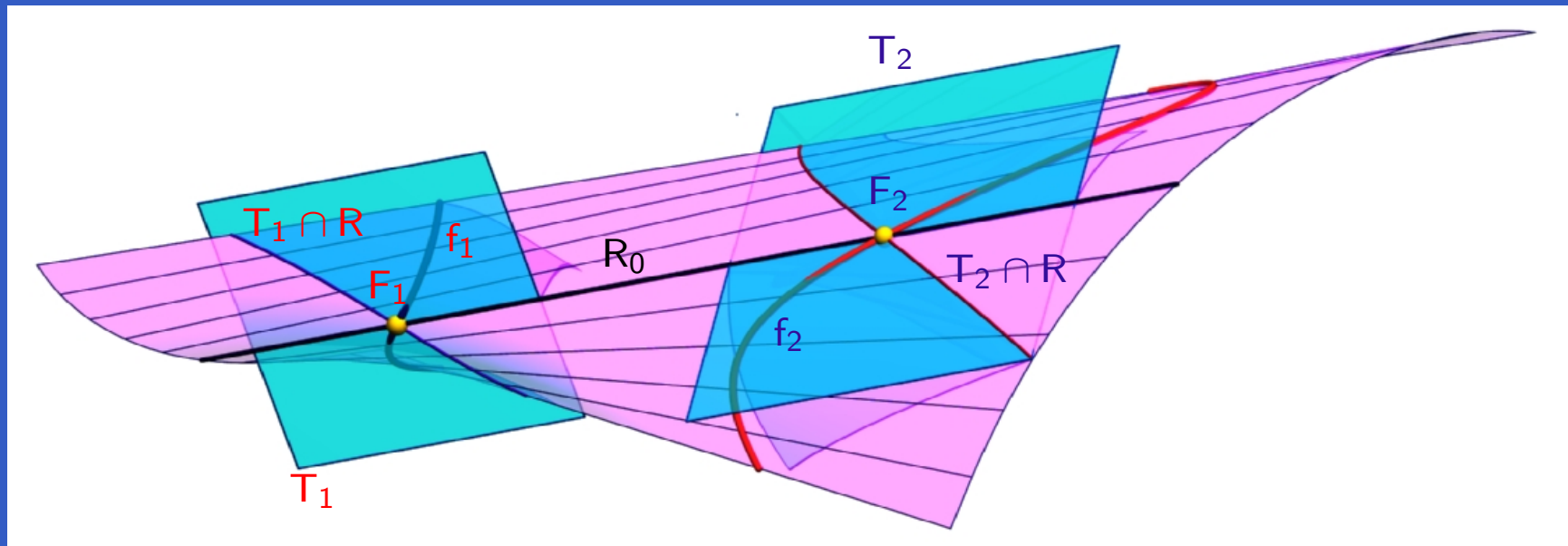
- Gerade $G = (g, \bar{g}) \in \mathbb{R}^6$, Plücker-Koordinaten
mit $0 = \langle g, \bar{g} \rangle =: \frac{1}{2}\Omega(G, G)$
- Kleinsches Modell:
Geraden $\subset \mathbb{P}^3 \rightarrow$ Punkte $\in M_2^4 \subset \mathbb{P}^5$
Regelflächen $\subset \mathbb{P}^3 \rightarrow$ Kurven $\subset M_2^4$
 \iff
Kurven-Design in M_2^4
=
Regelflächen-Design in \mathbb{P}^3

differentialgeometrische Eigenschaften von Regelflächen



Fleknoden

Es gibt (höchstens) zwei Schmiegtangenten (in Punkten von R_0), die die Regelfläche hyperoskulieren.



geometrische Bedeutung von G^0 -, G^1 -, G^2 -, ... Verbindungen

$L, R \subset M_2^4, \dots$ Kurven in M_2^4 , Kleinsche Bilder von Regelflächen mit gemeinsamer Erzeugender $L(t_0) = R(u_0) =: E$

- G^0 ... gemeinsame Erzeugende E
- G^1 ... G^0 + gem. Flächentangenten längs E
- G^2 ... G^1 + gem. Schmiegequadratik längs E
- G^3 ... G^2 + gem. Fleknoden auf E

rationale Regelflächen & Normkurven

- rationale Regelfläche \longleftrightarrow rationale Kurve in $M_2^4 \longleftrightarrow$ rationale Normkurve in \mathbb{P}^5 (oder in einem Unterraum) - zumindest ein lineares Bild
- Veronese V_n^1 , parameterisiert durch $(t_0 : t_1)$
 $(t_0^n : t_0^{n-1}t_1 : \dots : t_0t_1^{n-1} : t_1^n)$
- bekannte Beispiele:
 $(t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2) \dots$ Kegelschnitt
 $(t_0^3 : t_0^2t_1 : t_0t_1^2 : t_1^3) \dots$ (windschiefe) Kubik

rationale Normkurven

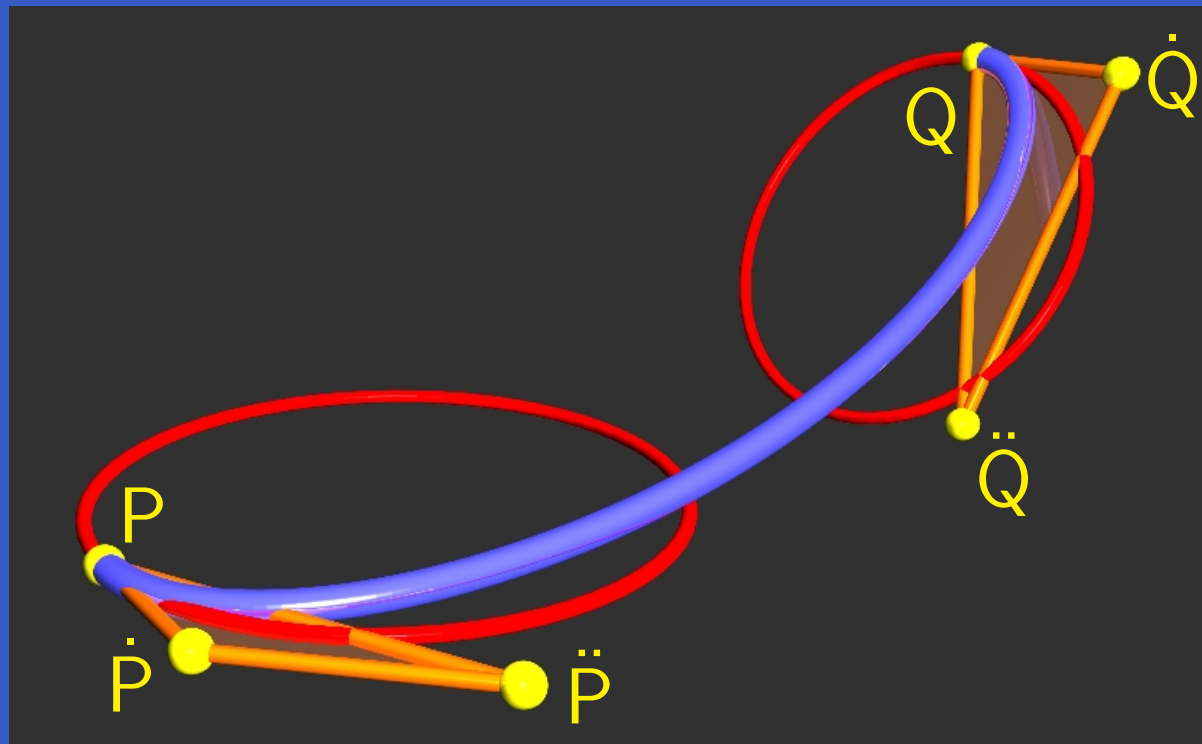
- Normkurven $N_n = (1, t, t^2, \dots, t^n)$, mit affinem Parameter $t = t_1 t_0^{-1}$
- $[N_n] = \mathbb{P}^n$
- N_n ist Schnitt von Quadriken.
- N_n gestattet projektive Erzeugungen.
- N_n besitzt Gruppe projektiver Automorphismen.

rationale Normkurven & ihre Analoga im Linienraum

| deg | Klein | Geradenmannigfaltigkeit |
|-----|----------------|--|
| 2 | Ebene | Regulus (quadr. Kegel, Tangenten eines Kegelschnitts) |
| 3 | Drei-Raum | Netz (ellipt., parab., hyperb., singulär) |
| 4 | Hyperebene | linearer Geradenkomplex (regulär / singulär) |
| 5 | \mathbb{P}^5 | alles zusammen |

Interpolation I

- Hermite-Daten $O_P^k := [P, \dot{P}, \dots, P^{(k)}]$, O_Q^k ,
Oskulations-Elemente k -ter Ordnung



Interpolation II

- Rationale Kurve als Bézier-Kurve anschreiben:

$$R(t) = \sum_{i=0}^n A_i b_i^n, \quad A_i \in \mathbb{R}^6, \quad b_i^n = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

- Endpunkt-Interpolation liefert

$$A_0 = P, \quad A_1 = \frac{1}{n}((n+1)P + \pi_0 \dot{P}), \quad A_2 = \dots$$

Interpolation III

- $R \subset M_2^4 \iff \Omega(R, R) = 0$
- \implies Gleichungen in den Unbekannten $A_i, \pi_i,$
...
- $\Omega(A_0, A_0) = \Omega(A_0, A_1) = 0,$
 $(n - 1)\Omega(A_0, A_2) + n\Omega(A_1, A_1) = 0, \dots$
- Die ersten und letzten Gleichungen
sind automatisch erfüllt.
- π_0, π_1, \dots dienen als Gestaltungs-Parameter.

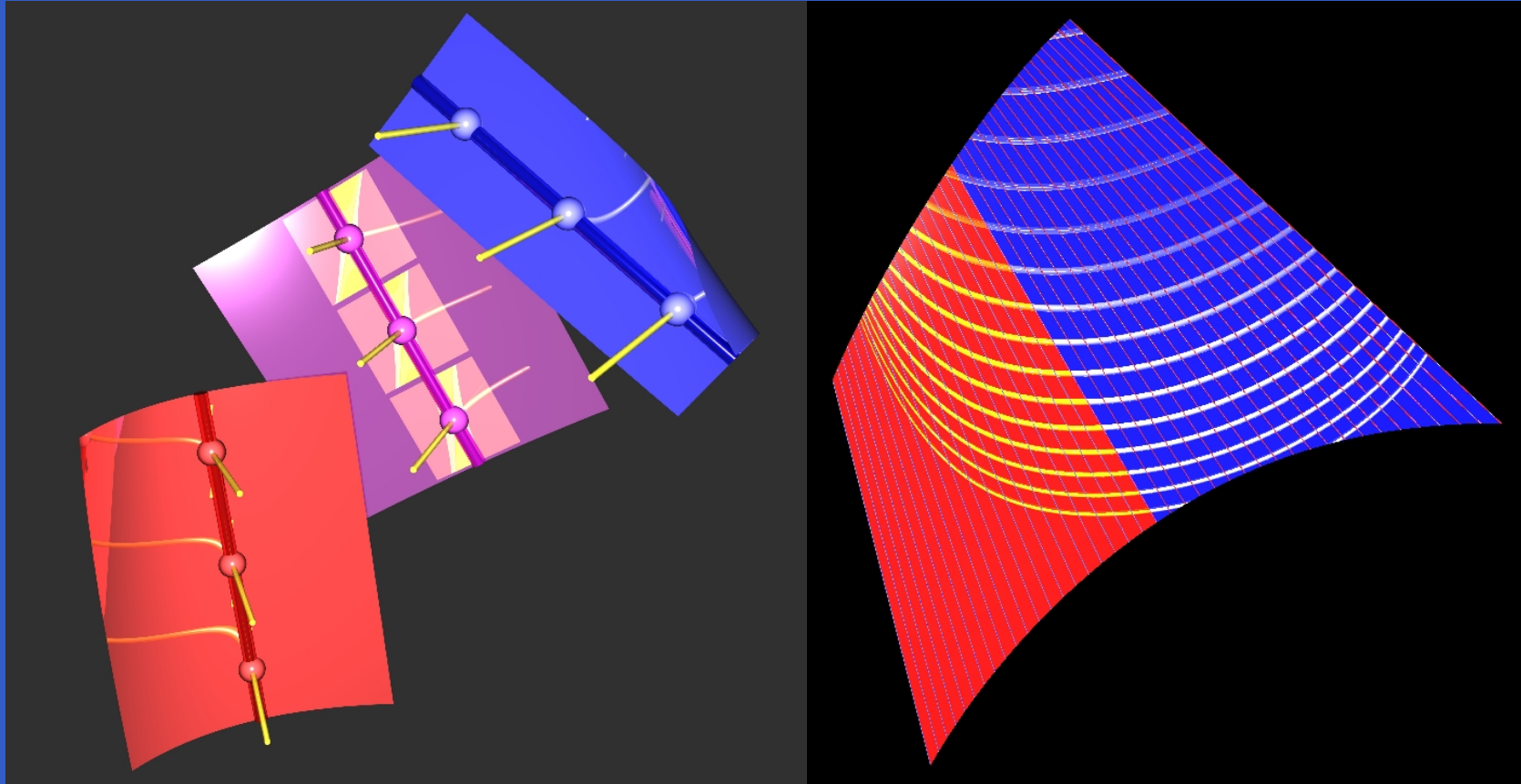
Niedrige Grade?

- Biarcs aus Reguli: siehe [4]
- Idee von [4] nur auf G^1 -Interpolation anwendbar.
- kubische, quartische, quintische (rationale) Regelflächen für G^1 -Verbindungen (mit bestimmten Bedingungen an die Daten)
- Sextiken, Septiken, ... ermöglichen G^2 -Interpolation.

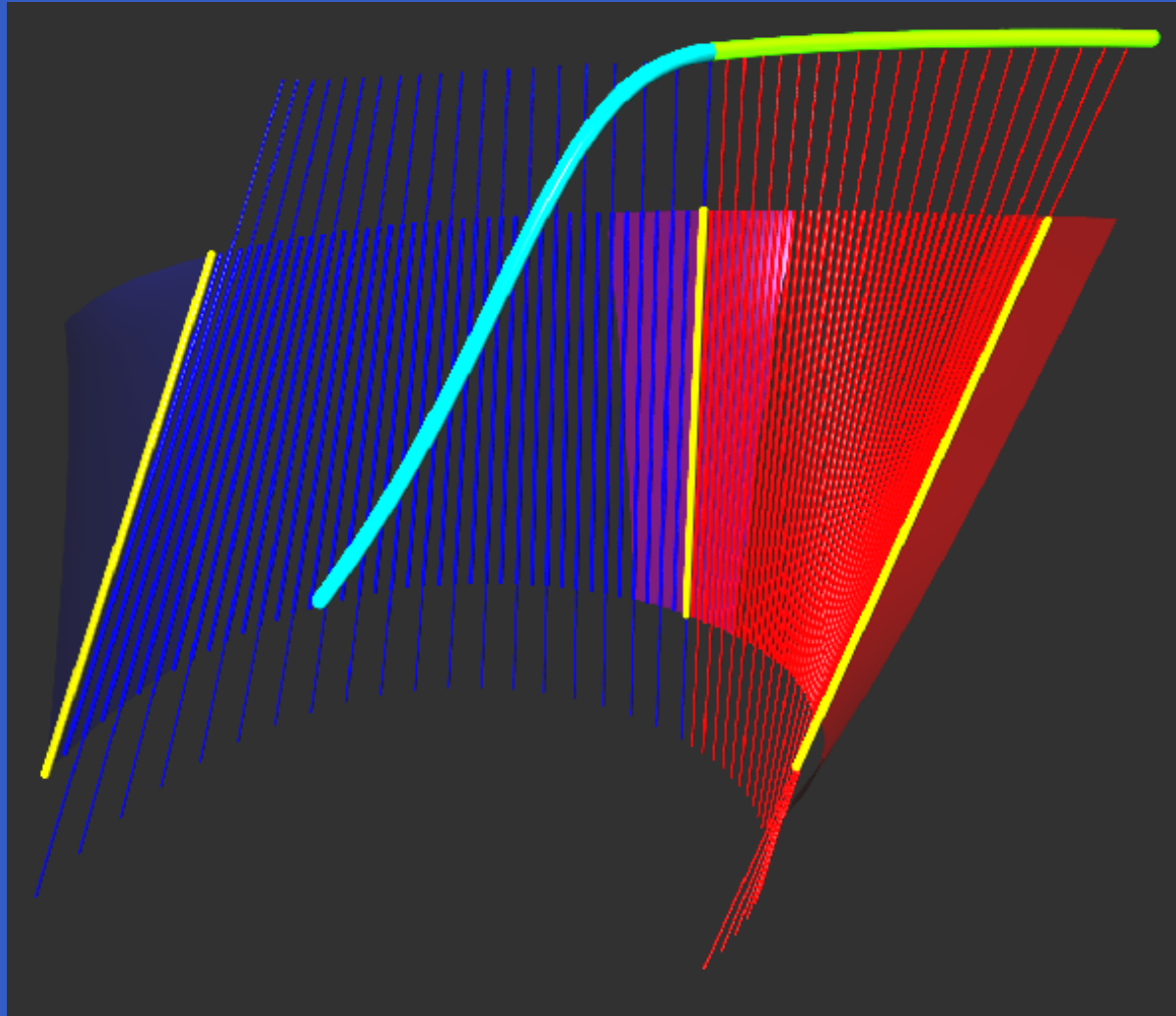
Was geht, was geht nicht?

- G^1 -Interpolation mit einem kubischen Bogen:
dann und nur dann, wenn
$$[P, Q] \subset [P, \dot{P}, Q, \dot{Q}] \cap M_2^4$$
- G^2 -Interpolation mit quartischen Bögen:
Zwei Oskulations-Elemente O_P^2, O_Q^2 sind i. A. windschief. \implies Es gibt keine Quartik in M_2^4 , die G^2 -Hermite-Daten interpoliert.
- Niedrigst möglicher Grad für G^2 -Interpolation ist 6.

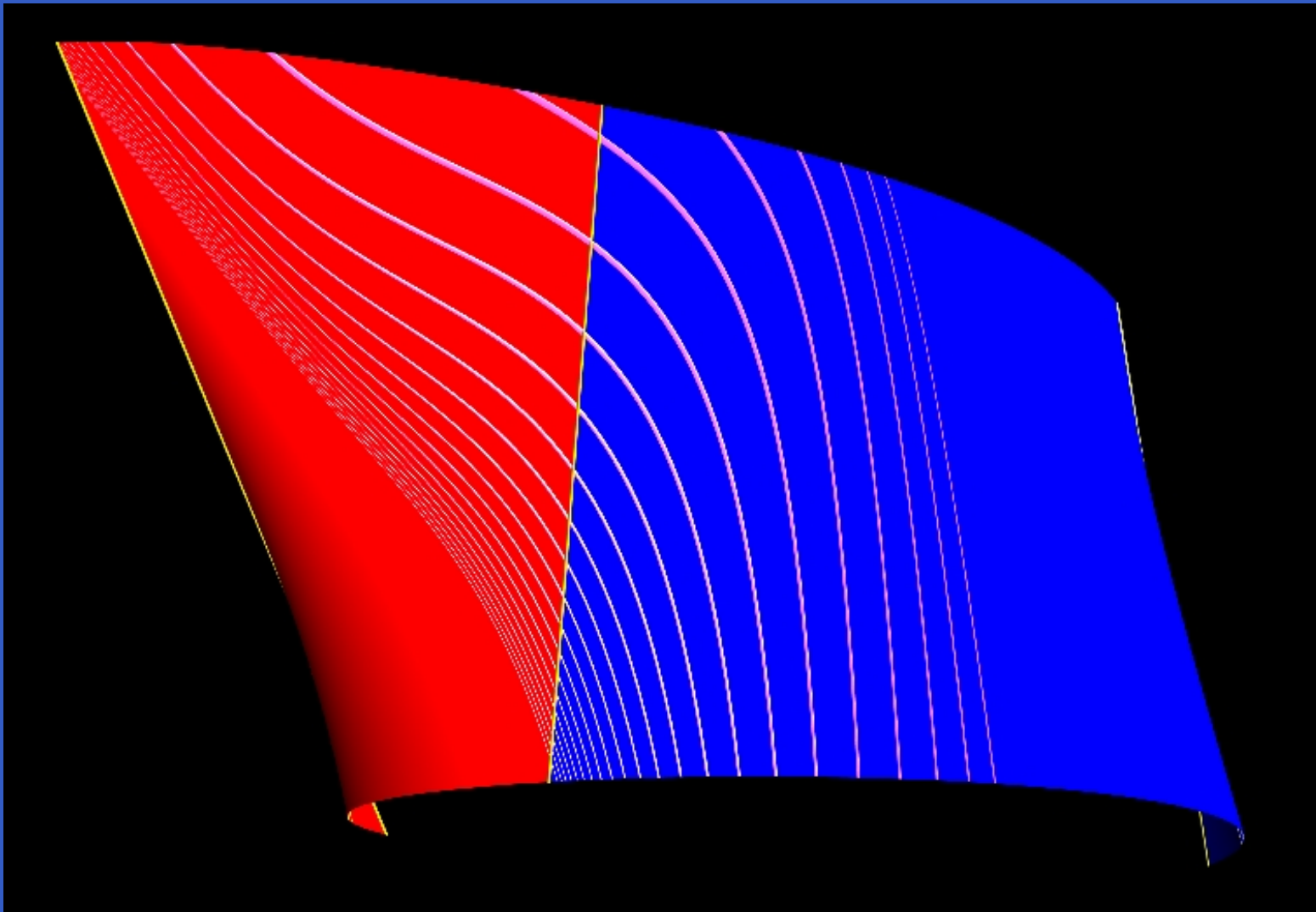
Beispiel 1: Regelflächen-Stücke mit G^2 -Verbindung



Beispiel 2: Regelflächen-Stücke mit G^3 -Verbindung



Beispiel 3: Regelflächen-Stücke mit G^3 -Verbindung



Was ist noch zu tun?

- Hat die projektive Erzeugung der Normkurven eine Bedeutung im Linienraum?
- Kann man das für die Interpolation nützen?
- Die Lösungen der algebraischen Gleichungssysteme sind nicht eindeutig.
- Was sind brauchbare Gestaltungs-Parameter?

•
•
•



Herzlichen Dank Für Ihre Aufmerksamkeit!