

Linienelemente und Flaggen

Boris Odehnal

Habilitationskolloquium, 19. November 2007

Überblick

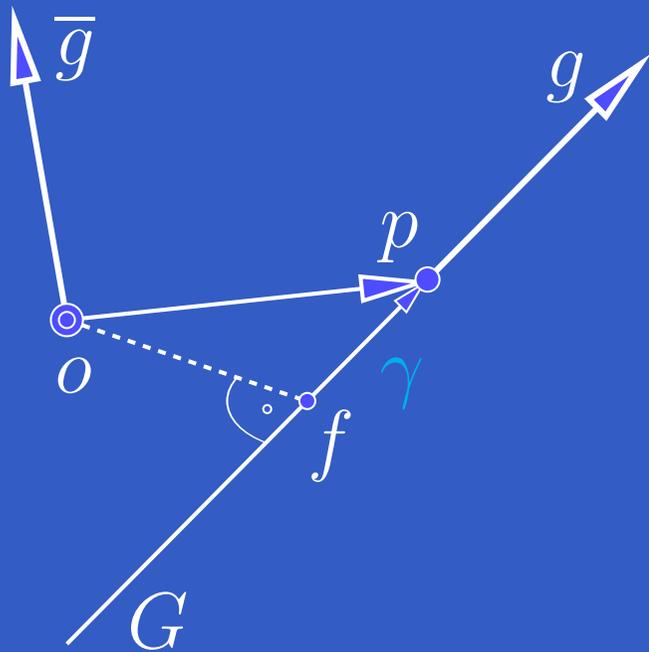
- Linienelemente in \mathbb{R}^3
- Flaggen in projektiven Räumen
- Flaggen in euklidischen Räumen
- Linienelemente in \mathbb{P}^3

Ziele

- niedrigdimensionale Punktmodelle
- mit schönen Eigenschaften: lineare MF von Flaggen sollen im Modell URe sein
- Transformationen im Ausgangsraum induzieren automorphe Kollineationen der Modellfläche
- verwendbare Koordinaten
- eventuell Anwendungen

Linienelemente in \mathbb{R}^3

Linienelemente und Koordinaten



- Linienelement $(P, G) =$
Gerade $G +$ Punkt $P \in G$
- (g, \bar{g}) Plückerkoordinaten
von G , $\|g\| = 1$
 $\bar{g} := p \times g$, $\langle g, \bar{g} \rangle = 0$
- $\gamma := \langle p, g \rangle$
orientierter Abstand fp

$(g, \bar{g}, \gamma) \in \mathbb{R}^7$ Koordinaten von (P, G)
abhängig von P , homogen

Linienelemente und Koordinaten: Punktmodell

- Punktmodell in \mathbb{P}^6
 1. Kegel M_2^5 über der Plücker-Quadrik
 2. trägt zwei 3-param.-Familien von 3-Räumen
- Spitze + eine Erzeugende *fehlen*
- nachträglicher proj. Abschluß nicht möglich
bestenfalls (g, \bar{g}, ∞) für (G, G_u)

Punktmodell: induzierte Autokollineationen

- äquiforme Bewegung

$$x \mapsto x' = \alpha Ax + a$$

$$A \in \text{SO}_3, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}^3$$

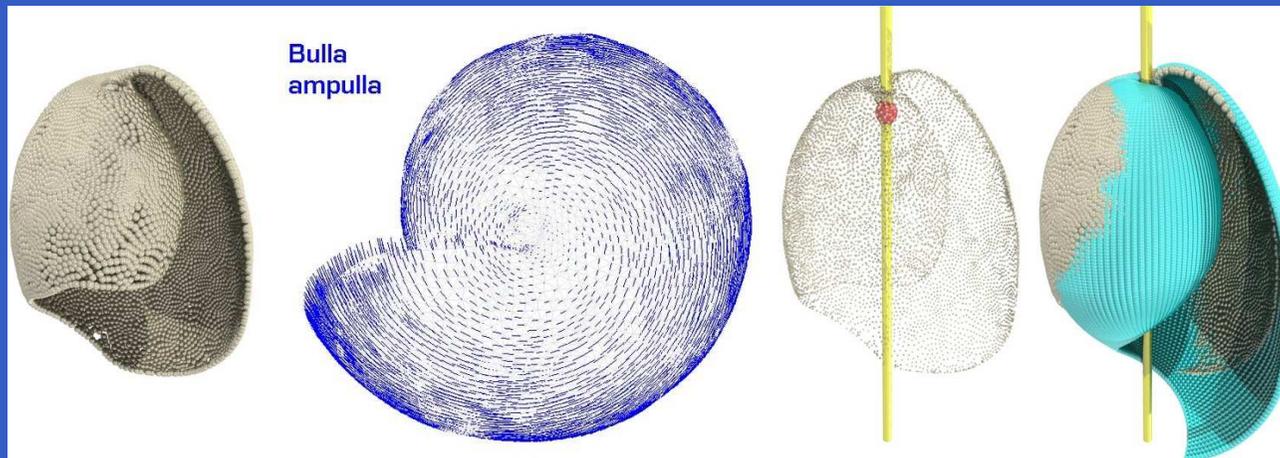
- Transformation der LE-Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ A^\times A & \alpha A & 0 \\ a^T A & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \bar{g} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g' \\ \bar{g}' \\ \gamma' \end{bmatrix}, \quad a \times x = A^\times x$$

Satz: Die äquiformen Bewegungen im \mathbb{R}^3 induzieren automorphe Kollineationen von M_2^5 .

Anwendungen

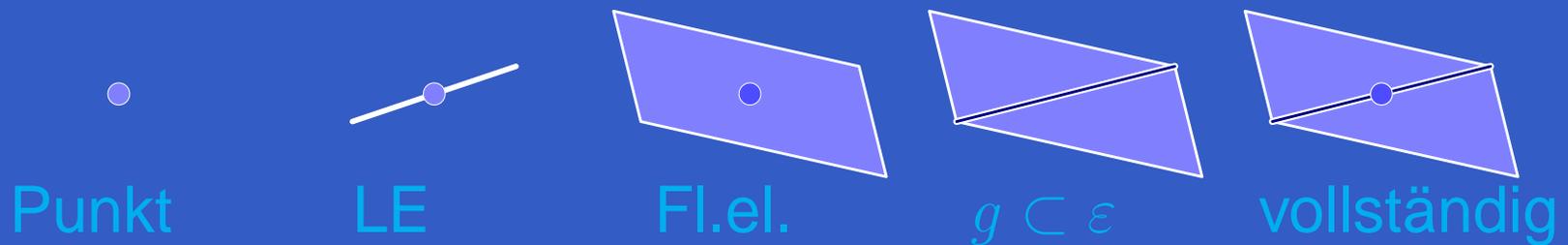
- Flächenerkennung
- Flächenrekonstruktion
- im Gegensatz zur Liniengeometrie mehr Flächenklassen erkennbar



Flaggen in projektiven Räumen

Flaggen in projektiven Räumen: Definition

- projektiver Raum \mathbb{P}^n , $-1 < n < \infty$
- Flagge = aufsteigende Unterraumkette
 $F = \mathbb{P}^{d_1} \subset \dots \subset \mathbb{P}^{d_k}$, $0 \leq d_1 < \dots < d_k < n$
- F vollständig $\iff (d_1, \dots, d_k) = (0, \dots, n-1)$
 F unvollständig \iff sonst
- Beispiele in \mathbb{P}^3 :



Flaggen in projektiven Räumen: Punktmodelle

- $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$, $\mathbb{K} \dots$ kommutativer Körper
 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, auch andere möglich
- Punktmodelle für die k -dim. Komponenten:
Graßmann-MF $G_{n,k}$

$$\dim G_{n,k} = (n - k)(k + 1), \dim[G_{n,k}] = \binom{n+1}{k+1} - 1 =: m_k$$

- $G_{n,k} \subset \mathbb{P}^{m_k} = \mathbb{P}(\mathbb{V}_k)$, $\mathbb{K}^{m_k+1} =: \mathbb{V}_k$
- vollständige Flagge $\hat{=} \text{Punkt auf der}$

$$\text{Segre-MF } S_{n,\dots} \subset \mathbb{P}(\bigotimes_{k=0}^{n+1} \mathbb{V}_k) = \mathbb{P}(\mathbb{W}),$$

$$\dim \mathbb{W} =: m + 1$$

Flaggen in projektiven Räumen: Flaggenmannigfaltigkeit

Definition:

Die Flaggen-MF \mathcal{F}^n ist die Menge aller Punkte aus $\mathbb{P}(\mathbb{W})$, die einer vollständigen Flagge entsprechen.

$$\dim \mathcal{F}^n = \frac{1}{2}n(n+1) =: f, \quad \dim[\mathcal{F}^n] = ?$$

n	2	3	4	5	6
f	3	6	10	15	21
m	8	95	2499	161999	26471024

\implies Modellräume unverhältnismäßig groß

-
-
-

Flaggen in euklidischen Räumen

Flaggen in euklidischen Räumen

\mathbb{R}^n ... n -dimensionaler euklidischer Raum

- vollständige Flagge F in $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$
Koordinatensystem in $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$
(oBdA orthonormale) Basis des $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$
euklidische Bewegung des \mathbb{R}^n
- Modelle der euklidischen Bewegungsgruppen
 $\hat{=}$
Modelle der Flaggen-MF in euklidischen
Räumen

•
•
•
speziell im \mathbb{R}^3

Study-Quadrik R_2^6

=

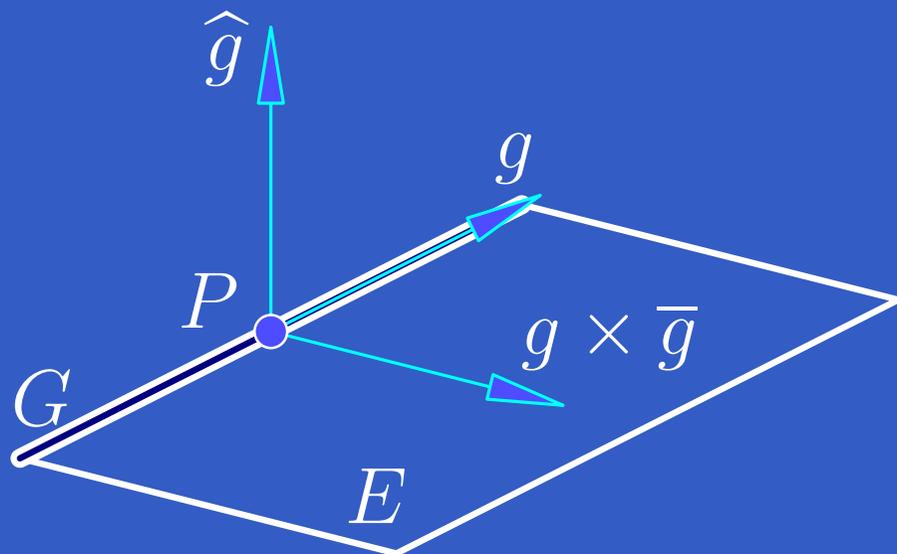
Punktmodell der euklidischen Bewegungen in \mathbb{R}^3

=

Punktmodell der Flaggen-MF im euklidischen \mathbb{R}^3

(mehrfach überdeckt)

Flaggen in euklidischen Räumen: speziell \mathbb{R}^3



- $\mathbf{F} = (P, G, E)$
- Linienelement
 $(P, G) = (g, \bar{g}, \gamma)$
- Ebene E durch
 (P, G) mit Normalenvektor \hat{g}

- $E \supset G \implies \hat{g} \perp g \implies \langle g, \hat{g} \rangle = 0$
- Vereinfachung: $\langle g, g \rangle = \langle \hat{g}, \hat{g} \rangle (= 1)$
- $\{p; g, \hat{g}, g \times \hat{g}\}$... orientierte kartesische Basis

Flaggen in euklidischen Räumen: speziell \mathbb{R}^3

- $\mathbf{F} = (g, \bar{g}, \hat{g}, \gamma) \in \mathbb{R}^{10}$
- Das geometrische Objekt \mathbf{F} trägt vier orientierte Flaggen:
 $(g, \bar{g}, \hat{g}, \gamma), (-g, -\bar{g}, \hat{g}, -\gamma),$
 $(-g, -\bar{g}, -\hat{g}, -\gamma), (g, \bar{g}, -\hat{g}, \gamma)$
- Die Koordinaten der Flagge sind homogen, wobei \hat{g} unabhängig skaliert werden kann.
- $(g, \bar{g}, \hat{g}, \gamma) \longleftrightarrow (\lambda g, \lambda \bar{g}, \mu \hat{g}, \lambda \gamma), \quad \lambda \mu \neq 0$

Flaggen in euklidischen Räumen: speziell \mathbb{R}^3

Satz.

Der Vektor $(g, \bar{g}, \hat{g}, \gamma) \in \mathbb{R}^{10}$ ist Koordinatenvektor einer Flagge $F \subset \mathbb{R}^3$.

Voraussetzungen und Einschränkungen:

$$g \neq 0, \quad \hat{g} \neq 0,$$

$$\langle g, \bar{g} \rangle = 0, \quad \langle g, \hat{g} \rangle = 0, \quad \langle g, g \rangle - \langle \hat{g}, \hat{g} \rangle = 0$$

Beweis:

Komponenten aus $(g, \bar{g}, \hat{g}, \gamma)$ rekonstruierbar. \square

Eigenschaften des Punktmodells

- $(g, \bar{g}, \hat{g}, \gamma) = (g_1, g_2, g_3; g_4, g_5, g_6; g_7, g_8, g_9; g_{10})$
 $g_i \dots$ homogene Punktkoordinaten in \mathbb{P}^9

- Gleichungen der MF M :

$$\langle g, \bar{g} \rangle = g_1 g_4 + g_2 g_5 + g_3 g_6 = 0$$

$$\langle g, \hat{g} \rangle = g_1 g_7 + g_2 g_8 + g_3 g_9 = 0$$

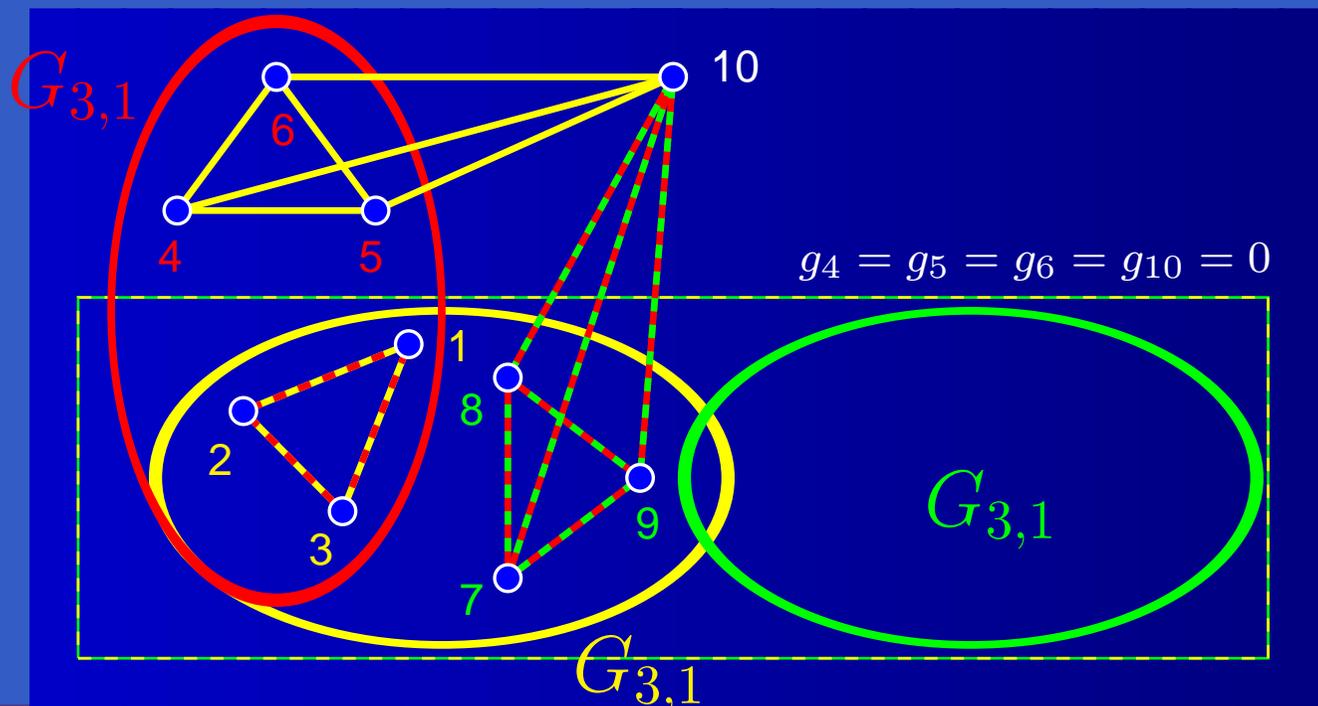
$$\langle g, g \rangle - \langle \hat{g}, \hat{g} \rangle = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 - g_7^2 - g_8^2 - g_9^2 = 0$$

- $\deg M = 8, \dim M = 6$
- g_{10} kommt in keiner Gleichung vor
 $\implies M_8^6$ ist ein Kegel.

Eigenschaften des Punktmodells

Satz: M_8^6 ist rational parametrisierbar.

$M_8^6 \subset \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \dots$ Schnitt 3er quadr. Kegel
 $\Delta_i \dots$ 3-dim. Spitzen, 6-dim. Erzeugende



induzierte Kollineationen im Modellraum

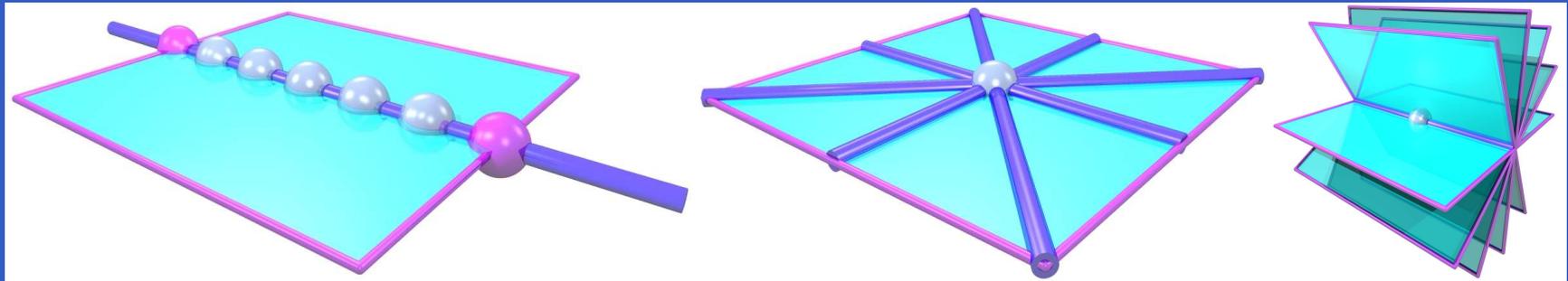
- (A, a, α) ... äquiforme Bewegung in \mathbb{R}^3
- Transformation der Flaggenkoordinaten

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ A \times A & \alpha A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ a^T A & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \bar{g} \\ \hat{g} \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g' \\ \bar{g} \\ \hat{g} \\ \gamma \end{bmatrix}$$

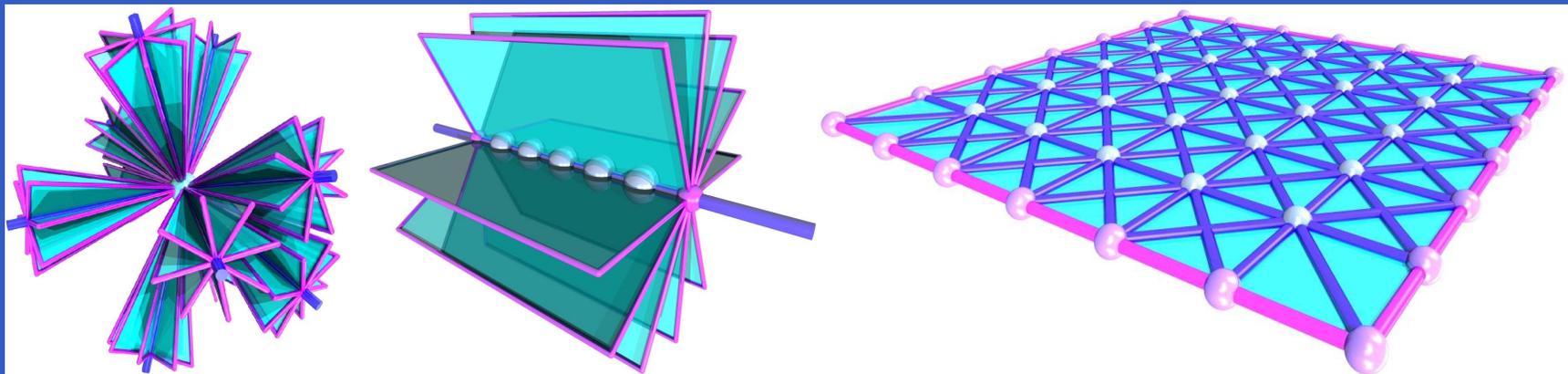
Satz: Die äquiformen Bewegungen im \mathbb{R}^3 induzieren automorphe Kollineationen der M_8^6 .

Eigenschaften des Punktmodells

Büschel von Flaggen $\hat{=}$ Geraden in M_8^6



Bündel von Flaggen $\hat{=}$



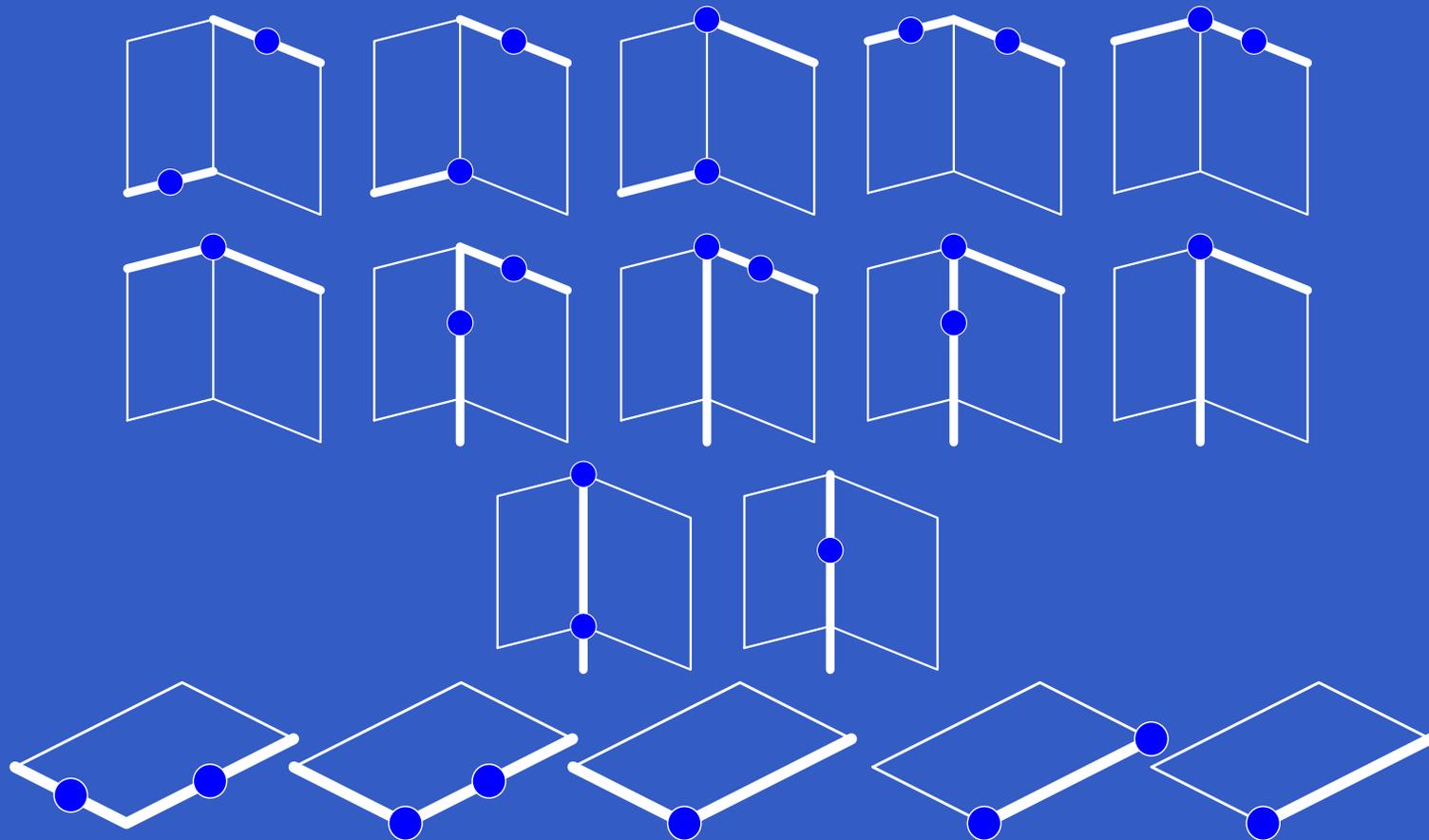
ov. Quadriken, Ebenen, quadr. Kegeln in M_8^6 .

Beziehungen zu nichteuklidischen Geometrien

- Bündel mit festem **Punkt**:
Flaggen durch einen Punkt $\hat{=}$
euklidische Drehungen um einen Punkt $\hat{=}$
elliptischer Dreiraum
- Bündel mit fester **Ebene**:
Flaggen, die sich nur im LE unterscheiden $\hat{=}$
ebene euklidische Bewegungen $\hat{=}$
quasi-elliptischer Dreiraum

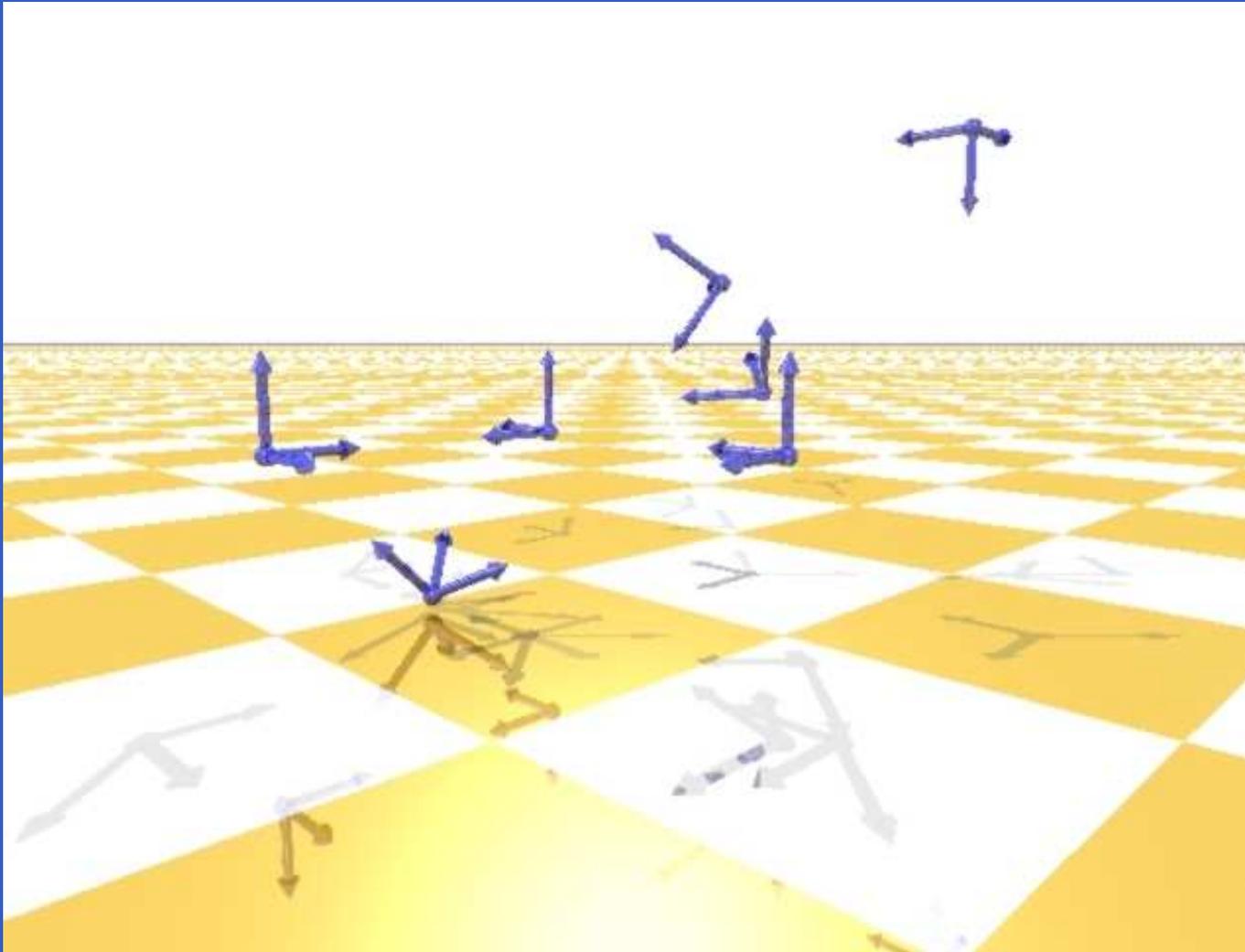
beide aufgrund der mehrfachen Orientierbarkeit der Flaggen mehrfach überdeckt

Kennzeichnung von Flaggenpaaren

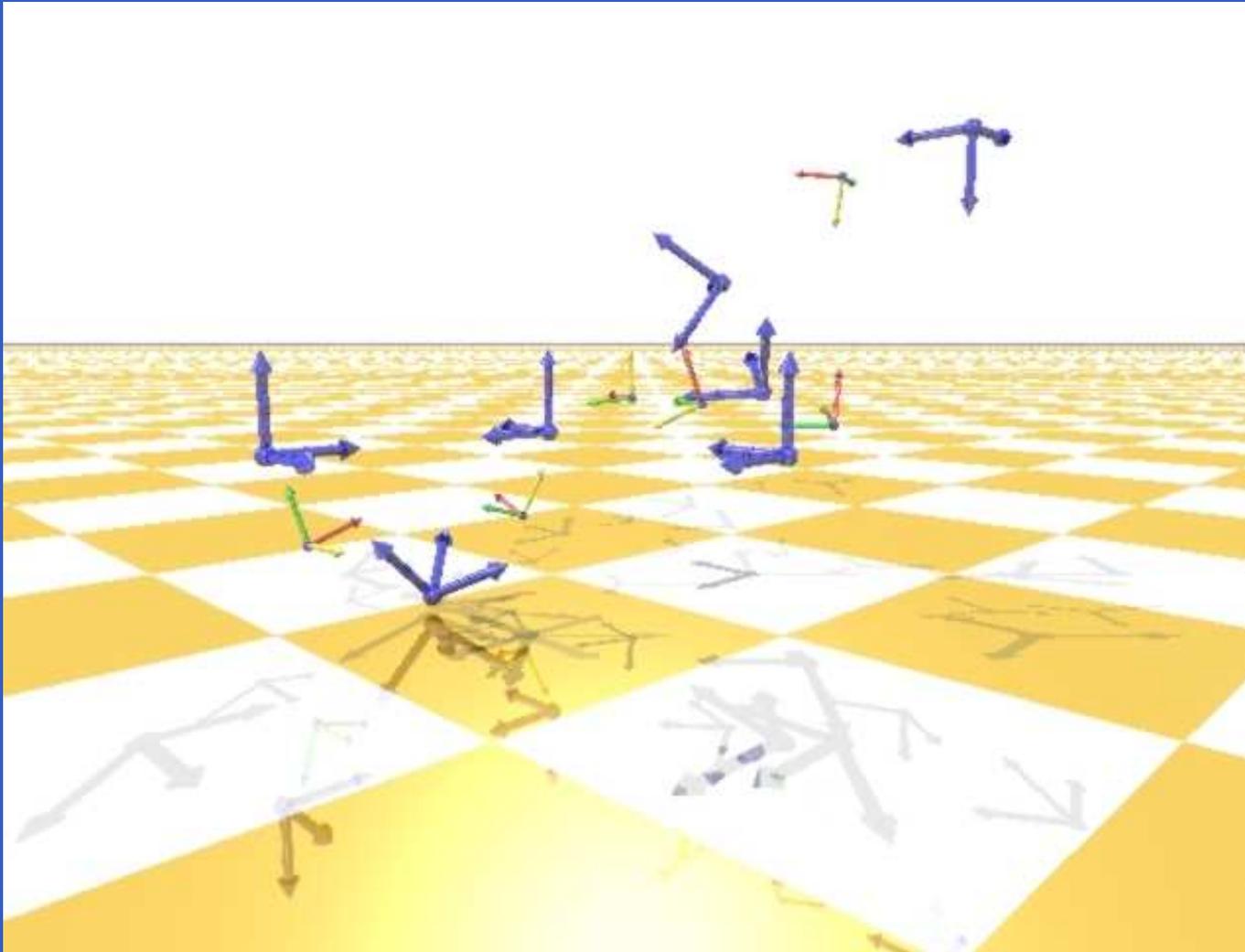


mit wenigen linearen Gleichungen möglich

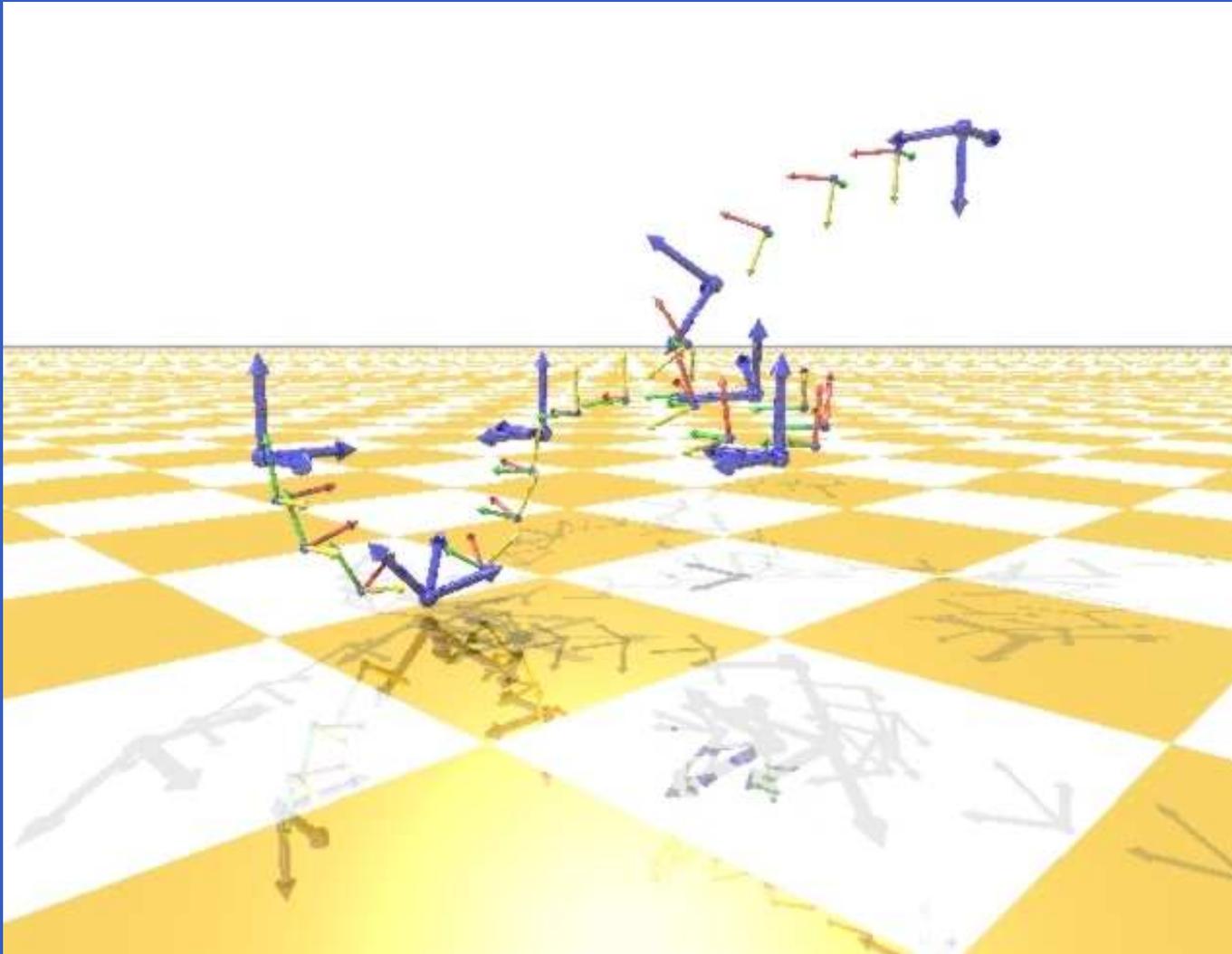
Anwendung: Bewegungsplanung



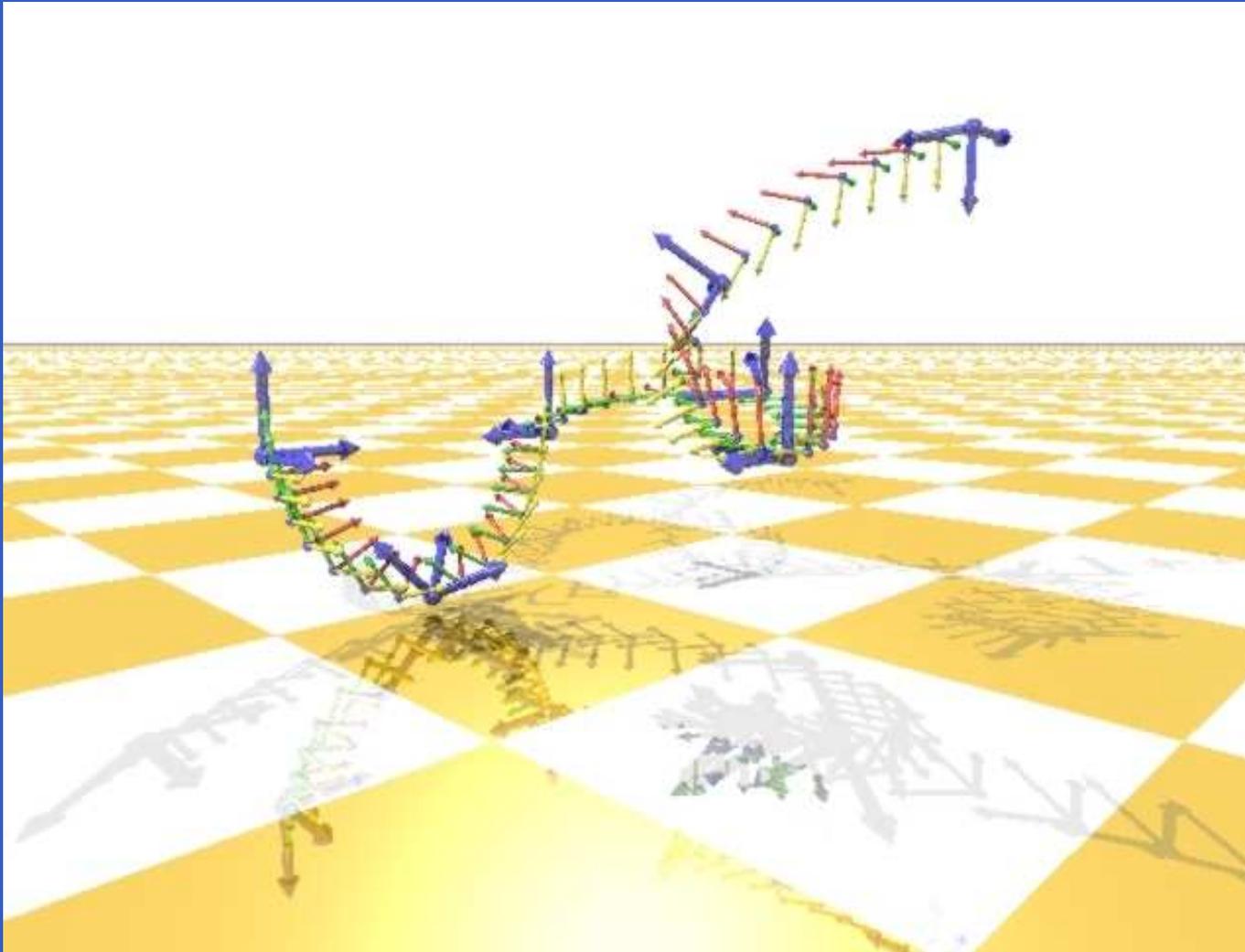
Anwendung: Bewegungsplanung



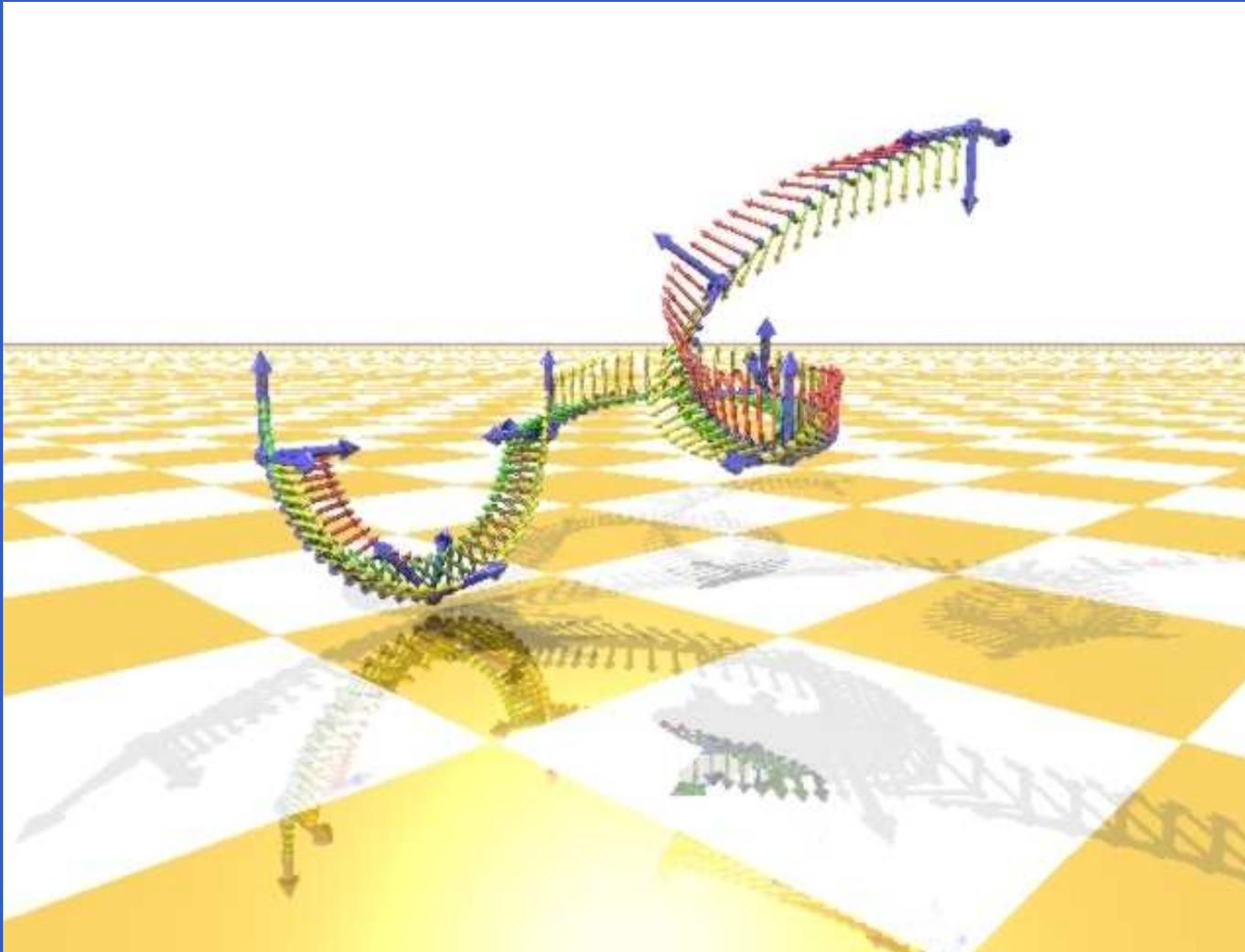
Anwendung: Bewegungsplanung



Anwendung: Bewegungsplanung



Anwendung: Bewegungsplanung



Linienelemente in \mathbb{P}^n

Linienelemente in \mathbb{P}^n

$\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$, $0 < n < \infty$, $\mathbb{K} \dots$ kommutativer Körper ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$)

$\mathcal{F}_{0,1}^n \dots$ MF aller LE in \mathbb{P}^n

- Linienelement =
Gerade G + inzidenter Punkt P
- dual: Hyperebene H + Hyperebene in H
- LE = vollst. Flagge in \mathbb{P}^2 , sonst unvollst.

Punktmodell

- $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$... Punkte,
 $G_{n,1} \subset \mathbb{P}(\mathbb{K}^{m+1})$, $m = \binom{n+1}{2} - 1$... Geraden
- $S_{n,m}$... Punktmodell für die Menge aller
Paare (P, G) (Segre-MF mit Indizes n und m)
- $S_{n,m} \subset \mathbb{P}(\mathbb{K}^q)$, $q = (n+1)(m+1)$
- $\dim S_{n,m} = n + m$
- $\dim \mathcal{F}_{0,1}^n = 2n - 1$, speziell $\dim \mathcal{F}_{0,1}^3 = 5$

Punktmodell

Satz:

$\mathcal{F}_{0,1}^n$ ist stets in einem l -dimensionalen Schnitt von $S_{n,m}$ enthalten, wobei $l = \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n - 3)$ gilt.

Beweis:

Anzahl der IBen (Inzidenzbedingungen) für $P \in G$ in \mathbb{P}^n ist $\binom{n+1}{3}$, d.s. ebensoviele l.u. lineare Gleichungen, die einen \mathbb{P}^l bestimmen.

Linienelemente in \mathbb{P}^3

- $(g_7 : g_8 : g_9 : g_0) \dots$ hom. Koordinaten von P ,
 $(g_1 : \dots : g_6) \dots$ hom. Plücker-Koord. von G
- $w_{ij} = p_i g_j \dots$ Koordinaten im Modellraum \mathbb{P}^{23}
- \exists vier IBen (und die Plücker-Bedingung)

$$\begin{bmatrix} 0 & g_4 & g_5 & g_6 \\ -g_4 & 0 & g_3 & -g_2 \\ -g_5 & -g_3 & 0 & g_1 \\ -g_6 & g_2 & -g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_7 \\ g_8 \\ g_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\implies \mathcal{F}_{0,1}^3 \subset S_{3,5} \cap \mathbb{P}^{19}$

Koordinatisierung: anders

- $\mathbf{L} = (P, G) = (g, \bar{g}, \hat{g}, g_0) \in \mathbb{R}^{10}$
- Koordinaten von \mathbf{L} homogen

$$(g, \bar{g}, \hat{g}, g_0) \longleftrightarrow (\lambda g, \lambda \bar{g}, \mu \hat{g}, \mu g_0)$$

mit $\lambda\mu \neq 0$

- \implies Punktmodell in \mathbb{P}^9
- es gelten
 $\langle g, \bar{g} \rangle = 0$ Plücker-Bedingung
 $\langle \hat{g}, \bar{g} \rangle = 0, -g_0 \bar{g} + \hat{g} \times g = 0$ IBen

Punktmodell: Eigenschaften

- IBen und Plücker-Bedingung bestimmen eine algebraische Varietät M_5^5 vom Grad 5:

$$H(t) = \frac{1}{144}t^6 + \dots \implies$$

$$\deg M^5 = \deg H(t)! \frac{1}{144} = 5$$

- komplementäre Ausnahmeräume \mathbb{A}_i :

$$\mathbb{A}_1 : \widehat{g} = 0, g_0 = 0 \dots 5\text{-dim UR}$$

$$\mathbb{A}_2 : g = 0, \overline{g} = 0 \dots 3\text{-dim UR}$$

Die Punkte in \mathbb{A}_i entsprechen keinem LE.

Satz: M_5^5 ist lineares Bild von $\mathcal{F}_{0,1}^3 \subset S_{3,5}$.

induzierte Autokollineationen vom M_5^5

- $\kappa \in \text{PGL}(\mathbb{P}^3) : x\mathbb{K} \mapsto x'\mathbb{K} = Tx\mathbb{K}, T \in \text{GL}(\mathbb{K}, 4)$
- Transformation der LE-Koordinaten:

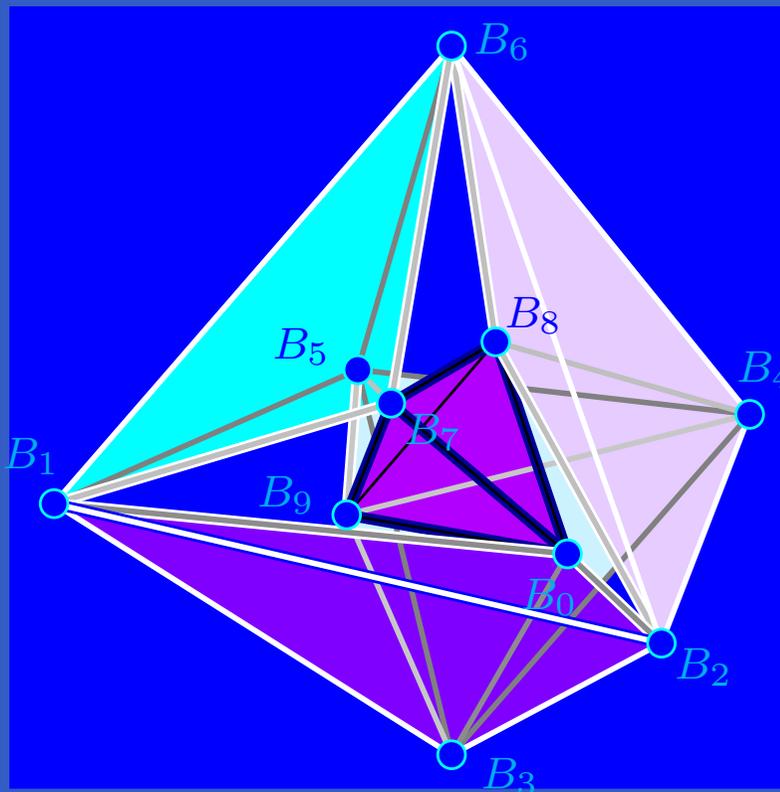
$$\begin{bmatrix} T \wedge T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \bar{g} \\ \hat{g} \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g' \\ \bar{g}' \\ \hat{g}' \\ g'_0 \end{bmatrix}$$

$T \wedge T \dots$ alternierendes Quadrat von T

Satz: Die projektiven Kollineationen in \mathbb{P}^3 induzieren automorphe Kollineationen von M_5^5 .

Punktmodell: Eigenschaften

Satz: M_5^5 ist rational parametrisierbar.



$$S_1 = [B_7, B_8, B_9, B_0]$$

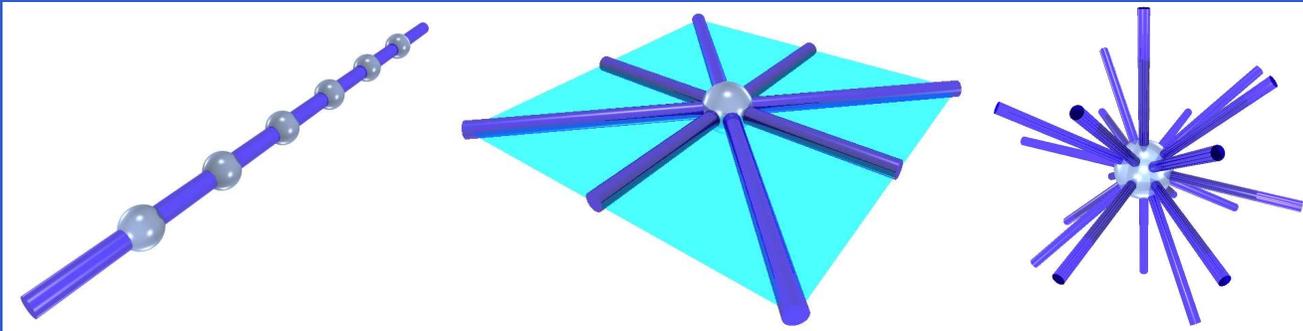
$$S_2 = [B_3, B_4, B_5, B_9]$$

$$S_3 = [B_1, B_5, B_6, B_7]$$

$$S_4 = [B_2, B_4, B_6, B_8]$$

$$S_5 = [B_0, B_1, B_2, B_3]$$

Spezielle Teilmannigfaltigkeiten



Punktreihe

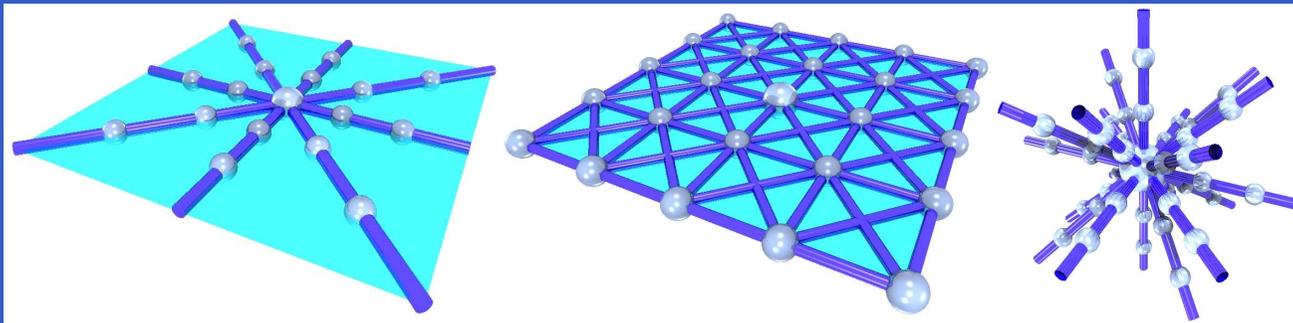
Gerade

Ger.-büschel

Gerade

Ger.-bündel

Ebene



LE-Büschel

Ebene

LE-Feld

r.a. Quadrik

LE-Bündel

Dreiraum

(vermindert um die Punkte in \mathbb{A}_i)

ein paar Bemerkungen

- maßgeschneiderte Punktmodelle für spezielle Räume
- Untergrenzen für Dimensionen der Modellräume?
- Modelle können bestimmten Anwendung gemäß gestaltet werden: etwa Ausstatten mit einer Metrik
- Linienelementkoordinaten auch für Zylinder oder Kreise geeignet