

Geometrische Erzeugung linearer Geradenabbildungen

Boris Odehnal

schon bekannt

lineare Geradenabbildungen von
Eckhart & Rehbock, Blaschke & Grünwald,
sphärisch-kinematische Abbildung

damals

Linearität der Geradenabbildung

=

Linearität der Abbildungsgleichungen
in den Plücker-Koordinaten

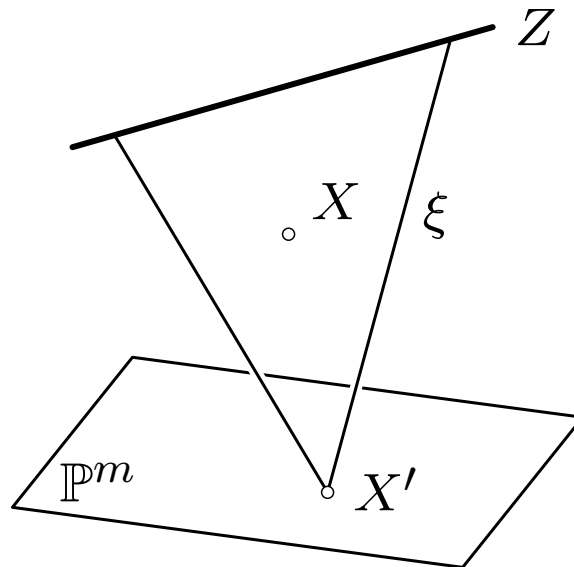
Lineare Abbildung

(im Sinne der darst. Geometrie)

Projektion $\pi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ ($m < n$)

+

Kollineation $\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^m$



Punkte $\xrightarrow{\pi}$ Punkte

$\ker \pi = Z$ Zentrum, $\dim Z = n - m - 1$

\mathbb{P}^m Bildraum

$X \mapsto X' = (X \vee Z) \cap \mathbb{P}^m$

Lineare Geradenabbildung

(im Sinne von Brauner)

Projektion $G_k^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ ($m < \binom{n+1}{k+1} - 1$)

+

Kollineation $\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^m$

im folgenden: $n = 3$, $k = 1$ und $m = 3, 2$:

lineare Geradenabbildungen in \mathbb{P}^3 , \mathbb{P}^2

Ziel

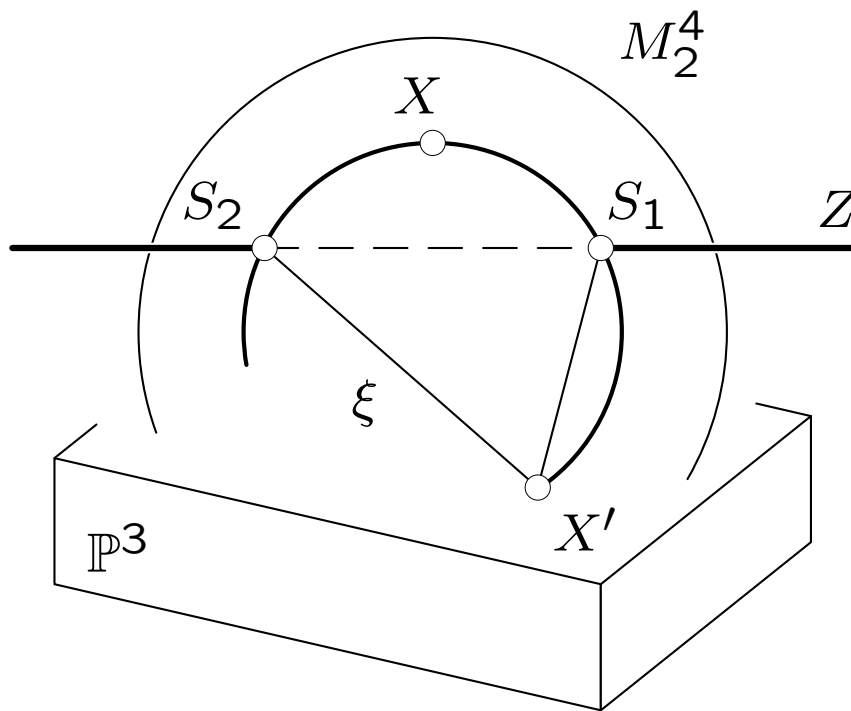
geometrische Erzeugung linearer Geradenabbildungen

$\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{P}^m$ ($m = 3, 2$)

ohne in den \mathbb{P}^5 auszuweichen

Konzept

Übersetzen der Operationen im \mathbb{P}^5 und auf der M_2^4 in Operationen in der Geradenmenge des \mathbb{P}^3



Z Komplexbüschel (Netz)

$\xi = Z \vee X$ ringartige Quadrik

$X' = \xi \cap \mathbb{P}^3$ Netzprojektion

bis jetzt

Abbildung der Geraden des \mathbb{P}^3 auf den dreidimensionalen projektiven Raum der Kegelschnitte durch zwei feste Punkte

Rezept

lineare Geradenabbildung als Zusammensetzung von:

1. Netzprojektion (nicht linear)
2. stereographische Projektion (nicht linear)
3. Polarität oder Nullpolarität (linear)

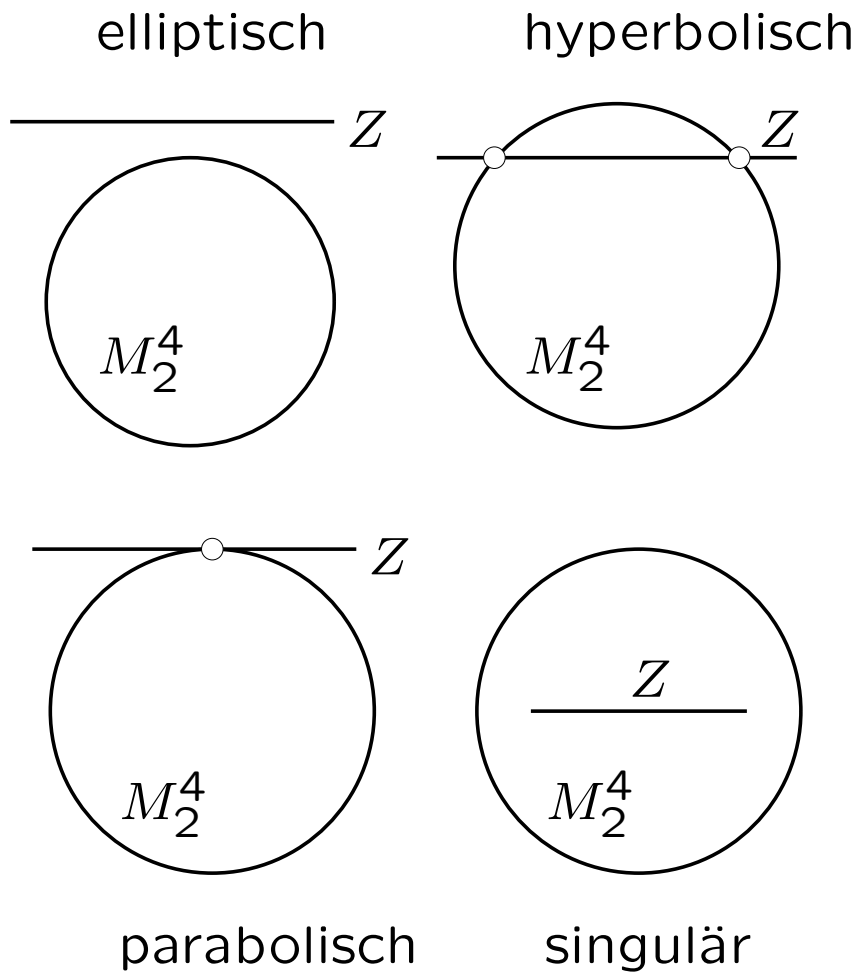
Typologie

linearer Geradenabbildungen in den \mathbb{P}^3

Typ des von Z bestimmten Komplexbüschels

=

Typ der linearen Geradenabbildung



1. Der elliptische Typ

(lineare Abbildung)

Zentrum $Z = (u : v : 0 : u : v : 0)$

Bildraum $\hat{Z} : x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = 0$

Abbildungsgleichungen

..... $G \mapsto (g_1 - g_4 : g_2 - g_5 : 2g_3 : 2g_6)$

Umriß von M_2^4 $U : x_1^2 + x_2^2 - x_3x_6 = 0$

(lineare Geradenabbildung)

Netzriss von G

$g_6x_0^2 - (g_2 - g_5)x_0x_1 + (g_1 - g_4)x_0x_2 + g_3(x_1^2 + x_2^2) = x_3 = 0$

stereographischer Riss in

..... $g_6x_0 - (g_2 - g_5)x_1 + (g_1 - g_4)x_2 + g_3x_3 = 0$

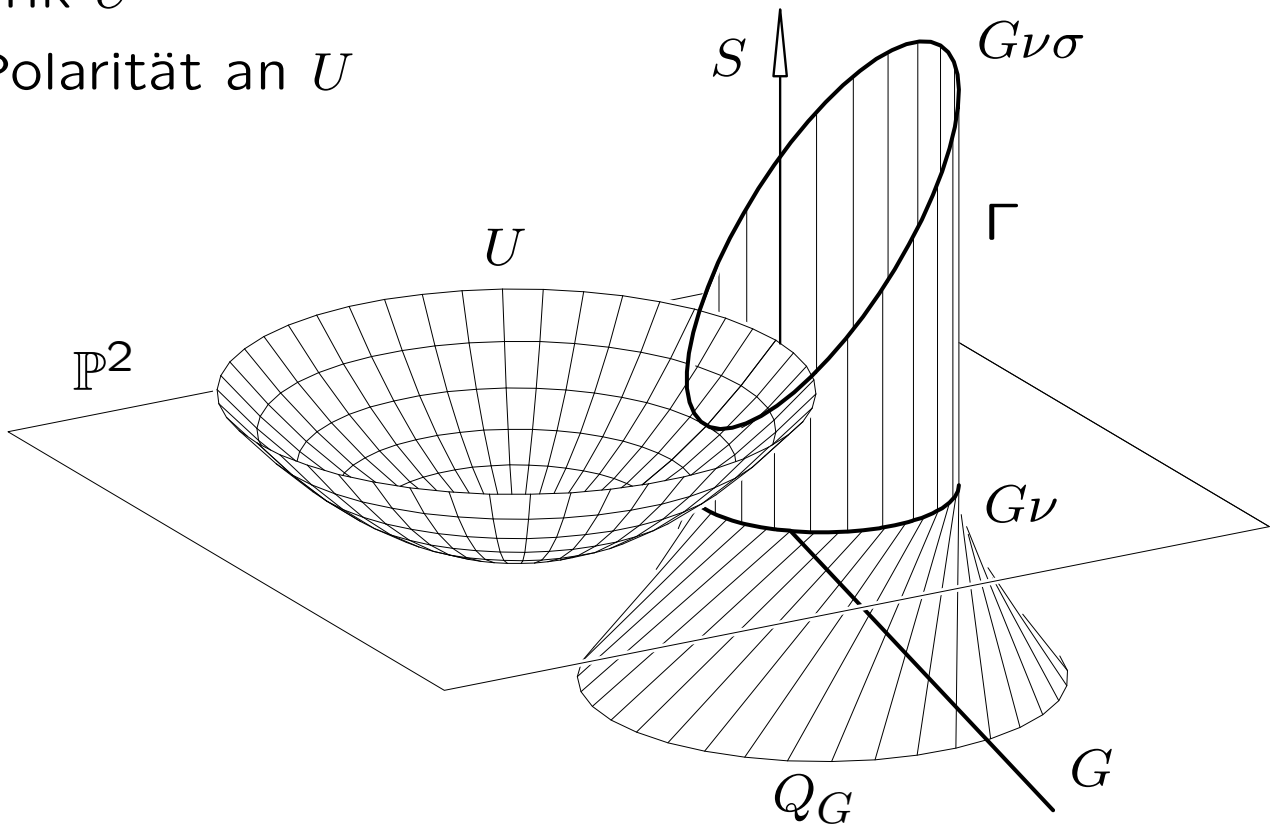
Pol bezüglich U $(2g_6 : g_5 - g_2 : g_1 - g_4 : 2g_3)$

1. Der elliptische Typ

Projektion mit elliptischem Netz

stereographische Projektion auf eine ovale Quadrik U

Polarität an U



Eine Hopf-Abbildung

als lineare Geradenabbildung

Netzprojektion $\nu : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{E}^2$

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto$$

$$(x_0^2 + x_3^2 : x_0x_1 + x_2x_3 : x_0x_2 - x_1x_3 : 0)$$

stereographische Projektion $\sigma : \mathbb{E}^2 \rightarrow S^2$

$$(x_0 : x_1 : x_2 : 0) \mapsto$$

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 : 2x_0x_1 : 2x_0x_2 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$$

Hopf-Abbildung $\phi = \nu\sigma : \mathbb{P}^3 \rightarrow S^2$

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto$$

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 : 2(x_0x_1 + x_2x_3) : 2(x_0x_2 - x_1x_3) : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Bild einer Geraden

$$G \mapsto (g_3 + g_6 : g_2 - g_5 : g_4 - g_1 : g_6 - g_3)$$

2. Der hyperbolische Typ

(lineare Abbildung)

Zentrum $Z = (0 : 0 : u : 0 : 0 : v)$

Bildraum $\hat{Z} : x_3 = x_6 = 0$

Abbildungsgleichungen $G \mapsto (g_1 : g_2 : g_4 : g_5)$

Umriß von M_2^4 $U : x_1x_4 + x_2x_5 = 0$

(lineare Geradenabbildung)

Netzriss von G $g_4x_1^2 + g_5x_1x_2 + g_2x_1x_3 - g_1x_2x_3 =$
 $x_0 - x_1 = 0$

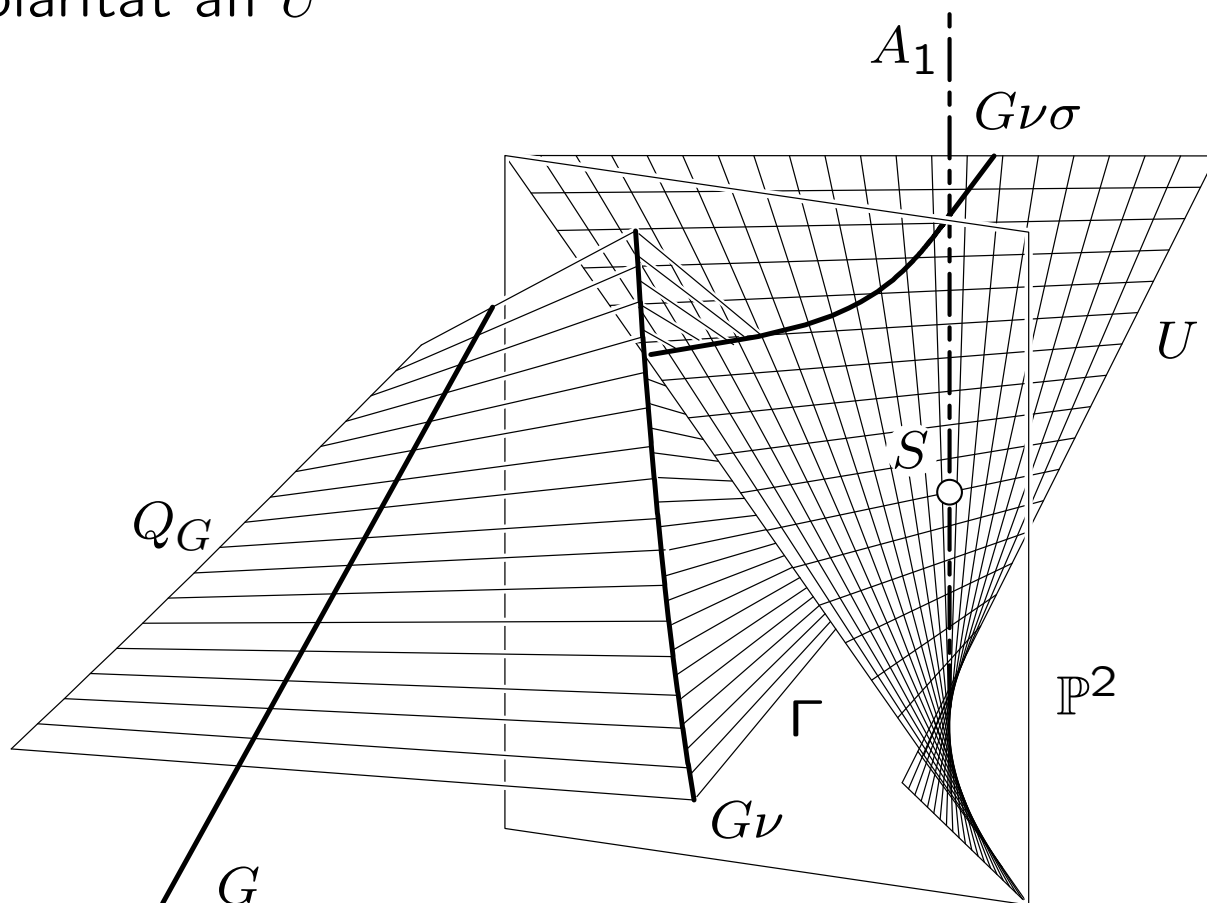
stereographischer Riss in

..... $g_1x_0 + g_4x_1 + g_5x_2 + g_2x_3 = 0$

Pol bezüglich U $(g_4 : g_1 : g_2 : g_5)$

2. Der hyperbolische Typ

Projektion mit hyperbolischem Netz
stereographische Projektion auf eine ringartige Quadrik U
Polarität an U



3. Der parabolische Typ

(lineare Abbildung)

Zentrum $Z = (0 : u : 0 : v : u : 0)$

Polarraum $x_1 = x_2 + x_5 = 0$

Bildraum $\hat{Z} : x_4 = x_5 = 0$

Abbildungsgleichungen $G \mapsto (g_1 : g_2 - g_5 : g_3 : g_6)$

Umriß von M_2^4 $U : x_3x_6 - x_2^2 = 0$

(lineare Geradenabbildung)

Netzriss von G

$$g_6x_0^2 + (g_5 - g_2)x_0x_1 + g_1x_0x_2 + g_3x_1^2 = x_3 = 0$$

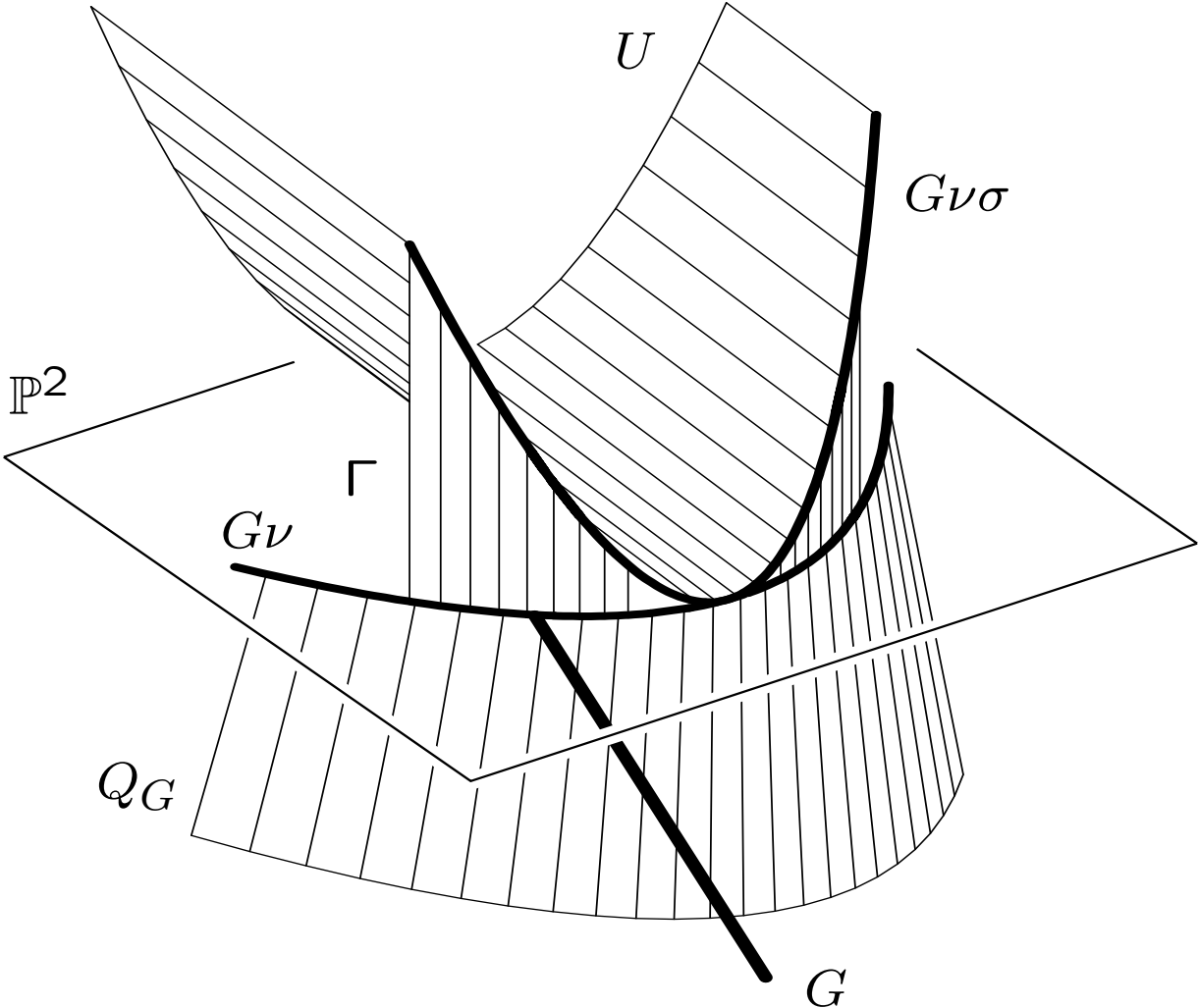
stereographischer Riss in

$$\dots\dots\dots g_6x_0 + (g_5 - g_2)x_1 + g_1x_2 + g_3x_3 = 0$$

3. Der parabolische Typ

Projektion mit parabolischem Netz
stereographische Projektion auf einen qua-
dratischen Kegel U

Polarität oder Nullpolarität



4. Der singuläre Typ

(lineare Abbildung)

Zentrum $Z = (0 : 0 : 0 : 0 : u : v)$

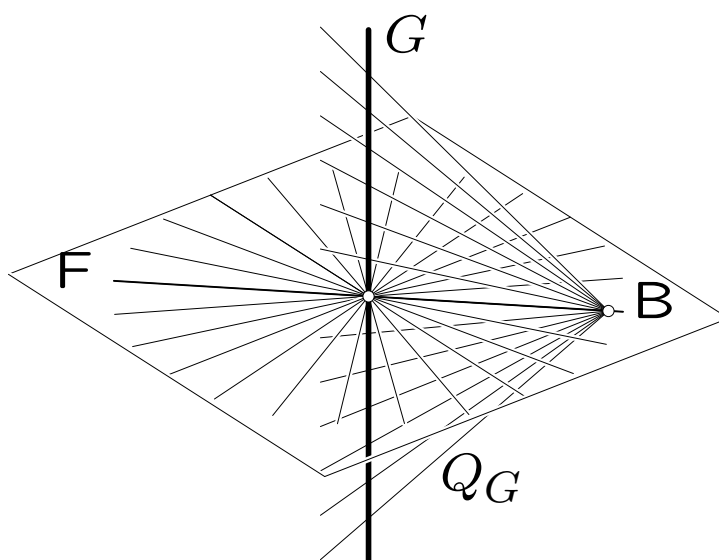
Polarraum $x_2 + x_3 = 0$

Bildraum $\hat{Z} : x_5 = x_6 = 0$

Abbildungsgleichungen $G\lambda = (g_1 : g_2 : g_3 : g_4)$

Umriß von M_2^4 $U : x_1 = x_2 = x_3 = 0 \cup x_2 = x_3 = x_4 = 0$

(lineare Geradenabbildung)



Die geometrische Realisierung steht noch aus.

Alle surjektiven linearen Geradenabbildungen in den \mathbb{P}^3 (mit Ausnahme des singulären Typs) können als Zusammensetzung einer Netzprojektion mit einer stereographischen Projektion und einer Polarität erzeugt werden.

Beweis: (Rekonstruktion der Urbildgeraden)

Je nach Typ der Abbildung:

\exists ovale, ringartige Quadrik oder quadratischer Kegel

U Umriß von M_2^4

Polarität (an U) $X \mapsto \xi$

$\xi \cap U = k$... Kegelschnitt oder Punkt von U

stereographische Projektion $\sigma : U \setminus S \rightarrow \mathbb{P}^2$:

$k \mapsto k\sigma$ Kegelschnitt oder Punkt

Alle Kegelschnitte haben zwei Punkte P_1, P_2 oder ein LE (P, p) gemein.

Netzachsen A_i durch P_i wählen; Urbilder der Kegelschnitte sind alle Geraden des ergänzenden Regulus der Quadrik durch A_i und $k\sigma$.

Geometrische Realisierung der lin. Geradenabb. in \mathbb{P}^2

1. Variante

Netzprojektion + Polbildung

oder

Netzprojektion + Polarenbildung + Korrelation

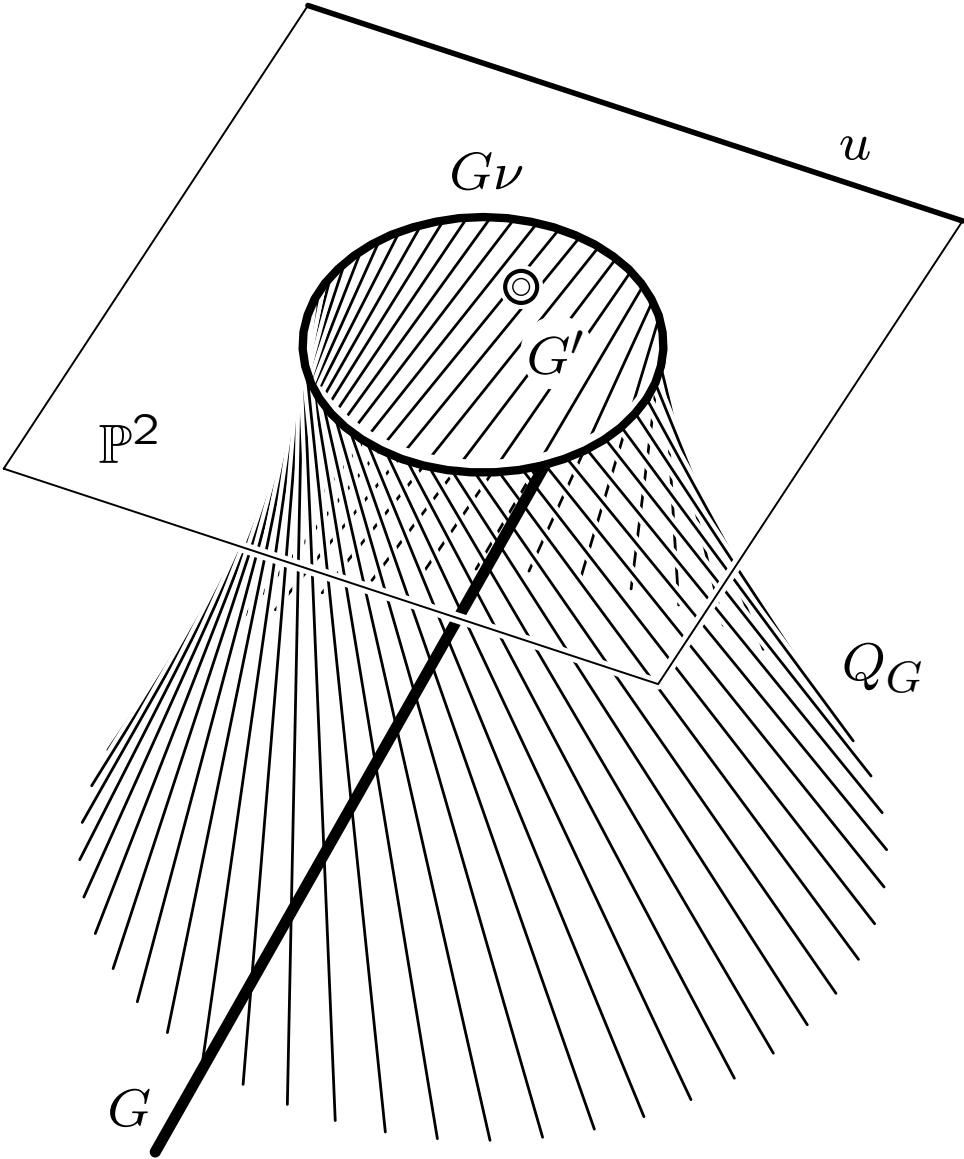
2. Variante

lineare Geradenabbildung in \mathbb{P}^3 + Projektion
 $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$

1. Der elliptische Typ

Projektion mit elliptischem Netz

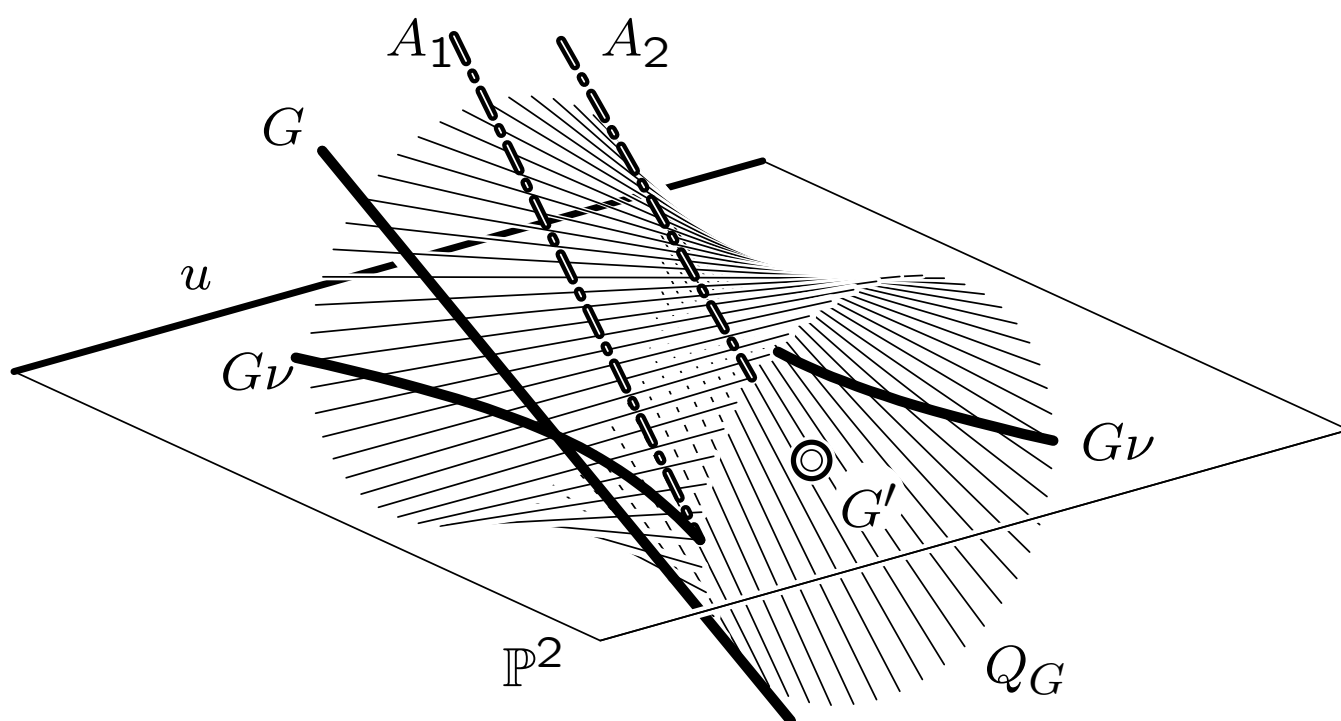
Polbildung bezüglich u



2. Der hyperbolische Typ

Projektion mit hyperbolischem Netz

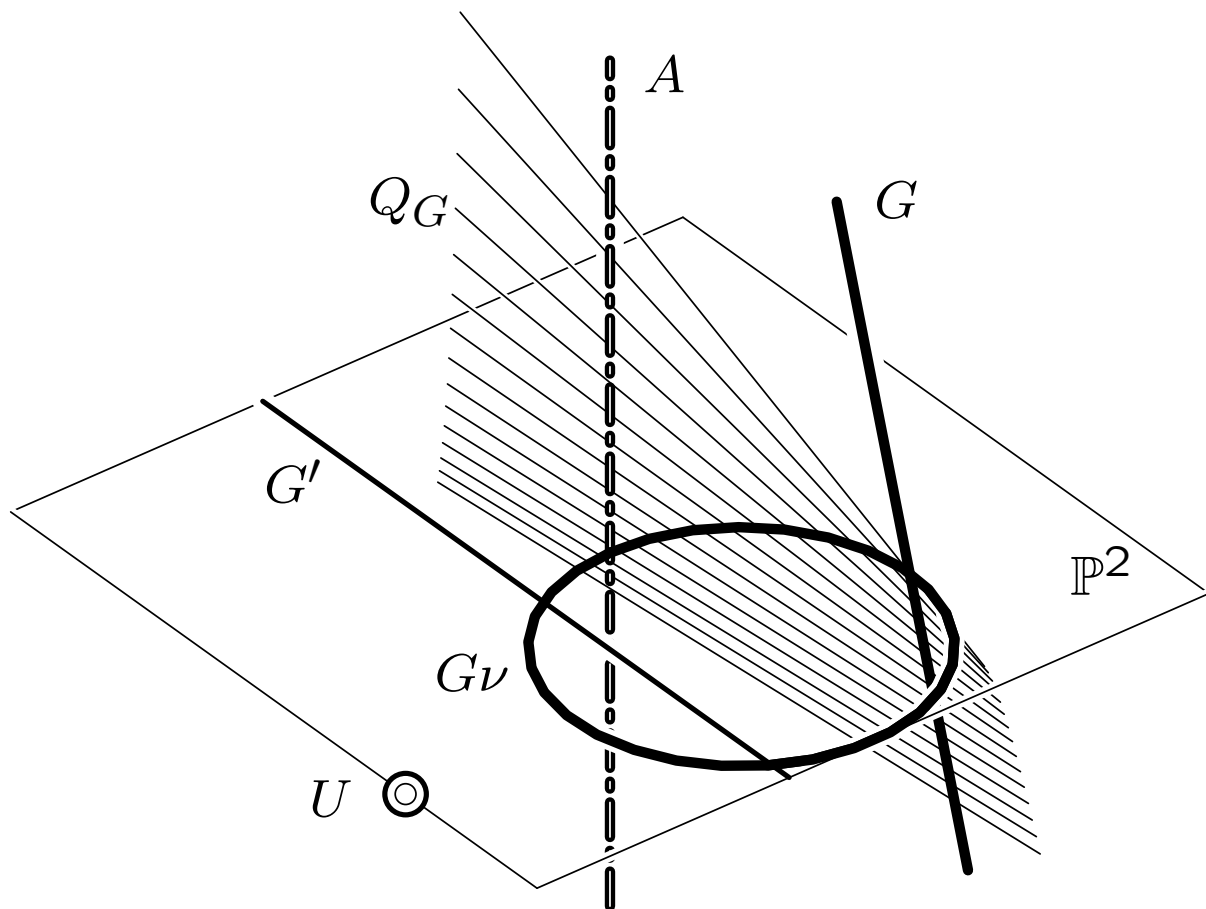
Polbildung bezüglich u



3. Der parabolische Typ

Projektion mit parabolischem Netz

Polarenbildung bezüglich U



Beziehung zu bekannten linearen Geradenabbildungen

Zentrum Z 2-dimensional,

Unterscheidung hinsichtlich der Lage von Z
bezüglich M_2^4 liefert

7 Typen:

1. $Z \cap M_2^4$ reell einteiliger Kegelschnitt
2. $Z \cap M_2^4$ nullteiliger Kegelschnitt
3. $Z \cap M_2^4 = \{e, f\}$ reelles Geradenpaar
4. $Z \cap M_2^4 = \{e, \bar{e}\}$ k. k. Geradenpaar
5. $Z \cap M_2^4 = e$ einer reelle Gerade
6. $Z \subset M_2^4$ Ebene 1. Art
7. $Z \subset M_2^4$ Ebene 2. Art

(Klassifikation schon bei Brauner)

In welchen dieser 2-dimensionalen Zentren Z_i finden wir 1-dimensionale Zentren $Z_{(e)}$, $Z_{(h)}$, $Z_{(p)}$, $Z_{(s)}$?

| Z_i | enthält |
|-------|-----------------------------------|
| Z_1 | $Z_{(h)}$, $Z_{(e)}$, $Z_{(p)}$ |
| Z_2 | $Z_{(e)}$ |
| Z_3 | $Z_{(h)}$, $Z_{(p)}$, $Z_{(s)}$ |
| Z_4 | $Z_{(e)}$, $Z_{(p)}$ |
| Z_5 | $Z_{(p)}$, $Z_{(s)}$ |
| Z_6 | $Z_{(s)}$ |
| Z_7 | $Z_{(s)}$ |

Anders gefragt: Welche Sekanten, Passanten und Tangenten (von M_2^4) und Geraden $\subset M_2^4$ können in den Ebenen Z_i gefunden werden?

Aus den vier Typen (e), (h), (p) und (s) lin. Gerabb. in \mathbb{P}^3 erhält man durch Projektion $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ folgende Typen lin. Gerabb. in \mathbb{P}^2 :

| | | |
|-----|--|--------------------|
| (e) | | (1), (2), (4) |
| (h) | | (1), (3) |
| (p) | | (1), (3), (5) |
| (s) | | (3), (5), (6), (7) |

Oder: Welche Lage können Ebenen durch Sekanten, Passanten, Tangenten und durch Erzeugende von M_2^4 einnehmen?

Geradenabbildung von Blaschke und Grünwald

Paarabbildung (ϕ^l, ϕ^r)

$$G\phi^l = (g_3 : -g_2 - g_4 : g_1 - g_5)$$

$$G\phi^r = (g_3 : g_2 - g_4 : -g_1 - g_5)$$

Ausnahmeräume $Z^l, Z^r =$ zwei Ebenen mit
gemeinsamem Punkt

ϕ^l, ϕ^r sind vom Braunerschen Typ (6.) bzw.
(7.)

folglich: Blaschke-Grünwald-Abbildung nur als
Zusammensetzung des Typs (s) lin. Gerabb.
+ Projektion realisierbar.

sphärisch-kinematische Abbildung

Paarabbildung (ϕ^l, ϕ^r)

Voraussetzung: Plücker-Koordinaten normiert:

$$g_1^2 + \dots + g_6^2 = 1$$

$$G\phi^l = (g_1 - g_4 : g_2 - g_5 : g_3 - g_6)$$

$$G\phi^r = (g_1 + g_4 : g_2 + g_5 : g_3 + g_6)$$

Ausnahmeräume Z^l, Z^r schneiden M_2^4 in den Kleinschen Bildern der Reguli auf

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

folglich: sphärisch-kinematische Abbildung nur als Zusammensetzung des Typs (e) lin. Gerabb. + Projektion realisierbar.

oder: Hopf-Abbildung + Projektion aus $(1 : 0 : 0 : 0)$ in $x_0 = 0$

