

Zur Eindeutigkeitsfrage der Hauptaufgabe der Photogrammetrie.

Von Walter Wunderlich, Wien, derzeit im Felde.

Mit 4 Figuren im Text.

1. Einleitung.

Unter der „Hauptaufgabe der Photogrammetrie“ versteht man die Wiederherstellung einer Geländeﬂäche, von der zwei photographische Aufnahmen mit bekannter innerer Orientierung (Hauptpunkt, Brennweite) vorliegen. Die Frage, ob dies stets in eindeutiger Weise möglich ist, wurde wohl einigemal angeschnitten¹⁾, jedoch erst von J. Krames erschöpfend beantwortet²⁾. Dieser gelangt dabei zur Erkenntnis, daß die genannte Aufgabe im allgemeinen eindeutig ist, jedoch zwei- oder dreideutig wird, wenn das Gelände ein Ausschnitt einer orthogonalen Fläche 2. Grades ist und die beiden Aufnahmezentren auf zwei „adjungierten“ Erzeugenden der Fläche liegen³⁾. Er bespricht auch alle möglichen Sonderfälle und Ausartungen dieses Ausnahmefalles.

Im vorliegenden Aufsatz soll das Ergebnis von Krames auf eine etwas andere, besonders durchsichtige Weise hergeleitet werden. Man gelangt dabei gleichzeitig zu einer einfachen konstruktiven Behandlung dieses Aufgabenkreises. Zum Schluß werden noch jene Gebiete der genannten Flächen abgegrenzt, innerhalb welcher das Gelände liegen muß, damit die Nebenlösung in der Praxis tatsächlich in Erscheinung treten kann.

¹⁾ R. Finsterwalder, Zeitschr. f. Vermessungswesen 67 (1938), S. 433—441 und „Bildmessung und Luftbildwesen“ 13 (1938), S. 103—109. — E. Gotthardt, Zeitschr. f. Vermessungswesen 68 (1939), S. 297—304. — Die klare Formulierung des Problems stammt von H. Koppmair.

²⁾ Außer einem Vortrag des Genannten in der Wiener Math. Gesellschaft und mündlichen Hinweisen liegt mir derzeit nur der Bericht im Anzeiger der Akad. d. Wissensch. Wien Nr. 6 (1940) vor.

³⁾ Hinsichtlich der Erklärung „adjungierter Erzeugender“ vgl. Abschnitt 4.

2. Grundlegendes.

Geometrisch gesehen, handelt es sich um Folgendes (Fig. 1): Die Gelände­fläche Φ vermittelt zwischen den von den Aufnahme­zentren O_1 und O_2 ausgehenden Sehstrahlbündeln eine Beziehung, wenn solche Strahlen x_1 und x_2 als zugeordnet gelten, die einander in einem Geländepunkt X schneiden. Die beiden Bündel befinden sich also bei der Aufnahme und ebenso natürlich nachher im Auswertegerät in einer Lage, in der entsprechende Strahlen — genauer Halbstrahlen — einander schneiden. Es ist nun die Frage, ob eine solche „orientierte“ Lage auch noch auf eine zweite, wesentlich verschiedene Art herbeigeführt werden kann, wenn die beiden starren Bündel $O_1(x_1)$, $O_2(x_2)$ kongruent verlagert werden. Es ist klar, daß man sich hierbei auf eine Verlagerung von $O_1(x_1)$ nach $O'_1(x'_1)$ beschränken kann, während $O_2(x_2)$ unverändert bleibt. Dieser Gedanke ist es vor

allem, der die angekündigte Vereinfachung der Kramesschen Betrachtungen mit sich bringt.

Die Strahlen x_2 stellen nun nach Fig. 1 einfach die Treffgeraden aus O_2 an einander entsprechende Strahlen x_1 und x'_1 der kongruent aufeinander bezogenen Bündel O_1 und O'_1 dar. Es ist daraus ohne weiters ersichtlich, daß es die in Frage stehenden Ausnahmefälle tatsächlich gibt, und daß man sie alle so erhalten kann.

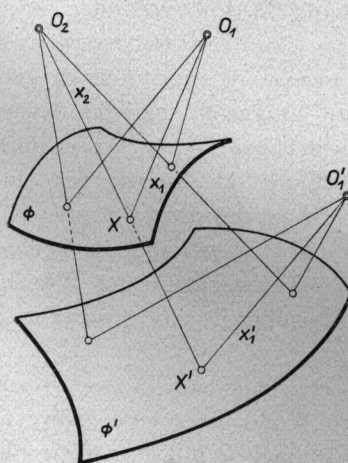


Fig. 1.

der Bündel O_1 und O_2 stellt die Gelände­fläche Φ dar, das Erzeugnis von O'_1 und O_2 die Nebenlösung Φ' .

Aus der Gleichberechtigung der Bündel O_1 und O'_1 folgt unmittelbar jene von Φ und Φ' .

Nicht unwichtig für die praktische Bedeutung ist noch die folgende Einschränkung: Von den Flächen Φ und Φ' kommen nur jene Ausschnitte in Frage, deren Punkte auf entsprechenden Halbstrahlen der Bündel O_1 und O'_1 liegen (vgl. Abschnitt 5) und die nicht durch O_2 getrennt werden.

Sonst würde es ja zu jeder Geländefläche eine gewisse Nebenlösung geben: Man brauchte nur das Bündel O_1 um die „Kernachse“ $[O_1 O_2]$ um 180° zu drehen; entsprechende Strahlen schneiden einander wiederum und die so entstehende Nebenlösung ist dann zur ursprünglichen Fläche harmonisch kollinear. Durch die gemachte Einschränkung wird aber diese „ergänzende Orientierung“ (Krames), die im Auswertegerät niemals hergestellt werden könnte⁴⁾, ausgeschaltet.

Über die Begrenzung der zulässigen Gebiete auf unseren Ausnahmeflächen siehe Abschnitt 8.

3. Art der Ausnahmeflächen.

Es bleibt nun noch die Art der nach Satz I erzeugten Flächen Φ und Φ' zu untersuchen.

Wir fassen einen Strahl x_2 ins Auge (Fig. 2); alle ihn schneidenden Strahlen des Bündels O'_1 erfüllen ein Büschel in der Ebene $\xi' = [O'_1 x_2]$. Die in der kongruenten Beziehung entsprechenden Strahlen des Bündels O_1 bestreichen die entsprechende Ebene ξ , die x_2 in einem Punkt X der Geländefläche Φ trifft. Lassen wir nun x_2 das Strahlbüschel $(O_2 \xi')$ durchlaufen, so bleibt ξ mit ξ' fest und wir erkennen, daß die ganze Gerade $e = [\xi \xi']$ der Fläche Φ angehört, diese mithin eine Regelfläche ist.

Die uns zur Verfügung stehenden Ebenen ξ' bilden das Büschel mit der Achse $a' = [O'_1 O_2]$; dreht sich ξ' um a' , so dreht sich ξ gleich schnell um den entsprechenden Strahl a des Bündels O_1 und e durchläuft eine Regelschar 2. Grades. Die Geländefläche Φ ist mithin als Erzeugnis der kongruent aufeinander bezogenen Ebenenbüschel $a(\xi)$ und $a'(\xi')$ eine orthogonale Fläche 2. Grades⁵⁾.

Je nach der Lage der Achsen können wir acht Fälle unterscheiden:

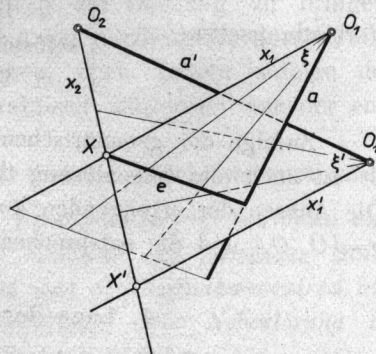


Fig. 2.

⁴⁾ Es sei denn, man legt eine Aufnahme verkehrt ein.

⁵⁾ H. Schröter, Theorie d. Oberflächen 2. Ordg. (Leipzig 1880), §§ 25, 26. — W. Fiedler, Darstellende Geometrie, Bd. II, S. 287—288.

a, a' windschief

Paralleles Ebenenpaar	{ nicht entsprechend:
	1. Orth. einschaliges Hyperboloid
	{ entsprechend:
	2. Orth. hyperbolisches Paraboloid

a, a' schneidend

Verbindungsebene	{ nicht selbstentsprechend:
	3. Orth. Kegel
	{ selbstentsprechend:
	4. Orth. Ebenenpaar

a, a' parallel, Kongruenz gegensinnig

Verbindungsebene	{ nicht selbstentsprechend:
	5. gleichs. hyperbolischer Zylinder
	{ selbstentsprechend:
	6. Orth. Ebenenpaar

a, a' parallel, Kongruenz gleichsinnig

Verbindungsebene	{ nicht selbstentsprechend:
	7. Drehzylinder
	{ selbstentsprechend:
	8. Verbindungsebene + Fernebene

Zufolge der geometrischen Gleichberechtigung der Flächen Φ und Φ' ist auch die Nebenlösung Φ' eine orthogonale Fläche 2. Grades. Die Achsen der erzeugenden kongruenten Ebenenbüschel sind diesmal $b=[O_1 O_2]$ und die entsprechende Gerade b' des Bündels O'_1 .

4. Lage der Aufnahmezentren.

Bekanntlich kann jede orthogonale Fläche 2. Grades auf unendlich viele Arten durch kongruente Ebenenbüschel erzeugt werden. Die Büschelachsen gehören jedesmal einer Erzeugendenschar der Fläche an, sind aber i. a. nicht unabhängig voneinander; Krames nennt zusammengehörige Büschelachsen „adjungiert“.

Adjungierte Erzeugende liegen in den acht in Abschnitt 3 aufgezählten Fällen

1. Symmetrisch zur längeren reellen Hauptachse.
2. Symmetrisch zur Achse.
3. Symmetrisch zu jener Hauptebene, die die reellen Kreisschnittebenen senkrecht schneidet.

4. Symmetrisch zu einer Ebene, in der anderen.
5. Symmetrisch zur Achse.
6. Symmetrisch und parallel zu einer Ebene, in der anderen.
7. Beliebig.
8. Parallel in der eigentlichen Ebene.

Aus Fig. 2 erkennt man, daß die Aufnahmezentren O_1 und O_2 auf adjungierten Erzeugenden (a und a') der Gelände­fläche Φ liegen müssen; wir beweisen gleich, daß diese Bedingung für das Auftreten einer Nebenlösung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist (wenn man von der Begrenzung des Aufnahmegebietes vorläufig noch absieht).

Wir setzen also eine orthogonale Gelände­fläche Φ voraus, welche aus zwei Punkten O_1, O_2 aufgenommen wird, die auf adjungierten Erzeugenden a, a' liegen (Fig. 2); die Geländepunkte X werden dabei durch Sehstrahlen x_1, x_2 projiziert und es ist zu zeigen, daß durch kongruente Verlagerung des Bündels $O_1(x_1)$ wieder Inzidenz aller entsprechenden Strahlenpaare erreicht werden kann. Zu diesem Zwecke ist es aber bloß nötig, das Ebenenbüschel $a(e) = a(\xi)$ mit dem kongruenten Büschel $a'(e) = a'(\xi')$ zur Deckung zu bringen.

Das ist zwar eigentlich auf zwei Arten möglich, die durch 180°-Drehung um a' auseinander hervorgehen, doch kommt zufolge der Schlußbemerkung von Abschnitt 2 praktisch höchstens eine der entstehenden Nebenlösungen in Frage.

Wir fassen die Erkenntnisse der letzten Abschnitte zusammen:

Satz II. *Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie hat dann und nur dann eine Nebenlösung, wenn das Gelände ein passendes Stück einer orthogonalen Fläche 2. Grades ist und die Aufnahmezentren auf einem Paar adjungierter Erzeugenden liegen. Die Nebenlösung ist wieder ein Stück einer orthogonalen Fläche 2. Grades.*

Die hier sowie in den Sätzen IV, VI und VII verwendete Ausdrucksweise „passendes“ Stück wird im Abschnitt 8 näher erklärt.

An dieser Stelle müssen einige bemerkenswerte Besonderheiten erwähnt werden:

a) Denken wir uns in Satz II die adjungierten Erzeugenden zusammengerückt, so wird aus der Zweideutigkeit der photogrammetrischen Hauptaufgabe eine „infinitesimale Unbestimmtheit“, die sich praktisch in einer gewissen Unsicherheit der Lösung äußert. Jene Erzeugenden, in denen zwei adjungierte zusammenfallen, haben bekanntlich die Eigenschaft, auf den Ebenen einer reellen

Kreisschnittschar senkrecht zu stehen; Krames nennt sie „Haupterzeugende“.

Satz III. *Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie weist eine infinitesimale Unbestimmtheit auf, wenn das Gelände die Form einer orthogonalen Fläche 2. Grades hat und die Aufnahmezentren auf einer Haupterzeugenden liegen.*

Der gleichseitig-hyperbolische Zylinder scheidet hier naturgemäß aus.

b) Das orthogonale Hyperboloid und Paraboloid bieten als Träger zweier Erzeugendenscharen die Möglichkeit des Auftretens zweier Nebenlösungen, wenn nämlich jede Schar ein adjungiertes Erzeugendenpaar durch die Aufnahmezentren schickt; letztere liegen dann symmetrisch zur längeren reellen Hauptachse des Hyperboloids bzw. zur Achse des Paraboloids.

Satz IV. *Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie besitzt zwei Nebenlösungen, wenn das Gelände ein passendes Stück eines orthogonalen einschaligen Hyperboloids oder eines orthogonalen hyperbolischen Paraboloids ist und die Aufnahmezentren auf der Fläche symmetrisch zur längeren reellen Achse bzw. zur Achse liegen.*

c) Schließlich ist hier noch die bekannte Tatsache anzuführen, wonach die Hauptaufgabe für ebenes Gelände eine Nebenlösung besitzt. Die Aufnahme einer Ebene Φ aus zwei ihr nicht angehörenden Punkten O_1, O_2 (die nicht durch Φ getrennt werden) läßt sich nämlich stets zum Fall 4 ergänzen: Die Verbindung von O_1 mit dem Spiegelbild von O_2 bezüglich Φ gibt die Achse a ; die adjungierte Achse a' ist hierzu symmetrisch bezüglich Φ . Die Verbindungsebene $[aa']$ ergänzt nun Φ zu einer zerfallenden orthogonalen Fläche 2. Grades.

Diese Verbindungsebene wird unbestimmt, wenn a mit a' zusammenfällt, wenn also die Kernachse $[O_1 O_2] = a$ auf Φ normal steht. Hier führt die Auflösung der Hauptaufgabe wieder auf eine infinitesimale Unbestimmtheit.

5. Gegenseitige Beziehungen zwischen Lösung und Nebenlösung.

Wir nehmen unseren Ausgang wieder von den kongruenten Strahlbündeln $O_1(x_1)$ und $O'_1(x'_1)$ des Satzes I, oder mit Hinblick auf die optische Bedeutung besser von zwei gleichsinnig kongruenten Bündeln von Halbstrahlen. Diese können stets durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden. Der triviale Fall 8 der bloßen Parallelverschiebung sei in Hinkunft ausgeschlossen. Dann ist die

Bewegung eine Schraubung oder Drehung um eine Achse z . Die durch z festgelegte Richtung wollen wir „Haupttrichtung“ nennen, die dazu senkrechte Stellung „Hauptstellung“. Der Schraub- oder Drehwinkel werde mit σ bezeichnet.

Die in der Haupttrichtung liegenden Bündelstrahlen z, z' tragen entsprechende gleichsinnig-parallele Halbstrahlen. Ferner tragen die zu z normalen Bündelebenen ζ, ζ' gleichsinnig kongruente Büschel, deren entsprechende Halbstrahlen den Richtungsunterschied σ aufweisen; die in den Büscheln enthaltenen Minimalstrahlenpaare sind daher ebenfalls entsprechend und parallel.

Entsprechende Bündelstrahlen sind im allgemeinen windschief. ∞^1 Paare treffen einander jedoch und ihre Schnittpunkte erfüllen bekanntlich eine Raumkurve 3. Ordnung k durch O_1 und O'_1 , die auf Grund von Satz I sowohl der Geländefläche Φ als auch der Nebenlösung Φ' angehört. Die Haupttrichtung sowie die absoluten Punkte der Hauptstellung geben ihre Fernpunkte ab; sie ist daher ein gerader kubischer Kreis, bekannt unter dem Namen „Horopterkurve“⁶⁾. — Über die Ausartungen der Horopterkurve gibt Abschnitt 6 Auskunft.

Der Restschnitt der Flächen Φ und Φ' muß eine Erzeugende sein. Wir finden sie nach folgender Überlegung: Φ wird zufolge Abschnitt 3 von entsprechenden kongruenten Ebenenbüscheln mit den Achsen a und $a' = [O'_1 O_2]$ erzeugt, Φ analog durch die Büschelachsen $b = [O_1 O_2]$ und b' . Der Ebene $\gamma = [a b]$ entspricht nun in beiden Fällen die Ebene $\gamma' = [a' b']$. Die Schnittgerade $c = [\gamma \gamma']$ ist daher die gesuchte Erzeugende; sie geht durch O_2 .

Satz V. Die Geländefläche Φ und die Nebenlösung Φ' durchdringen einander i. a. nach einem geraden kubischen Kreis k durch O_1 und O'_1 („Horopterkurve“) und einer Erzeugenden c durch O_2 .

Die Verwandtschaft $X \rightarrow X'$ zwischen entsprechenden Punkten von Φ und Φ' , die nach Fig. 1 durch das Strahlbündel O_2 vermittelt wird, ist, da O_2 auf beiden Flächen liegt, eine eindeutige. Die Eindeutigkeit bleibt bei Berücksichtigung der Bündelkongruenz $O_1 \cong O'_1$ auch auf der gemeinsamen Erzeugenden c gewahrt. Zusammenfallende Punkte kennzeichnen die Horopterkurve.

Was entspricht nun den Erzeugenden der einen Fläche auf der anderen? Wir haben im allgemeinen zwei Scharen zu unterscheiden:

α) Die a und a' schneidenden Erzeugenden e der ersten Schar

⁶⁾ H. v. Helmholtz, Wissensch. Abhandlungen 2, S. 440 (Enz. d. math. Wiss. III C 2, Fußnote 445).

von Φ (Fig. 2) werden aus O_2 durch die Ebenen ξ' des Büschels a' projiziert; sie ergeben daher auf Φ' ein Büschel von Kegelschnitten e' durch O_1 und O_2 .

Analog entstehen die b und b' schneidenden Erzeugenden f' von Φ' aus dem Büschel von Kegelschnitten f durch O_1 und O_2 auf Φ .

β) Die Erzeugenden der a und a' enthaltenden zweiten Schar von Φ treffen nämlich die Erzeugende c aus Satz V und entsprechen daher den Erzeugenden der b und b' enthaltenden zweiten Schar von Φ' .

Besitzt eine Fläche nur eine Schar von Erzeugenden, so entsprechen diesen auf der anderen Fläche wieder Erzeugende.

6. Kennzeichnung besonderer Verhältnisse.

Unsere Anordnung von Geländefläche und Nebenlösung, sowie der Ausgang von den kongruenten Bündeln O_1, O_1' gestatten eine leichte Übersicht über die auftretenden Flächenformen.

A) $\zeta \neq \zeta', z_1 \neq z_1', \sigma \neq 180^\circ$.

a) O_2 in $\zeta(\zeta')$: $\Phi'(\Phi) \dots$ Paraboloid.

Satz VI. Wird ein passendes Stück eines orthogonalen Hyperboloids aus den Schnittpunkten eines adjungierten Erzeugendenpaares mit einer Kreisschnittebene aufgenommen, so liegt die Nebenlösung auf einem orthogonalen Paraboloid.

Die Richtigkeit des Satzes folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß ζ eine Kreisschnittebene ist.

b) O_2 auf $z_1(z_1')$: $\Phi'(\Phi) \dots$ Drehzylinder.

c) O_2 auf $z = [O_1 k]$ ($z' = [O_1' k]$): $\Phi'(\Phi) \dots$ orth. Kegel.

$z(z')$ bedeutet dabei den orthogonalen Kegel 2. Grades, durch welchen die Horopterkurve k aus $O_1(O_1')$ projiziert wird. Er durchdringt Φ längs k und einer Erzeugenden c . O_2 kann nicht auf k liegen, da sonst Φ und Φ' zusammenfallen würden; es liegt daher auf $c=b$ und wir schließen:

Satz VII. Wird ein passendes Stück eines orthogonalen Hyperboloids oder Paraboloids aus den Schnittpunkten eines adjungierten Erzeugendenpaares mit einer Erzeugenden c der anderen Schar aufgenommen, so liegt die Nebenlösung auf einem orthogonalen Kegel. Ist c insbesondere eine Haupterzeugende, so liegt die Nebenlösung auf einem Drehzylinder.

d) Besitzen die Kernachsen $[O'_1 O_2] = a'$ und $[O_1 O'_2] = b$ gegen die Hauptstellung gleiche Neigung, so fallen Φ und Φ' ähnlich aus. O_2 liegt dann auf einer Fläche 3. Ordnung Γ , die von den Ebenen der Hauptstellung nach Kreisen (neben der Ferngeraden) und von der Symmetrieebene $[z_1 z'_1]$ nach einer gleichseitigen Hyperbel und der Geraden $[O_1 O'_1]$ geschnitten wird.

B) $\zeta = \zeta'$, $z_1 \neq z'_1$, $\sigma \neq 180^\circ$.

Die Horopterkurve k zerfällt in einen Kreis in der Ebene $\zeta = \zeta'$ und eine dazu senkrechte Treffgerade.

a) O_2 in $\zeta = \zeta'$: Φ und Φ' ... Ebenen (Fall 4).

Ergänzend zu Abschnitt 4c) können wir nun sagen:

Satz VIII. Für ebenes Gelände besitzt die Hauptaufgabe der Photogrammetrie im allgemeinen eine ebene, kollineare Nebenlösung.

b) Wie unter A).

c) z und z' sind hier zur Hauptstellung normale Ebenen.

d) Γ ist hier die Symmetrieebene von O_1 und O'_1 .

C) $\zeta \neq \zeta'$, $z_1 = z'_1$, $\sigma \neq 180^\circ$.

Die Horopterkurve k zerfällt in die Achse $z_1 = z'_1$ und zwei diese senkrecht treffende Minimalgerade.

a) Wie unter A).

b) O_2 auf $z_1 = z'_1$: Triviale Ausartung.

c) z, z' sind die Minimalebenen durch $z_1 = z'_1$.

d) Γ ist hier die Symmetrieebene von O_1 und O'_1 .

D) $\zeta \neq \zeta'$, $z_1 \neq z'_1$, $\sigma = 180^\circ$.

Die Horopterkurve k zerfällt in die Ferngerade der Hauptstellung und eine gleichseitige Hyperbel in $[z_1 z'_1]$. Φ und Φ' sind i. a. Paraboloiden mit zur Hauptstellung paralleler Achse.

a) O_2 in $\zeta(\zeta')$: $\Phi'(\Phi)$... gls. hyp. Zylinder.

b) O_2 auf $z_1(z'_1)$: $\Phi'(\Phi)$... Fernebene.

c) $z(z')$ zerfällt in die Ebenen $[z_1 z'_1]$ und $\zeta(\zeta')$.

d) Γ wie unter A).

Eine Fortführung der Spezialisierung ist wohl möglich, bietet jedoch kaum Interessantes.

7. Zeichnerische Behandlung.

In Abschnitt 5 wurde festgestellt, daß die Geländefläche Φ und ihre Nebenlösung Φ' den Fernpunkt der Hauptrichtung und die

absoluten Punkte der dazu senkrechten Hauptstellung enthalten. Bei der zeichnerischen Verfolgung unseres Aufgabenkreises wird sich mit hin ein Normalriß auf eine Bildebene der Hauptstellung empfehlen, den wir „Hauptriß“ nennen wollen; von einem besonderen Projektionszeiger wird abgesehen. Die ohne weiteres klaren, grundlegenden Vereinfachungen, die sich dann bei der Projektion von Φ und Φ' ergeben, fassen wir zusammen in

Satz IX. *Die Ebenen der Hauptstellung schneiden die Gelände fläche Φ und die Nebenlösung Φ' i. a. nach Kreisen. Im Hauptriß sind die scheinbaren Umrisse der Flächen zwei Paare von Strahlbüscheln. Die gemeinsame Horopterkurve k bildet sich dabei als Kreis ab.*

Es ist klar, daß alle in Satz IX genannten Kreise gelegentlich in Gerade ausarten. In diesem Abschnitt soll aber grundsätzlich nur der allgemeinste Fall betrachtet werden.

Wir beginnen mit der darstellend-geometrischen Verfolgung von

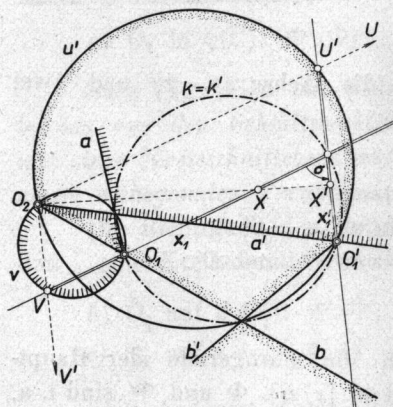


Fig. 3.

Satz I. Die Haupttrisse entsprechender Strahlen x_1, x_1' der kongruenten Bündel O_1, O_1' schließen miteinander stets den in Abschnitt 5 eingeführten Winkel σ ein (Fig. 3). Die Strahlen x_1, x_1' sind bei bloßer Angabe ihrer Haupttrisse selbst noch unbestimmt, ebenso ihre Treffgerade x_2 aus O_2 , deren Hauptriß daher noch beliebig angenommen werden kann. Die Verwandtschaft $X \rightarrow X'$ (S. 157) zwischen entsprechenden Flächenpunkten wird damit im Hauptriß besonders übersichtlich:

Satz X. *Die Verwandtschaft $X \rightarrow X'$ entsprechender Flächenpunkte erscheint im Hauptriß als quadratische Verwandtschaft, bei der entsprechende Punkte auf Strahlen des Büschels O_2 liegen und aus O_1 und O_1' durch Strahlen gleichsinnig kongruenter Büschel projiziert werden (Fig. 3).*

Das Erzeugnis der eben genannten kongruenten Büschel ist ein punktwise selbstentsprechender Kreis $k=k'$, der beim Vervollständigen der Verwandtschaft gute Dienste leistet; er stellt den Hauptriß der Horopterkurve k dar.

Fig. 4 zeigt nun die vollständige Darstellung des allgemeinen

Falles. Aus Gründen der Anschaulichkeit wurden die Flächen Φ und Φ' durch die zur Bildebene parallelen Bündelebenen ζ und ζ' abgeschnitten.⁷⁾ Gegeben waren: $O_1, O'_1, \sigma = 70^\circ$, ferner O_2 , dessen räum-

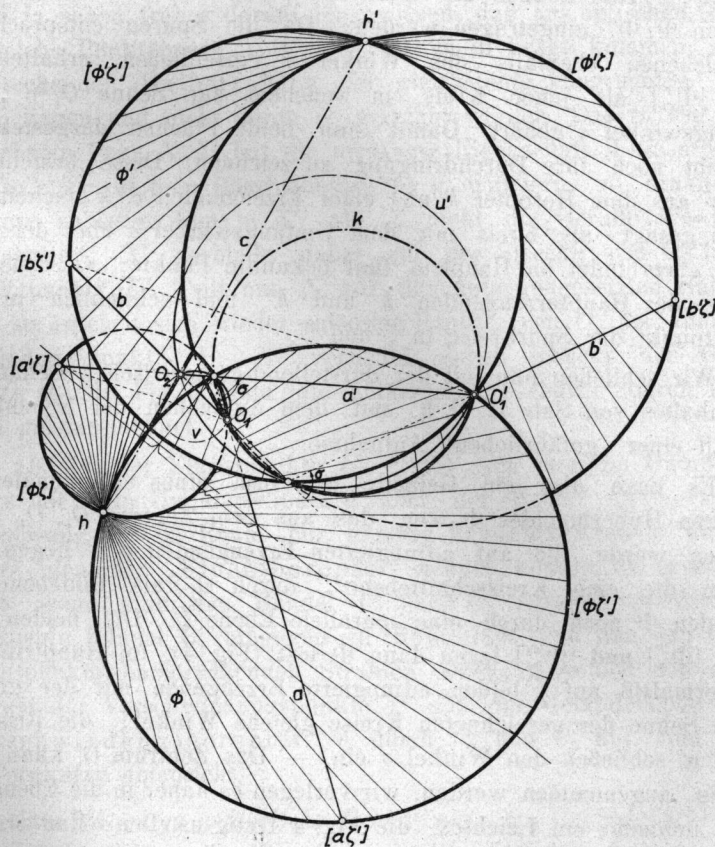


Fig. 4.

liche Lage durch Angabe der Spurpunkte $[a'\zeta]$ und $[b'\zeta']$ der Kernachsen $a' = [O'_1 O_2]$ und $b' = [O_1 O_2]$ festgelegt wurde; als Spuren der Ebene $[a'b]$ müssen natürlich die Verbindungen von O_1 mit $[a'\zeta]$ und O'_1 mit $[b'\zeta']$ parallel verlaufen. — Wir fügen zunächst die entsprechenden Strahlen a und b' hinzu: Sie schließen im Bild mit a'

⁷⁾ Der Fall $\zeta = \zeta'$ (B in Abschnitt 6) erfordert eine leicht abgeänderte Behandlung. Soviel mir bekannt ist, erscheint demnächst in den Monatsheften eine diesem Sonderfalle gewidmete Arbeit von J. Krames mit dem Titel: *Der einfachste Übergang zur Nebenlösung bei vorliegendem „Gefährlichen Ort“*.

bzw. b den Winkel σ ein und da die Abschnitte entsprechender Strahlen zwischen ζ und ζ' gleich lang sind, finden wir ihre Spurpunkte durch die Streckenübertragungen $O_1[a'\zeta] = O'_1[a'\zeta]$, $O'_1[b'\zeta] = O_1[b'\zeta]$. Nun können die Spurkreise $[\Phi\zeta]$, $[\Phi\zeta']$, $[\Phi'\zeta]$, $[\Phi'\zeta']$ der Flächen Φ , Φ' eingetragen werden: Da die Spuren entsprechender Bündelebenen ebenfalls den Winkel σ einschließen, erhalten wir etwa $[\Phi\zeta]$ als jenen Kreis, in welchem zur Sehne $O_1[a'\zeta]$ der Umfangswinkel σ gehört. Damit sind beide Flächen dargestellt und es bleibt noch ihre Durchdringung zu zeichnen. Diese besteht laut Satz V aus dem Horopter k und einer Erzeugenden c . k erscheint, wie vorhin gesagt, als Kreis mit dem Umfangswinkel σ über der Sehne $O_1O'_1$, c verbindet im Hauptriß fünf bekannte Punkte: O_2 , die Bildpunkte der Haupterzeugenden h und h' , und schließlich je einen Schnittpunkt der Spurkreise in ζ und ζ' .

Wir schließen nun mit der darstellend-geometrischen Behandlung des Inhaltes von Satz II, d. h. mit dem Aufsuchen der Nebenlösung im Fall einer „gefährlichen“ Aufnahme.

Es liege also ein Gelände in Form eines orthogonalen einschaligen Hyperboloides Φ vor, das aus zwei Zentren O_1, O_2 aufgenommen wurde, die auf adjungierten Erzeugenden a, a' liegen. Wir wählen die eine Kreisschnittebene ζ durch O_1 als Bildebene und schneiden Φ noch durch eine parallele Ebene ζ' . Die beiden Spurkreise $[\Phi\zeta]$ und $[\Phi\zeta']$ legen dann Φ fest (Fig. 4). Im Hauptriß, d. i. im Normalriß auf ζ bilden adjungierte Erzeugende mit der gemeinsamen Sehne der gezeichneten Kreise gleiche Winkel; die Risse von a und a' schließen den Winkel σ ein. — Das Zentrum O'_1 kann auf a' beliebig angenommen werden, wir verlegen es daher in die Ebene ζ' ⁸⁾. Es ist nunmehr ein Leichtes, die Fig. 4 fertigzustellen: Man ermittelt zunächst $b = [O_1O_2]$ und dessen Spurpunkt $[b\zeta']$ mittels der Parallelen zu $O_1[a'\zeta]$ durch O'_1 ; b' wie oben; die Spurkreise $[\Phi'\zeta]$ und $[\Phi'\zeta']$ besitzen den Umfangswinkel σ über den Sehnen $O_1[b'\zeta]$ bzw. $[b'\zeta']O'_1$ und legen Φ' fest. Auch die Schnitterzeugende c kann mit Vorteil herangezogen werden.

Hätte man zu Beginn Φ auf den anderen Kreisschnitt durch O_1 aufgestellt, so hätte sich eine andere Nebenlösungsfläche ergeben, die offenbar mit der ersten über die am Ende von Abschnitt 2 erwähnte Kollineation zusammenhängt.

⁸⁾ Würden wir O'_1 in die Ebene ζ verlegen, so kämen wir auf den Fall B aus Abschnitt 6 (vgl. Fußnote 7).

8. Gefährliche Gebiete.

Wir sind nun auch in der Lage, auf den Flächen Φ und Φ' die Abgrenzung der gefährlichen Gebiete vorzunehmen. Wir haben ja schon früher darauf hingewiesen, daß aus optischen Gründen nur solche Punktepaare X, X' der Flächen in Frage kommen, die auf entsprechenden Halbstrahlen der gleichsinnig kongruenten Bündel O_1, O'_1 liegen und nicht durch O_2 getrennt werden. Das in Fig. 3 eingezeichnete Paar X, X' hat die verlangte Eigenschaft. Lassen wir nun (in Fig.) X auf dem Büschelhalbstrahl x_1 wandern, so erhalten wir so lange zulässige Punkte X' , als X nicht die Gerade $a' = [O'_1 O_2]$ überschreitet; X' verbleibt dabei auf der Strecke von O'_1 bis zum „Fluchtpunkt“ U' . Tritt nun X auf den entgegengesetzten Halbstrahl über, so ergeben sich wieder zulässige Punkte: von O_1 bis zum „Verschwindungspunkt“ V ; X' verbleibt dabei jenseits der Geraden $b = [O_1 O_2]$. In Fig. 3 sind die zulässigen Abschnitte durch Doppelstrichen gekennzeichnet.

Als Ort der Fluchtpunkte U' ergibt sich nun im Hauptriß der Kreis mit dem Umfangswinkel σ über der Sehne $O_2 O'_1$, auf der Nebenlösung Φ' im Raum ein gerader kubischer Kreis u' durch O_2 und O'_1 , den man „Fluchthoropter“ nennen könnte, da er sich auch ergibt, wenn man das Bündel O_1 nach O_2 parallel verschiebt, das kongruente Bündel O'_1 hingegen in Ruhe läßt und nun den Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen aufsucht. Analog tritt als Gesamtheit der Verschwindungspunkte V auf der Geländefläche Φ ein „Verschwindungshoropter“ v durch O_1 und O_2 auf, dem auf Φ' die Fernkurve entspricht.

Satz XI. *Das gefährliche Gebiet auf der Geländefläche Φ für die Aufnahmezentren O_1, O_2 wird vom Verschwindungshoropter v , von den diesen in O_1 bzw. O_2 treffenden adjungierten Achsen a und a' und vom Fernkegelschnitt u begrenzt. Das entsprechende Gebiet auf der Nebenlösung Φ' wird vom Fluchthoropter u' , den diesen in O_2 bzw. O'_1 treffenden Achsen b und b' und vom Fernkegelschnitt v' berandet.*

Die Horopterkurven v und u' erscheinen im Hauptriß als Kreise mit dem Umfangswinkel σ über den Sehnen $O_1 O_2$ bzw. $O_2 O'_1$.

In Fig. 3 wurden die gefährlichen Gebiete auf der Innenseite geschrafft bzw. punktiert hervorgehoben. Verschieben wir O'_1 auf a' (was ja erlaubt ist), so ändert sich Φ' bloß ähnlich und der gefährliche Bereich auf Φ bleibt derselbe, solange O'_1 das Zentrum O_2 nicht

überschreitet. Sobald jedoch O'_1 auf den anderen Teil von a' übertritt, wird die Nebenlösung Φ' gegensinnig ähnlich zu früheren und gleichzeitig wird auf Φ ein anderes Gebiet zum gefährlichen: Es ist vom gleichen Bogen des Verschwindungshoropters berandet, aber von den Verlängerungen der früheren Grenzen a und a' . — Stellen wir endlich Φ auf die andere Kreisschnittebene durch O_1 auf⁹⁾, so wird das bisher ungefährliche Gebiet zwischen a und a' zum gefährlichen; es wird durch einen neuen Verschwindungshoropter wieder in zwei Bereiche geteilt, von denen jeweils bloß einer in Frage kommt, je nachdem ob O'_1 diesseits oder jenseits von O_2 angenommen wurde. Man hat demnach beim Aufsuchen der Nebenlösung eigentlich vier Versuche anzustellen.

Abschließend sei also festgestellt: Wird ein orthogonales Hyperboloid Φ aus zwei Zentren O_1, O_2 aufgenommen, die auf adjungierten Erzeugenden a, a' liegen, so ist diese Aufnahme nur dann gefährlich, wenn der Aufnahmebereich vollständig innerhalb eines der vier Gebiete fällt, in die Φ durch a, a' und zwei Verschwindungshoropterbögen von O_1 bis O_2 zerlegt wird. Überschreitet der Aufnahmebereich hingegen eines dieser Gebiete, so ist praktisch keine Nebenlösung erzeugbar.

Nun tritt aber noch eine weitere Einschränkung dadurch ein, daß gar nicht jeder beliebige Punkt X des Geländes Φ aufgenommen werden kann: Die Sehstrahlen $[O_1 X]$ und $[O_2 X]$ müssen ja von derselben Seite auf Φ treffen. Geometrisch kann dies durch die Forderung ausgedrückt werden, die Tangentialebene in X dürfe O_1 und O_2 nicht trennen. Als Grenzen dieses „möglichen“ Gebietes ergeben sich die vier Erzeugenden durch O_1 und O_2 (hievon sind a, a' und c bereits bekannt). Sie teilen Φ in acht Bereiche, von denen vier „möglich“ sind. Ist überdies entschieden, welche Seite von Φ als „äußere“ gilt (worüber in der Praxis natürlich kein Zweifel besteht), so kommen nur mehr zwei in Betracht.

Durch Überlappung von „gefährlichen“ und „möglichen“ Bereichen entstehen also erst jene Gebiete von Φ , für welche in der Praxis tatsächlich die (nach allem nicht sehr große) Gefahr einer Nebenlösung besteht. In diesem Sinn ist auch der Zusatz „passendes Stück“ in den Sätzen II, IV, VI und VII zu verstehen.

⁹⁾ Siehe die Schlußbemerkung von Abschnitt 7.