

Die in den Sitzungsberichten Abt. I und Abt. II der math.-nat. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss. erscheinenden Abhandlungen werden auch einzeln abgegeben. Sie können durch jede Buchhandlung oder direkt durch die Auslieferungsstelle der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (Wien I, Singerstraße 12) bezogen werden.

Nachfolgende Abhandlungen aus den Fächern **Mathematik** und **Technik** sind erschienen:

1950 (S II a, Bd. 159):

Hohenberg F.: Zur Geometrie des Funkteßbildes (mit 2 Abbildungen). 14 Seiten. S 12.40

Jarosch W.: Matritzenbänder. 14 Seiten. S 5.20

Schmid H.: Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern und Zugrundelegung eines Orientierungspunktgitters (mit 13 Abbildungen). 31 Seiten. S 28.40

1951 (S II a, Bd. 160):

Hohenberg F.: Komplex Erweiterung der gewöhnlichen Schraubenlinie (mit 1 Abbildung). 14 Seiten. S 7.80

Huber A.: Das Verhalten der Integrale der Gibbs-Duhem-Margules'schen Gleichung für binäre Gemische in der Umgebung ihrer festen singulären Stellen (mit 3 Abbildungen). 16 Seiten. S 10.50

Krames J.: Zur Geometrie der gegenseitigen Einpassung von Luftaufnahmen (mit 4 Abbildungen). 15 Seiten. S 7.--

Parkus H.: Wärmespannungen in Rotationschalen mit drehsymmetrischer Temperaturverteilung (mit 1 Abbildung). 13 Seiten. S 7.50

Ströher W.: Zur projektiven Differentialgeometrie ebener Kurven. 8 Seiten. S 6.--

Wunderlich W.: Zur Differenzgeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung (mit 8 Abbildungen). 38 Seiten. S 16.--

1952 (S II a, Bd. 161):

Federhofer K.: Über die Eigenschwingungen der Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke. 16 Seiten. S 14.80

1953 (S II a, Bd. 162):

Nöbauer W.: Über Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen. S 19.40

Vietoris L.: Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung einer Gleichung $y' = f(x, y)$. S 8.80

Vietoris L.: Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung eines Systems von Gleichungen $y' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$. S 8.80

Wunderlich W.: Über die ebenen Loxodromen (mit 2 Abbildungen). S 6.30

1954 (S II, Bd. 163):

Federhofer K.: Die durch pulsierende Axialkräfte gedrückte Kreiszylinderschale. S 13.40

Rahe W. und Selig F.: Die Verwendung der Motorsymbolik in der theoretischen Mechanik S 17.80

1955 (S II a, Bd. 164):

Federhofer K.: Zur Kinetik des Schleifkurvengetriebes (mit 5 Abbildungen). S 11.--

Ströher W.: Über einen gewissen Typus von Differentialinvarianten der projektiven und der apollonischen Gruppe der Ebene. S 28.40

Wunderlich W.: Doppelloxodromen mit schneidendem Achsenpaar (mit 6 Abbildungen). S 22.50

Zur Geometrie des gedämpften harmonischen Umschwungs

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 5 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1964)

1. Einleitung

Als „Umschwingung“ wird die räumliche Bewegung eines starren Systems bezeichnet, welches eine *Drehung* um eine feste Achse und gleichzeitig eine *Schwingung* längs dieser Achse vollführt. In geometrischer Hinsicht ist eine solche Umschwingungsbewegung ausreichend bestimmt, wenn die Abhängigkeit der Schwingstrecke h vom Drehwinkel φ , also die Funktion $h(\varphi)$ bekannt ist. Soweit es wie im folgenden lediglich auf die geometrische Lagenfolge des bewegten Systems ankommt und nicht auf den zeitlichen Ablauf der Bewegung, mag die unabhängige Veränderliche φ direkt mit der Zeit identifiziert werden: die Drehung wird damit als eine gleichförmige mit der Winkelgeschwindigkeit 1 aufgefaßt.

Wird unter dieser Annahme die Schwingung als reine Sinusschwingung vorausgesetzt, so ergibt sich der grundlegende, durch

$$h(\varphi) = a \sin n\varphi + b \cos n\varphi, \quad n \neq 0 \quad (1.1)$$

gekennzeichnete *harmonische Umschwingung*. Der Sonderfall $n = \pm 1$ ist als spezieller „Mannheim-Darbouscher Umschwingung“ wohlbekannt; er ist dadurch ausgezeichnet, daß die reellen, eigentlichen Punkte des bewegten Systems, soweit sie nicht der Achse angehören, auf Ellipsen (in verschiedenen Ebenen) laufen, während die Ebenen des bewegten Systems, soweit sie nicht parallel oder normal zur Achse sind, im Verlauf des Umschwungs Drehkegel (mit parallelen Achsen) umhüllen [4, 6, 13]. Als „symmetrische Schrotung“ tritt diese Bewegung bei J. Krames [10] auf, der auch die dabei von mitgenommenen Geraden

erzeugten Strahlflächen studiert [11]; deren Bedeutung für gewisse Gegenstände der komplexen Geometrie hob K. Strubecker [15] hervor.

Der *allgemeine harmonische Umschwerung* ($n \neq 0, \pm 1$) wurde von W. Kautny in einer Dissertationsarbeit untersucht [7, 8]. Hierbei erwies es sich als zweckmäßig für die Systematik, unter Ausschuß des Mannheim-Darboux'schen Grenzfalles zwischen „steilgängigen“ Umschwerungen ($|n| > 1$) und „flachgängigen“ Umschwerungen ($|n| < 1$) zu unterscheiden. Jede von einem reellen, eigentlichen und nicht der Achse angehörenden Systempunkt beschriebene *Umschwerungsbahn* verläuft auf einem Drehzylinder und geht bei der Verebnung desselben in eine Sinuslinie über; sie hat ferner die Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Tangenten und Schmiegenebenen ein koaxiales Drehhyperboloid berühren, das für $|n| > 1$ einschalig, für $|n| < 1$ zweischalig ist. Jede von einer zur Achse schrägen Ebene umhüllte *Umschwerungstorse* hat eine Gratlinie, die (bei lotrechter Achsenlage) eine Böschungslinie auf einer Drehquadrik ist, und zwar auf einem einschaligen Drehhyperboloid für $|n| > 1$, auf einem Drehellipsoid für $|n| < 1$. Es ist bekannt, daß sich diese Böschungslinien im Grundriß als gespitzte Radlinien abbilden, und zwar als Hypozykloiden für $|n| > 1$, als Epizykloiden für $|n| < 1$. — Zwischen den Umschwerungsbahnen und den Umschwerungstorsen besteht im übrigen bei jedem Umschwerung eine *korrelative Beziehung*, die am einfachsten durch ein lineares Nullsystem vermittelt wird, das die Umschwerungachse zur Hauptachse hat: Die Zuordnung zwischen einem Raumpunkt und seiner Nullebene bleibt ja bei allen Schraubungen um die Achse, also auch bei allen Umschwerungen um diese Achse erhalten. Im vorliegenden Fall entsprechen einander in einer solchen Korrelation der Trägerzylinder einer Umschwerungskurve und der Fernkreis einer Umschwerungstorse, weiters auch das Tangentenleithyperboloid der Umschwerungskurve und die Trägerquadrik der Gratlinie der Umschwerungstorse.

¹ Diese speziellen und in vieler Hinsicht bemerkenswerten Böschungslinien sind schon oft betrachtet worden, u. a. von A. Enneper [5], W. Blaschke [2], E. Müller [14], J. Krames [12], R. Bereis [1] und vom Verfasser [16], der auch erstmals auf die natürliche und bequemen Aufschluß bietende Erzeugbarkeit durch den harmonischen Umschwerung hingewiesen hat.

Gegenstand der vorliegenden Mitteilung soll nun der „gedämpfte harmonische Umschwerung“ sein, charakterisiert durch das Gesetz

$$h(\varphi) = e^{q\varphi} (a \sin n\varphi + b \cos n\varphi), \quad q \neq 0, \quad n \neq 0. \quad (1.2)$$

Die Ergebnisse verallgemeinern die vom ungedämpften harmonischen Umschwerung her bekannten Tatsachen, die sich einstellen, wenn die Dämpfungskonstante q gleich Null gesetzt wird. Durch bloßes Verlegen des Anfangs der Winkelzählung läßt sich im übrigen stets erreichen, daß $a > 0$, $b = 0$ und $n > 0$ wird, so daß von vornherein einfacher

$$h(\varphi) = a e^{q\varphi} \sin n\varphi, \quad a > 0, \quad n > 0, \quad q \neq 0 \quad (1.3)$$

vorausgesetzt werden darf². Die Unterscheidung der Annahmen $n > 1$ und $n < 1$ soll weiterhin als zweckmäßig beibehalten werden; dem Übergangsfall $n = 1$ wird wieder in mancher Hinsicht eine Sonderstellung zukommen. — Mehr noch als die Umschwerungsbahnen werden die erzeugten *Umschwerungstorsen* ein gewisses Interesse beanspruchen dürfen. Anstelle der im Zusammenhang mit diesen im ungedämpften Fall auftretenden Radlinien tauchen nun die sogenannten „*Spiraloiden*“ auf; diese erst kürzlich vom Verfasser eingeführten ebenen Kurven stellen eine natürliche Verallgemeinerung der zyklischen Linien dar, teilen mit diesen zahlreiche Eigenschaften und gestatten analoge kinematische Erzeugungen [17, 18]. Durch ihr Auftreten im vorliegenden Zusammenhang erfahren sie eine bemerkenswerte räumliche Deutung³.

2. Umschwerungsbahnen

Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten r, ϑ, z , bezogen auf die Umschwerungachse, wird die *Bahnkurve* eines dem Umschwerung $h(\varphi)$ unterworfenen Punktes $P_0(r_0, \vartheta_0, z_0)$ durch

$$r = r_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varphi, \quad z = z_0 + h(\varphi) \quad (2.1)$$

beschrieben. Die Bahnen aller Punkte mit demselben Achsenabstand r_0 sind untereinander *kongruent*. Es genügt daher, etwa die Punkte auf

² Für eine „Dämpfung“ im eigentlichen Sinn müßte $q < 0$ sein; diese Forderung, die sich durch allfällige Umkehrung des Bewegungsablaufs erfüllen ließe, wird nicht erhoben.

³ Eine andere räumliche Deutung entwickelte der Verfasser in [19].

dem Normalstrahl $\vartheta_0 = z_0 = 0$ zu betrachten. Deren Bahnkurven, in kartesischen Koordinaten dargestellt durch

$$x = r_0 \cos \varphi, \quad y = r_0 \sin \varphi, \quad z = a e^{q\varphi} \sin n\varphi, \quad (2.2)$$

können als Prototyp für die übrigen Umschwungbahnen dienen. Sie sind untereinander *affin*, da sie durch axiale Streckungen ineinander übergehen.

Eine Vorstellung vom Aussehen einer (steilgängigen) Umschwungbahn gibt Abb. 1: Es handelt sich stets um eine endlose, jedoch nicht

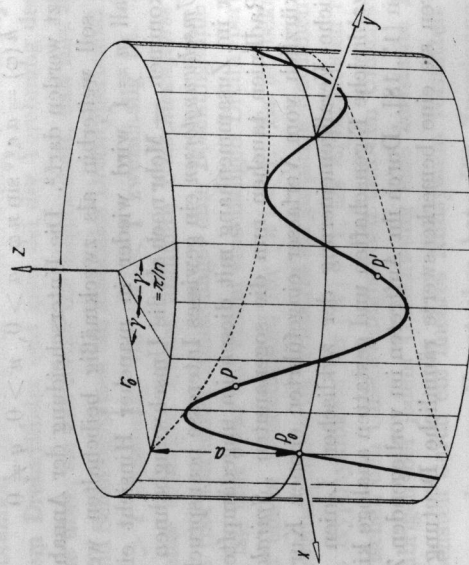


Abb. 1. Umschwungbahn ($n = 6, q = -0,5$).

geschlossene *Wellenlinie*, die auf dem Drehzylinder $r = r_0$ innerhalb des von den Kurven $z = \pm a e^{q\varphi}$ begrenzten Bereiches verläuft. Bei Abwicklung des Zylindernantels geht die Umschwungbahn in das bekannte Schaubild einer gedämpften Sinusschwingung über. Diese Diagrammkurve kann als Normalprojektion der Schnittkurve einer Schraubwendelfläche mit einer koaxialen Drehfläche gedeutet werden, welche durch Rotation einer Exponentialkurve um die Asymptote entsteht; die Bildebene ist dabei parallel zur Schraubachse zu denken. Mit Hilfe dieser Deutung ließe sich unschwer eine brauchbare Tangentenkonstruktion der Umschwungbahn entwickeln.

Wie unmittelbar zu erkennen ist, gestattet die Umschwungbahn (2.2) die *affine Transformation*

$$\mathfrak{A} \begin{cases} x' = x \cos \gamma - y \sin \gamma, \\ y' = x \sin \gamma + y \cos \gamma, \\ z' = -e^{q\gamma} \cdot z \end{cases} \quad \text{mit } \gamma = \frac{\pi}{n}. \quad (2.3)$$

Dieselbe setzt sich aus einer Drehung um die Achse um den Winkel γ und einer perspektiven, orthogonalen Affinität mit der Fixebene $z = 0$ zusammen. Sie führt den zum Argument φ gehörigen Kurvenpunkt P in den zum Argument $\varphi' = \varphi + \gamma$ gehörigen Kurvenpunkt P' über (Abb. 1). Durch wiederholte Anwendung dieser (gegenseitigen) Affinität $\mathfrak{A}$ wird etwa der Wellenberg $0 \leq \varphi \leq \gamma$ in das anschließende Wellental $\gamma \leq \varphi \leq 2\gamma$ transformiert, weiterhin in den nächsten Wellenberg usw.

Die Umschwungbahn erlaubt mit $\mathfrak{A}$ auch die von $\mathfrak{A}$ erzeugte *diskontinuierliche Affinitätsgruppe* $\mathfrak{A}_1^v$ (v ganz). Die von der (gleichsinnigen) Affinität $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1^2$ erzeugte Untergruppe läßt sich zu einer einparametrischen *kontinuierlichen Gruppe* $\mathfrak{A}_2^\tau$ (τ beliebig) erweitern, unter deren Bahnkurven neben der z -Achse und den Kreisen $r = \text{const}$, $z = 0$ insbesondere auch die vorhin erwähnten *Stützlinien* $r = r_0$, $z = \pm a e^{q\varphi}$ der Umschwungbahn gehören (Abb. 1). — Im Grenzfall des ungedämpften Umschwungs ($q = 0$) ist $\mathfrak{A}_2^\tau$ die zur z -Achse gehörige Drehungsgruppe.

Die von den Tangenten einer Umschwungskurve (2.2) gebildete *Tangentenfläche*

$$X = x - tz, \quad Y = y - ty, \quad Z = z - tz \quad (2.4)$$

schneidet die Grundebene $Z = 0$ nach einer Kurve, die sich ergibt, wenn man in (2.4) $t = z/z$ setzt. Diese *Spurkurve*

$$\begin{aligned} X &= r_0 \left(\cos \varphi + \frac{\sin n\varphi \sin \varphi}{q \sin n\varphi + n \cos n\varphi} \right) \\ Y &= r_0 \left(\sin \varphi - \frac{\sin n\varphi \cos \varphi}{q \sin n\varphi + n \cos n\varphi} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ist insofern interessant, als sie für *rationale Frequenz* $n = n'/n''$ ($n', n'' > 0$, ganz und teilerfremd) *algebraisch* ausfällt, während die Umschwung-

bahn selbst stets transzendent ist. Für die *Ordnung* der Spurkurve (2.5) findet man durch Übergang zum rationalen Parameter $u = \exp(i\varphi/n)$:

$$N = \begin{cases} 2(n' + n''), & \text{falls } n'' \text{ ungerade;} \\ n' + n'', & \text{falls } n'' \text{ gerade.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Die Spurkurve hat Spitzen in den Punkten $\varphi = 0 \pmod{\pi/n}$ und gestattet mit der Umschwingbahn die Transformation $\mathfrak{A}(2.3)$, d. h. also die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\gamma = \pi/n$. Sie besteht daher im allgemeinen aus mehreren kongruenten Ästen; im allgemeinen Fall ist deren Anzahl gleich $2n'$, wenn n'' ungerade, andernfalls gleich n' .

Satz 1. *Die von einem gedämpften harmonischen Umschwing erzeugte Bahn eines der Achse nicht angehörenden Punktes gestattet eine diskontinuierliche Affinitätsgruppe. Alle Tangenten der Umschwingbahn treffen im Falle rationaler Frequenz eine rational-algebraische Kurve in einer achsennormalen Ebene.*

3. Umschwingtorsen

Da alle gegen die Achse gleichgeneigten Ebenen unter der Einwirkung einer Umschwingbewegung *kongruente Torsen* einhüllen, genügt es, etwa die ∞^1 Ebenen durch die x -Achse zu betrachten. Eine solche, gegen die horizontale Grundebene $z = 0$ unter dem Winkel β geneigte Ebene

$$\sigma_0 \dots y_0 = bz_0 \text{ mit } b = \cot \beta \neq 0 \quad (3.1)$$

erzeugt vermöge des Umschwungs $h(\varphi)$ die *Ebenenenschar*

$$\sigma \dots x \sin \varphi - y \cos \varphi + bz = bh. \quad (3.2)$$

Die von derselben eingehüllte *Umschwingtorse* Γ geht aus der speziellen, durch $b = 1$ ($\beta = \pi/4$) normierten Umschwingtorse Γ_1 durch die axiale Streckung

$$x = bx_1, y = by_1, z = z_1 \quad (3.3)$$

hervor. Alle durch denselben Umschwing erzeugten Torsen sind miteinander *untereinander affin*.

Die Umschwingtorse Γ ist (bei lotrechtter Achsenlage) eine *Böschungstorse* mit dem Neigungswinkel β gegen die Horizontale. Als

Basiskurve soll ihre Schnittpunkte c_0 mit der Grundebene $z = 0$ bezeichnen werden, also mit jener achsennormalen Ebene, welche die Mittellage des Achsenpunktes der schwingenden Ebene enthält. Diese die Torse kennzeichnende Basiskurve wird von der Spur t der erzeugenden Ebene σ umhüllt, das ist im vorliegenden Fall unter Voraussetzung des Schwinggesetzes (1.3) die Gerade

$$t \dots x \sin \varphi - y \cos \varphi = ab e^{mp\varphi} \sin n\varphi. \quad (3.4)$$

Diese veränderliche Gerade enthält, wie man leicht bestätigt, unter der einschränkenden Voraussetzung $n \neq 1$ den Punkt

$$M \dots X = ab e^{mp\varphi} \cos m\varphi, \quad Y = ab e^{mp\varphi} \sin m\varphi, \quad (3.5)$$

wobei

$$m = 1 - n \neq 0, \quad mp = q \neq 0. \quad (3.6)$$

Dieser Punkt M wandert auf einer *logarithmischen Spirale* l mit der Polargleichung

$$l \dots R = ab e^{p\varphi} \quad (\theta = m\varphi) \quad (3.7)$$

und dem Kurswinkel $\alpha = \operatorname{arccot} p$.

Da φ den Richtungswinkel der Geraden t bedeutet, erfährt dieselbe offenbar die gleiche Lagenänderung, wie wenn sie sich gleichförmig um den ihr angehörenden Punkt M drehen würde, während dieser mit der m -fachen, vom Zentrum O aus gemessenen Winkelgeschwindigkeit auf der logarithmischen „Leitspirale“ l weiterrückt (Abb. 2). Die solcherart erzeugten Hüllkurven hat der Verfasser unlängst näher untersucht und (gespitzte) „*Spiraloiden*“ genannt [17, 18]. Diese stets transzendenten Kurven stellen eine natürliche Verallgemeinerung der Zykloiden dar, die sich als Grenzfall mit $q = 0$ ($p = 0$) einordnen lassen, wobei an die Stelle der Leitspirale ein Leitkreis tritt. Während die Zykloiden aus kongruenten, den Leitkreis berührenden Elementarbögen bestehen, die in Spitzen zusammenstoßen, sind es bei den Spiraloiden untereinander *ähnliche Elementarbögen*, die die Leitspirale berühren, und zwar von außen, wenn $|n| > 1$, bzw. von innen, wenn $|n| < 1$; hinsichtlich des Übergangsfalles $|n| = 1$ vgl. Abschn. 5. In Analogie zu den Hypo- und Epizykloiden kann dementsprechend zwischen „*Hypo-spiraloiden*“ ($|n| > 1$) und „*Epispiraloiden*“ ($|n| < 1$) unterschieden werden.

(3.2) und (1.3) erklärte Schar der Tangentialebenen σ von Γ die Ähnlichkeitstransformation

$$\mathfrak{B} \begin{cases} x' = e^{\rho^2} (x \cos \delta - y \sin \delta), \\ y' = e^{\rho^2} (x \sin \delta + y \cos \delta), \\ z' = -e^{\rho^2} \cdot z \end{cases} \quad \text{mit } \delta = \frac{m\pi}{n} = m\gamma = \gamma - \pi \quad (3.8)$$

gestattet. Die zum Argument φ gehörige Ebene σ wird dabei in die zu $\varphi' = \varphi + \gamma$ gehörige Ebene σ' übergeführt, und zwar vermöge einer

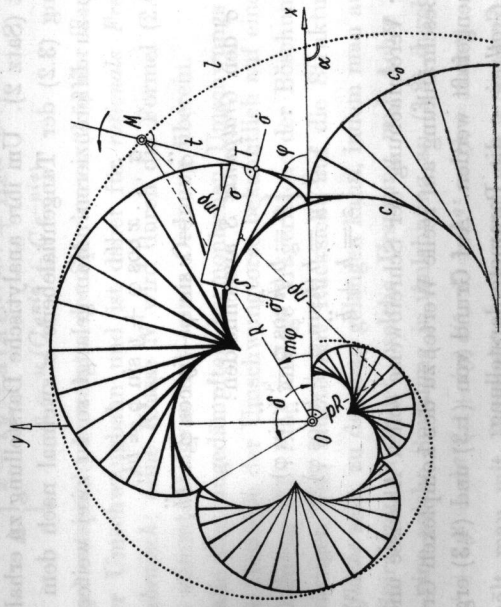


Abb. 2. Grundriß einer Umschwungstorse ($n = 0,6, q = -0,1$).

Drehung um die z-Achse um den Winkel δ , einer zentralen Streckung vom Ursprung aus (Faktor $e^{\rho^2} = e^{\rho^2}$) und einer Spiegelung an der Grundlebene $z = 0$. Durch diese gegensinnige Ähnlichkeit $\mathfrak{B}$ wird der zu einem Parameterintervall von der Länge γ gehörende Mantelsektor der Torse Γ in den anschließenden übergeführt usw.

Mit $\mathfrak{B}$ erlaubt die Umschwungstorse auch die von $\mathfrak{B}$ erzeugte diskontinuierliche Ähnlichkeitsgruppe $\mathfrak{B}^v$ (v ganz). Die von der gleichsinnigen Ähnlichkeit $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}^2$ erzeugte Untergruppe läßt sich in eine einparametrische kontinuierliche Ähnlichkeitsgruppe $\mathfrak{B}_2^i$ (i beliebig) einbetten,

Von den zahlreichen Eigenschaften, die die Spiraloide mit den Zykloiden teilen, sei etwa die *doppelte Erzeugbarkeit* als Einhüllende einer sich auf die geschilderte Art bewegenden Geraden t genannt; zur zweiten Erzeugung gelangt man, wenn man in (3.4) bei a und n gleichzeitig das Vorzeichen umkehrt, was die Gleichung ungeändert läßt, jedoch gemäß (3.6) neue Kennwerte m und p bedingt. Die Bewegung des durch das Linienelement (M, t) bestimmten ebenen Systems kann im übrigen durch das *Abrollen einer logarithmischen Spirale auf einer anderen* erzeugt werden; im Grenzfall $q = 0$ der Zykloiden rollt bekanntlich ein Kreis auf einem anderen. Hervorzuheben ist schließlich die Tatsache, daß so wie die Zykloiden auch die *Spiraloide zu ihren Evoluten und Evolutoiden ähnlich* sind.

Der letztgenannten Eigenschaft kommt bei der vorliegenden Untersuchung eine besondere Bedeutung zu: Da bei einer Böschungstorse die Erzeugenden die Falllinien sind und alle Schichtenlinien rechtwinklig schneiden, so bildet sich die *Gratlinie* der Torse auf die gemeinsame Evolute aller Schichtenliniengrundrisse ab. Nachdem nun unter den Schichtenlinien der hier betrachteten Umschwungstorse Γ eine Spiraloide vorkommt — die vorhin erklärte Basiscurve c_0 —, so wird als *Grundriß der Gratlinie* c von Γ eine zu c_0 ähnliche Spiraloide auftreten.

Satz 2. Die unter der Einwirkung eines gedämpften harmonischen Umschwungs mit der Frequenz $n \neq 1$ von einer zur Achse schrägen Ebene erzeugte Hülltorse ist bei lotrechter Achsenlage eine Böschungstorse, die eine gespitze Spiraloide zur Basiscurve hat und eine dazu ähnliche Spiraloide als Grundriß der Gratlinie besitzt.

Das Grundrißbild einer Umschwungstorse Γ zeigt Abb. 2. Von den Erzeugenden ist jeweils nur das Stück zwischen der Gratlinie c und der Basiscurve c_0 gezeichnet, wobei zunehmende Strichstärke das Wachsen der z-Koordinate betonen soll.

Wie die Figur erkennen läßt, weist die Umschwungstorse eine gewisse Periodizität des Aufbaus auf. Sie ließe sich auch aus der bereits festgestellten Periodizität der Umschwungsbahn auf Grund der bestehenden korrelativen Beziehung zwischen Umschwungsbahnen und -torsen folgern. Man überzeugt sich aber leicht direkt, daß die durch

zu deren Bahnkurven insbesondere auch die logarithmische Leitspirale l (3.7) gehört. Von dieser Ähnlichkeitsgruppe, sinngemäß als „Spiralung“ zu bezeichnen [20], wird noch im folgenden Abschnitt die Rede sein.

4. Gratlinie der Umschwingtorse

Bezeichne Γ weiterhin die Umschwingtorse, die von der Ebene σ_0 (3.1) durch den Umschwing (1.3) erzeugt wird. Die Gratlinie c von Γ ist bei lotrechter Achsenlage eine Böschungslinie mit dem Steigungswinkel β , von der bereits bekannt ist, daß sie sich im Grundriß als Spiraloide abbildet (Satz 2). Um ihre analytische Darstellung zu erhalten, ist die Gleichung (3.2) der Tangentialebene σ zweimal nach dem Scharparameter φ zu differenzieren. Man gelangt so zu zwei weiteren Ebenen

$$\sigma \dots x \cos \varphi + y \sin \varphi = b\ddot{h}, \quad (4.1)$$

$$\sigma \dots -x \sin \varphi + y \cos \varphi = \ddot{b}h, \quad (4.2)$$

die aus σ den Gratpunkt S ausschneiden:

$$S \begin{cases} x = b(\dot{h} \cos \varphi - \ddot{h} \sin \varphi) \\ y = b(\dot{h} \sin \varphi + \ddot{h} \cos \varphi) \\ z = h + \ddot{h}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sollen Abszisse und Ordinate (unter Beschränkung auf reelle Werte) zu der komplexen Größe $x + iy$ zusammengefaßt werden. Auf Grund von (1.3) und (4.3) ergibt sich so für die Gratlinie c die Parameterdarstellung:

$$c \begin{cases} x + iy = b(\dot{h} + i\ddot{h})e^{i\varphi} = e^{q\varphi}(Ae^{(1+n)i\varphi} + Be^{(1-n)i\varphi}), \\ z = h + \ddot{h} = e^{q\varphi}(Ce^{ni\varphi} + \bar{C}e^{-ni\varphi}), \end{cases} \quad (4.4)$$

wobei abkürzend

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ab(q^2 - n^2 + n + 2iqn - iq), \\ B &= \frac{1}{2}ab(n^2 - q^2 + n + 2iqn + iq), \\ C &= \frac{1}{2}ab(2qn + in^2 - iq^2 - i), \quad \bar{C} = \overline{kjC} \end{aligned} \quad (4.5)$$

bedeutet. (p. 101-102) $\bar{C}$ bezeichnet die komplex konjugierte Größe

Maßgebend für den charakteristischen zickzackförmigen Verlauf der Gratlinie c (Abb. 2) sind ihre *Spitzen* (Rückkehrpunkte). Die betreffenden Argumentwerte φ bestimmen sich aus $\dot{z} = \dot{h} + \ddot{h} = 0$ durch

$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{n(n^2 - 3q^2 - 1)}{q(q^2 - 3n^2 + 1)}. \quad (4.6)$$

Die zugehörigen Stellen der Basiskurve c_0 (3.4) sind Scheitel.

Ersetzt man in (4.4) den Faktor $e^{q\varphi}$ durch eine unabhängige Veränderliche u , so erhält man einen gewissen *Trägerkegel* Δ von c :

$$\Delta \begin{cases} x + iy = u(Ae^{(1+n)i\varphi} + Be^{(1-n)i\varphi}), \\ z = u(Ce^{ni\varphi} + \bar{C}e^{-ni\varphi}). \end{cases} \quad (4.7)$$

Dieser Kegel entspricht korrelativ der Spurkurve (2.5) der Tangentienfläche einer Umschwingbahn und ist daher für *rationale Frequenz* n wieder *algebraisch*; seine Klasse N wird durch die Formel (2.6) angegeben und stimmt übrigens mit seiner Ordnung überein.

Im Falle des ungedämpften harmonischen Umschwinges ($q = 0$) verläuft die Gratlinie der Umschwingtorse bekanntlich auf einer Drehfläche 2. Ordnung [7]. Eine analoge Trägerfläche der Böschungslinie c im gegenwärtigen Fall müßte mit Rücksicht auf die Struktur von c eine *Spiralfläche* sein, zu der man gelangen kann, indem man auf c eine passende Spirallung anwendet, welche Ursprung und Achse festläßt. Setzt man eine solche Spirallung in Anlehnung an (3.8) durch

$$x' + iy' = e^{\lambda q\tau}(x + iy)e^{i\tau}, \quad z' = e^{\lambda q\tau} \cdot z \quad (\lambda = \text{const}) \quad (4.8)$$

an, so erhält man mit Benützung von (4.4) eine c tragende Spirallfläche Φ , auf welcher τ und φ als Flächenkoordinaten dienen können:

$$\Phi \begin{cases} x' + iy' = e^{q(\lambda\tau + \varphi)}(Ae^{ni\varphi} + Be^{-ni\varphi})e^{i(\varphi + \tau)}, \\ z' = e^{q(\lambda\tau + \varphi)}(Ce^{ni\varphi} + \bar{C}e^{-ni\varphi}). \end{cases} \quad (4.9)$$

Als einfachste *Erzeugende* der Fläche Φ bietet sich die Flächenkurve

$$f \dots \lambda\tau + \varphi = 0 \quad (4.1)$$

an. Ihre Parameterdarstellung lautet, wenn man zur Abkürzung

$$n\varphi = \psi, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda n} = \mu \quad (4.11)$$

setzt, unter Weglassung der Akzente:

$$f_{\mu} \begin{cases} x + iy = A e^{(\mu+1)\psi} + B e^{(\mu-1)\psi} \\ z = C e^{i\psi} + \bar{C} e^{-i\psi} \end{cases} \quad (4.12)$$

Diese Erzeugende f_{μ} liefert unter Einwirkung der Spiralisierung (4.8) mit dem Spiralsparameter

$$\lambda q = \frac{q}{1 - \mu n} \quad (4.13)$$

eine die Böschungslinie c tragende *Spiralfläche* Φ_{μ} .

Für *rationale Indexwerte* $\mu = \mu'/\mu''$ (μ', μ'' ganz und teilerfremd) erhält man Spiralflächen Φ_{μ} mit einer *algebraischen Erzeugenden* $f_{\mu'}$. Deren Ordnung ergibt sich auf Grund der Darstellung (4.12) mit

$$M = 2 (|\mu'| + |\mu''|). \quad (4.14)$$

Besonders hervorzuheben ist die zu $\mu = 0$ ($\lambda = 1$) gehörige Spiralfläche Φ_0 , die von einer im Ursprung zentrierten *Ellipse* f_0 erzeugt wird (Abb. 3). — Spaltet man in der ersten Gleichung (4.12) den Faktor $e^{\mu\psi}$ ab, so erkennt man die folgende *kinematische Entstehung der allgemeinen Erzeugenden* f_{μ} : Dieselbe wird von einem beweglichen Punkt beschrieben, der die Ellipse f_0 mit konstanter, vom Mittelpunkt aus gemessener Flächengeschwindigkeit durchläuft, während sich diese Ellipse gleichförmig um die z -Achse dreht. Alle Kurven f_{μ} verlaufen daher auf derselben, von der rotierenden Ellipse f_0 überstrichenen Drehfläche 4. Ordnung. Wie aus der ersten Gleichung (4.12) zu ersehen ist, bildet sich f_{μ} im Grundriß als Radlinie ab, und zwar als Epitrochoide für $|\mu| > 1$, als Hypotrochoide für $|\mu| < 1$.

Der Struktur der Böschungslinie c am besten angepaßt ist die zu $\mu = 1$ ($\lambda = 1/n$) gehörige *Trägerspiralfläche* Φ_1 , deren Spiralsparameter $\lambda q = \hat{p}$ mit jenem der zu Ende von Abschn. 3 erwähnten Ähnlichkeitsgruppe $\mathfrak{B}_2^*$ übereinstimmt. Ihre Erzeugende f_1 hat die Ordnung $M = 4$ und als Grundriß den Kreis $x + iy = B + A e^{2i\psi}$; es handelt sich um eine sogenannte *Hippopede*, eine zum Vivianischen Fenster affine rationale Quartik, die als Schnitt einer Kugel mit einem berührenden Drehzylinder erklärt werden kann. Die Spiralfläche Φ_1 besteht aus zwei Mänteln, die einander längs einer logarithmischen Spirale in der Grundebene $z = 0$ durchsetzen (Bahnspirale des Doppelpunkts von f_1) und in Form von Rückkehrkanten längs zweier zylindro-

konischen Bahnspiralen zusammenhängen, auf welchen die durch (4.6) festgelegten Spitzen von c in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge aufgereiht sind.

Zu bemerken wäre noch, daß die sich mit $\lambda = \infty$ einstellende Grenzform $\Phi_{1/n}$ auf den Trägerkegel Δ (4.7) führt.

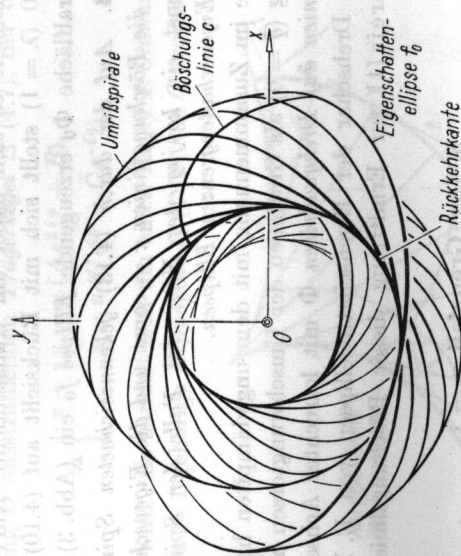


Abb. 3. Trägerspiralfläche Φ_0 ($n = 0,6$, $q = -0,1$).

Satz 3. Die Gratlinie der in Satz 2 genannten Umschweiforse ist eine Böschungslinie, die eine diskontinuierliche Gruppe von Ähnlichkeiten gestattet, einer abzählbar-unendlichen Menge von Spiralflächen mit rational-algebraischen Erzeugenden angehört und im Falle rationaler Frequenz n auf einem rational-algebraischen Kegel liegt.

Auf jeder der Spiralflächen Φ_{μ} bilden die zu c ähnlichen φ -Linien $\tau = \text{const}$ eine Ähnlichkeitsschar von Böschungslinien gleichen Anstiegs ($b = \cot \beta$). Ihre ∞^2 Tangenten lassen sich daher zu ∞^1 Zylindern zusammenfassen, welche die Fläche Φ_{μ} längs der zu den Böschungslinien konjugierten Kurven berühren. Um diese als *Eigenschaftengrenzen* für Parallelbeleuchtung anzusehenden Berührungslinien zu ermitteln, bestimmt man zunächst durch partielle Ableitung des Ortsvektors (4.8) nach φ die Komponenten $x'_{\varphi}, y'_{\varphi}, z'_{\varphi}$ des Böschungstangentenvektors. Man findet mit Benützung von (4.4):

$$(x'_{\varphi} + iy'_{\varphi}) : z'_{\varphi} = (x_{\varphi} + iy_{\varphi}) e^{i\tau} : z_{\varphi} = i b e^{i(\varphi + \tau)} : 1. \quad (4.15)$$

Der Tangentenvektor hat eine feste Richtung, wenn

$$\varphi + \tau = \text{const.} \quad (4.16)$$

Diese Bedingung stellt mithin bereits die Gleichung der gesuchten Eigenschattengrenzen in den Flächenkoordinaten φ, τ dar. Im allgemeinen handelt es sich dabei um transzendente Kurven; nur im Falle $\mu = 0$ ($\lambda = 1$) stellt sich mit Rücksicht auf (4.10) und (4.11) die die Spiralfäche Φ_0 erzeugende Ellipse f_0 ein (Abb. 3).

Satz 4. Auf der durch (4.13) gekennzeichneten Spiralfäche Φ_μ (4.9) bilden die Böschungslinien $\tau = \text{const}$ und die Eigenschattengrenzen $\varphi + \tau = \text{const}$ ein konjugiertes Netz. Im Falle der Spiralfäche Φ_0 sind diese Eigenschattengrenzen Ellipsen.

Für die im Zusammenhang mit dem ungedämpften harmonischen Umschwung ($q = 0$) als Gratinen der Umschwungstorsen auftretenden Böschungslinien auf Drehquadranten Φ mit lotrechter Achse wurde die konjugierte Drehschar der Eigenschattencellipsen von E. Müller [19] und R. Bereis [1] zur Ermittlung dieser Böschungslinien herangezogen.

5. Der Grenzfall $n = 1$

Der den Übergang zwischen dem steilgängigen ($n > 1$) und dem flachgängigen ($n < 1$) Umschwung vermittelnde Grenzfall $n = 1$ — dem ungedämpften Mannheim-Darbouxsehen Umschwung entsprechend — bringt gewisse Modifikationen mit sich.

So tritt bei der zugehörigen Umschwungstorse Γ (3.2) als Basis-kurve c_0 jene Grenzform der Spiraloide auf, die E. Köstlin [9] als „Logarithmoide“ bezeichnet hat. Sie entsteht als Hüllbahn einer Geraden t , die sich zufolge (3.4) gleichförmig um den ihr angehörenden Punkt

$$M \dots X = ab \cdot e^{e\varphi}, \quad Y = 0 \quad (5.1)$$

dreht, während dieser nach einem Exponentialgesetz auf der x -Achse weiterrückt. Diese Leitgerade tritt also an die Stelle der logarithmischen Leitspirale l (3.7). Die Logarithmoide, eine Verallgemeinerung der gemeinsamen Zykloide, besteht aus unendlich vielen, untereinander zentrisch-ähnlichen Elementarbögen (Abb. 4). Sie gestattet die zentrische Ähnlichkeit

$$\mathfrak{B}' \dots x' = x \cdot e^{q\varphi}, \quad y' = y \cdot e^{q\varphi}. \quad (5.2)$$

Auch der Grundriß der Gratinie c von Γ ist eine solche Logarithmoide. Sie ist die Evolute von c_0 und zu c_0 ähnlich.

Die Gratinie c selbst ist natürlich wieder eine Böschungslinie und wird durch (4.4) und (4.5) mit $n = 1$ dargestellt. Sie verläuft auf dem vom Ursprung O ausstrahlenden Trägerkegel Δ (4.7), der durch

$$\Delta \begin{cases} x + iy = u(Ae^{2i\varphi} + B), \\ z = u(Ce^{i\varphi} + \bar{C}e^{-i\varphi}) \end{cases} \quad (5.3)$$

beschrieben wird. Es handelt sich um einen Kegel 4. Ordnung, welcher die etwa zu $u = 1$ gehörige Hippopede f_1 (4.12) aus O projiziert. Dieser

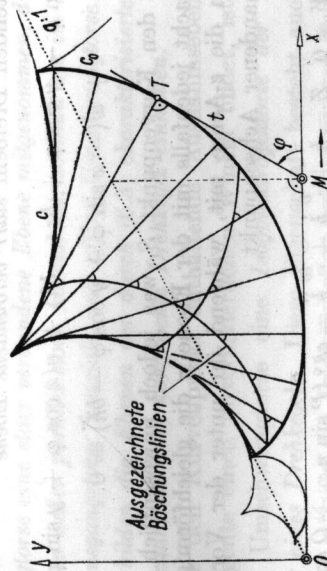


Abb. 4. Umschwungstorse im Grenzfall $n = 1$ ($q = 0,5$).

Kegel besitzt eine Doppelerzeugende, herrührend vom Doppelpunkt der Hippopede, sowie zwei dieselbe berührende Rückkehrkanten, auf welchen die Spitzen von c liegen.

6. Analoga zu Sätzen von Blaschke und Krames

Für die Böschungslinien auf Drehflächen 2. Ordnung mit lotrechter Achse hat W. Blaschke [2] gezeigt, daß jede mit dem begleitenden Dreiein einer solchen Kurve c starr verbundene Ebene ε , die zur Flächenachse weder parallel noch normal ist, eine gleichartige, zu c affine Kurve erzeugt, nämlich als Gratinie der von ε eingehüllten Torse. Einen einfachen, auf der Geometrie des harmonischen Umschwungs beruhenden Beweis hat W. Kautny [7] gegeben.

Die Erweiterung dieser Aussage auf die Gratlinien der Hülltorse des gedämpften harmonischen Umschwungs ist unschwer zu vollziehen.

Sei c die Gratlinie der von der Ebene σ (3.2) eingehüllten Umschwungstorse Γ . Die durch Ableitung nach dem Zeitparameter φ gewonnenen Ebenen $\dot{\sigma}$ (4.1) und $\ddot{\sigma}$ (4.2) bestimmen zusammen mit σ vollständig das begleitende Dreibein von c : die Tangente (Erzeugende der Torse) ist die Schnittgerade von σ und $\dot{\sigma}$, die Hauptnormale ist die Schnittgerade von σ und $\ddot{\sigma}$, die Binormale ist die Normale von σ im Schnittpunkt S von σ , $\dot{\sigma}$ und $\ddot{\sigma}$.

Bildet man nun mit Hilfe konstanter Koeffizienten u , v , w die Linearkombination der drei Ebenengleichungen, so erhält man eine mit dem begleitenden Dreibein starr verbundene Ebene

$$\varepsilon \dots u(x \sin \varphi - y \cos \varphi + bz - bh) + v(x \cos \varphi + y \sin \varphi - bh) + w(-x \sin \varphi + y \cos \varphi - bh) = 0. \quad (6.1)$$

Sie enthält den Kurvenpunkt S , was jedoch unwesentlich ist. Diese Ebene ε macht jedenfalls mit der Ebene σ die gleichförmige Drehbewegung um die z -Achse mit, während ihr unter der Voraussetzung $u \neq 0$ vorhandener Achsenpunkt

$$X = Y = 0, \quad Z = h + \frac{v}{u} \dot{h} + \frac{w}{u} \ddot{h} = e^{i\varphi} (P \sin n\varphi + Q \cos n\varphi) \quad (6.2)$$

mit $P = \frac{a}{u} [u + vq + w(q^2 - n^2)], \quad Q = \frac{an}{u} (v + 2wq)$

eine gedämpfte harmonische Schwingung des Typs (1.2) ausführt, und zwar mit der gleichen Frequenz n und um dieselbe Mittellage O . Die Lagenfolge der Ebene ε ist demnach die gleiche, die sie unter Einwirkung eines gedämpften harmonischen Umschwungs einnehmen würde. Ihr Hüllgebilde ist mithin eine Umschwungstorse bzw. deren Gratlinie.

Es ist höchstens die Ausnahme denkbar, daß die Amplitude der Schwingung verschwindet. Dieser durch $P = Q = 0$ gekennzeichnete Sonderfall tritt tatsächlich ein, wenn

$$u:v:w = (q^2 + n^2): -2q:1. \quad (6.3)$$

Für diese eindeutig bestimmte Ebene bleibt der Achsenpunkt in O fest,

so daß sie einen vom Ursprung ausstrahlenden Drehkegel einhüllt, der die z -Achse zur Rotationsachse hat. Der Drehkegel hat die Gleichung

$$[(q^2 + n^2 - 1)^2 + 4q^2](x^2 + y^2) = (q^2 + n^2)b^2z^2. \quad (6.4)$$

Wie man sich leicht klar macht, ist die Ausnahmesebene gerade jene, in welcher die durch den Kurvenpunkt gehende Eigenschattenellipse f_0 der Spiralfäche Φ_0 liegt.

Beachtet man schließlich, daß parallele Ebenen während des Umschwungs ihren Abstand bewahren, also kongruente Torsen einhüllen, so erscheint der Satz von Blaschke in vollem Umfang auf den gedämpften harmonischen Umschwung ausgedehnt:

Satz 5. Wird mit dem begleitenden Dreibein der Gratlinie einer Umschwungstorse eine starr verbundene Ebene mitgenommen, die zur Umschwungachse weder parallel noch normal ist, so hüllt sie im allgemeinen eine zur Ausgangstorse koaxiale und affine Umschwungstorse ein. Eine Ausnahme bilden die Ebenen der durch (6.3) charakterisierten Stellung, welche koaxiale, zu (6.4) kongruente Drehkegel einhüllen.

Da die den Kurvenpunkt enthaltende Ausnahmesebene mit der Kurventangente einen unveränderlichen Winkel bildet, ist die Gratlinie einer Umschwungstorse eine Isogonaltrajektorie der Tangentialebenschar eines Drehkegels. Diese Eigenschaft besteht auch noch bei den Böschungslinien der Drehquadranten mit lotrechter Achse ($q = 0$), scheint aber bisher nicht bemerkt worden zu sein.

Für die Annahme $u:v:w = \sin 2\beta:0:1$ wird ε zur Normalebene der Gratlinie c . Hieraus folgt:

Satz 6. Die Planevolute der Gratlinie einer Umschwungstorse ist eine zu ihr im allgemeinen affine, koaxiale und konzentrische Kurve.

Im besonderen kann die Planevolute auch ähnlich oder kongruent zur Ausgangskurve ausfallen, vorausgesetzt nämlich, daß der Anstiegswinkel den Wert $\beta = \pi/4$ hat ($b = 1$). Unter diesen Umständen lassen sich sogar Kurven finden, die mit ihrer Planevolute identisch sind; bei der Behandlung des Problems, solche „Autoevoluten“ unter den Böschungslinien ausfindig zu machen, treten die Gratlinien der Umschwungstorsen als Elementarlösungen auf [21].

Annahmen mit $w = 0$ liefern Ebenen ε durch die Tangentenante des begleitenden Dreibeins. Solche gegen die Grundebene $z = 0$ kon-

stant geneigte Ebenen hüllen (für $u \neq 0$) konzentrische Umschwungstorsen ein, welche die *Böschungstorsen* durch die *Ausgangskurve* c darstellen. Ihre Spurkurven in der Grundebene sind zum Grundriß von c ähnliche *Spiraloide*, welche gleichzeitig Evolutoiden der Spurkurve c_0 von Γ sind. Paare solcher Böschungstorsen mit entgegengesetzt gleichen Werten von $u:v$ liefern mit ihren Spurkurven *zyklographische Bilder* der *Böschungslinie* c . Beim ungedämpften Umschwung ($q = 0$) gelangt man so zu dem von J. Krames [12] ausführlich dargelegten Ergebnis, daß sich die auf Drehepipsoiden und einschaligen Drehhyperboloiden verlaufenden Böschungslinien bei zyklographischer Abbildung auf die Äquatorebene auf Paare kongruenter Epi- bzw. Hypo- oder Parazykloiden abbilden⁴. Nunmehr liegt das Analogon für den gedämpften Umschwung vor:

Satz 7. *Das in der Grundebene entworfene zyklographische Bild der Gratlinie einer Umschwungstorse besteht aus zwei ähnlichen gespitzen Spiraloiden (Logarithmoide) im Grenzfall $n = 1$.*

Die auf einer Böschungstorse gezogenen *Böschungslinien* sind im Hinblick auf den Umstand, daß die Erzeugenden Falllinien gleicher Steigung sind, *Isogonaltrajektorien* der Erzeugendenschar; sie erscheinen daher im Grundriß als *Evolutoiden* des Gratlinienbildes. Dieses ist bei einer Umschwungstorse im allgemeinen eine gespitze *Spiraloide*, und so wie die ∞^1 Evolutoiden einer gespitzen Spiraloide durchwegs zu ihr ähnliche Kurven sind (s. o.), ist umgekehrt jede gespitze Spiraloide eine Evolutoide von ∞^1 zu ihr ähnlichen Kurven. Unter den ∞^2 Evolutoiden einer gespitzen Spiraloide kommen also ∞^1 zu ihr ähnliche Kurven vor, die ihre „*Hauptevolventoiden*“ heißen mögen⁵. Daraus folgt — wieder in Verallgemeinerung eines zum ungedämpften harmonischen Umschwung gehörigen Satzes von J. Krames [12] — die (auch den Grenzfall $n = 1$ umfassende) Aussage:

Satz 8. *Unter den ∞^2 Böschungslinien einer Umschwungstorse mit lotrechter Achse gibt es ∞^1 ausgezeichnete, die zur Gratlinie der Torse affin sind.*

⁴ Ausgehend von dieser Tatsache leitet J. Krames a. a. O. einen einfachen Beweis für den erwähnten Satz von Blaschke ab.

⁵ Die übrigen Evolutoiden sind kompliziertere Kurven.

In Abb. 4 wurden zwei dieser ausgezeichneten Böschungslinien der dort dargestellten Umschwungstorse eingetragen. Mit Rücksicht auf den Frequenzwert $n = 1$ erscheinen sie im Grundriß als Logarithmoiden.

7. Verebnung der Umschwungstorse

Sei Γ wieder die von der Ebene σ (3.2) eingehüllte *Umschwungstorse*, c_0 ihre Basiskurve und c die Gratlinie. Bezeichne ferner S den Gratpunkt und T den Basispunkt der zum Parameterwert φ gehörigen Erzeugenden von Γ . Da der Grundriß von c die Evolute von c_0 ist, der Grundriß von S also in den zu T gehörigen Krümmungsmittelpunkt von c_0 fällt, kann man aus der in (4.3) vermerkten Höhenkote $z = h + \tilde{h}$ von S über die Erzeugendenneigung $\beta = \operatorname{arccot} b$ auf den *Krümmungsradius* ρ der Basiskurve c_0 schließen:

$$\begin{aligned} \rho &= b(h + \tilde{h}) = e^{q\varphi}(P \sin n\varphi + Q \cos n\varphi) \\ \text{mit } P &= (1 + q^2 - n^2)ab, \quad Q = 2qna b. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Diese Beziehung zwischen dem Krümmungsradius ρ und dem Richtungswinkel φ stellt einen vollwertigen Ersatz für die sogenannte *natürliche Gleichung* $\rho = \rho(s)$ der Kurve c_0 im Sinne von E. Cesàro [3] dar, weil sie das Bogenelement

$$ds = \rho \cdot d\varphi \quad (7.2)$$

mitbestimmt⁶.

Jede Gleichung von der Bauart (7.1) — mit beliebigem P und Q — charakterisiert für $n \neq 1$ eine gespitze *Spiraloide*, für $n = 1$ eine *Logarithmoide*. Die Differentialgleichung 2. Ordnung für h liefert nämlich eine Schwingfunktion vom Typus

$$h = e^{q\varphi}(A \sin n\varphi + B \cos n\varphi) + C \sin \varphi + D \cos \varphi, \quad (7.3)$$

wobei die letzten beiden Glieder durch eine bloße Verschiebung des Koordinatensystems zum Verschwinden gebracht werden können. Es liegt also auf jeden Fall ein gedämpfter harmonischer Umschwung mit

⁶ Die *Bogenlänge* s der gespitzen Spiraloide c_0 ließe sich über die explizit ausführbare Integration von (7.2) leicht ermitteln; es ergibt sich wieder ein Ausdruck vom Typus (7.1). Das kartesische Diagramm der Abhängigkeit $\rho = \rho(s)$ — die sogenannte *Mannheim-Kurve* zu c_0 — ist demnach eine *affine logarithmische Spirale*, welche die s -Achse rechtwinkelig schneidet.

der Frequenz n und der Dämpfung q vor, und die zugehörige, durch (7.1) festgelegte Basiskurve der Umschwingtorse ist zufolge Satz 2 bzw. Abschn. 5 eine gespitze Spiraloide bzw. Logarithmoide.

Bei der Verebnung der Umschwingtorse Γ geht deren Basiskurve c_0 in eine Kurve $\bar{c}_0$ über, deren Bogenlänge $\bar{s}$ mit der Bogenlänge s von c_0 übereinstimmt, während der Krümmungsradius $\bar{\rho} = ST$ den Wert

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\cos \beta} \quad (7.4)$$

hat. Man kann also wegen (7.2) den Richtungswinkel $\bar{\varphi}$ der Tangente von $\bar{c}_0$ mit

$$\bar{\varphi} = \varphi \cdot \cos \beta \quad (7.5)$$

ansetzen und hat dann als „natürliche Gleichung“ von $\bar{c}_0$:

$$\bar{\rho} = e^{\bar{\varphi}} (\bar{P} \sin \bar{n} \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{n} \bar{\varphi}) \quad (7.6)$$

$$\text{mit } \bar{q} = \frac{q}{\cos \beta}, \bar{n} = \frac{n}{\cos \beta}, \bar{P} = \frac{P}{\cos \beta}, \bar{Q} = \frac{Q}{\cos \beta}.$$

$\bar{c}_0$ ist mithin wiederum eine *Spiraloide*, wenn $\bar{n} \neq 1$, und eine *Logarithmoide*, wenn $\bar{n} = 1$.

Die *Gratlinie* c von Γ geht bei der Verebnung in eine Kurve $\bar{c}$ über, welche als Evolute von $\bar{c}_0$ erscheint, demnach zu $\bar{c}_0$ ähnlich ist.

In Verallgemeinerung einer Bemerkung von E. Cesàro [3] über sphärische Böschungslinien und der entsprechenden Erweiterung auf die Böschungslinien von Drehquadricken mit lotrechter Achse durch W. Blaschke [2], wonach bei der Verebnung der Tangentenfläche einer solchen Kurve diese in eine *Zykloide* übergeht, gilt mithin der (diese Resultate als Grenzfall mit $q = 0$ umfassende)

Satz 9. Bei der Verebnung einer Umschwingtorse mit der Frequenz n und der Neigung β gehen die Gratlinie und die Basiskurve in gespitze Spiraloide über, falls $n \neq \cos \beta$, sonst in Logarithmoide.

Wie Abb. 5 illustriert, ist es durchaus möglich, daß im Falle eines flächgängigen Umschwungs ($n < 1$) die als Basiskurve auftretende Epispiraloide c_0 bei der Verebnung der Umschwingtorse in eine Hypo-spiraloide $\bar{c}_0$ ($\bar{n} > 1$) übergeht.

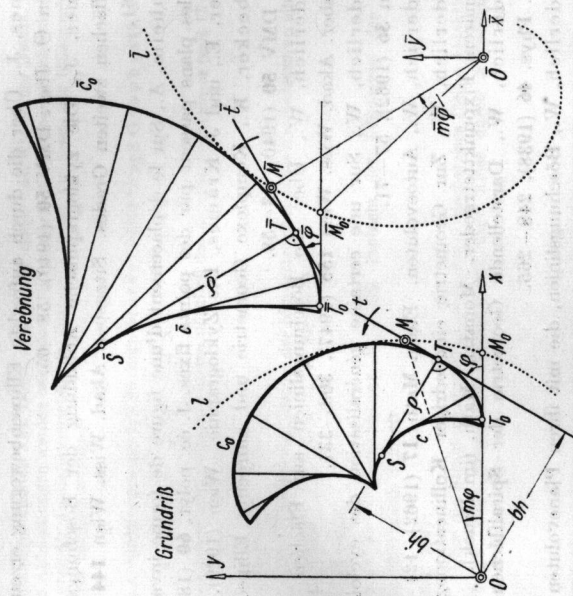


Abb. 5. Verebnung einer Umschwingtorse ($n = 0,7$, $q = 0,1$, $\beta = 60^\circ$).

Literaturverzeichnis

- [1] Bereis, R., Über die Böschungslinien auf Drehquadricken. Monatsh. Math. 56 (1952), 344–351.
- [2] Blaschke, W., Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), 188–204.
- [3] Cesàro, E., Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig (1901), 183.
- [4] Darboux, G., Sur le déplacement d'une figure invariable. Comptes rendus Acad. Paris 92 (1881), 118–121.
- [5] Enneper, A., Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Math. Ann. 19 (1882), 72–83.
- [6] Grünwald, A., Darstellung der Mannheim-Darbousehen Umschwungsbewegung eines starren Körpers. Z. Math. Phys. 54 (1907), 154–220.
- [7] Kautny, W., Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. 60 (1956), 66–82.
- [8] Kautny, W., Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. 63 (1959), 169–188.
- [9] Kötlin, E., Über eine transzendente Kurve, von der die gemeine Zykloide ein Grenzfall ist. Math.-natw. Mitt. Württemberg 9 (1907), 21–30.
- [10] Krames, J., Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes. Monatsh. Math. Phys. 46 (1937), 38–50.

- [11] Krames, J., Über die durch aufrechte Ellipsenbewegung erzeugten Regelflächen *Ö. Jber. DMV* **50** (1940), 58–65.
- [12] Krames, J., Die zyklographische Abbildung der Böschungskurven auf Drehflächen zweiten Grades. *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien* **144** (1935), 654 bis 661.
- [13] Mannheim, A., Sur le déplacement d'une figure de forme invariable, dont tous les plans passent par des points fixes. *J. éc. polyt.* **60** (1890), 75–88.
- [14] Müller, E., und J. Krames, Die Zyklographie. *Wien* (1929), 369 ff.
- [15] Strubecker, K., Komplexe Geometrie und aufrechte Ellipsenbewegung. *Jber. DMV* **50** (1940), 43–58.
- [16] Wunderlich, W., Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien* **155** (1947), 309–331.
- [17] Wunderlich, W., Sur une certaine généralisation des cycloïdes. *Simon Stevin* **36** (1962), 57–71.
- [18] Wunderlich, W., Autoevoluten. *Elem. Math.* **17** (1962), 121–128.
- [19] Wunderlich, W., Zur Geometrie eingliederter Kollineationsgruppen mit imaginären Fixpunkttraeder. *Monatsh. Math. (im Druck)*.
- [20] Wunderlich, W., Darstellende Geometrie der Spiralfächen. *Monatsh. Math. Phys.* **46** (1938), 248–265.
- [21] Wunderlich, W., Böschungslinien, die mit ihren Planevoluten zusammenfallen. *J. reine angew. Math.* **214/215** (1964), 31–42.

Die in den Sitzungsberichten Abt. I und Abt. II der math.-nat. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss. erscheinenden Abhandlungen werden auch einzeln abgegeben. Sie können durch jede Buchhandlung oder direkt durch die Auslieferungsstelle der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (Wien I, Singerstraße 12) bezogen werden.

Nachfolgende Abhandlungen aus den Fächern **Meteorologie** und **Geophysik** sind erschienen:

- 1951 (S II a, Bd. 160):
Hofnikes H.: Über Nordföhnerscheinungen nördlich des Alpenhauptkammes (mit 13 Abbildungen) 23 Seiten. S 7.—
- 1952 (S II a, Bd. 161):
Untersteiner N.: Über Schwankungen der barometrischen Mitteltemperatur an einem tropischen Stationspaar (mit 2 Abbildungen), 11 Seiten. S 9.—
- 1953 (S II a, Bd. 162):
Schwarzacher W., Untersteiner N.: Zum Problem der Bänderung der Gletschersees (mit 14 Abbildungen). S 23.40
- 1955 (S II, Bd. 164):
Ambach W.: Über die Strahlungsdurchlässigkeit des Gletschersees (mit 4 Abbildungen). S 7.—
Dirmhirn Inge: Über Strahlungsmessungen auf einer Reise durch Norwegen (mit 2 Abbildungen). S 12.50