

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC  
DIN IAȘI  
SERIE NOUĂ  
Tomul X (XIV), Fasc. 1-2, 1964



# BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC

DIN IAȘI

SERIE NOUĂ

Tomul X (XIV)

Fasc. 1-2

EXTRAS

ÜBER DIE SCHWERPUNKTSBAHN DES DREISTAB- UND  
SCHUBKURBELGETRIEBES

VON

W. WUNDERLICH

1964

ÜBER DIE SCHWERPUNKTSBAHN DES DREISTAB- UND SCHUBKURBELGETRIEBES

VON

W. WUNDERLICH

1. Sei  $A_0 A_1 A_2 A_3$  ein ebenes Gelenkviereck mit den festen Lagerpunkten  $A_0$  und  $A_3$  (Abb. 1). Die Lagenänderung der beweglichen Glieder wird am besten dadurch beschrieben, dass man das Viereck in

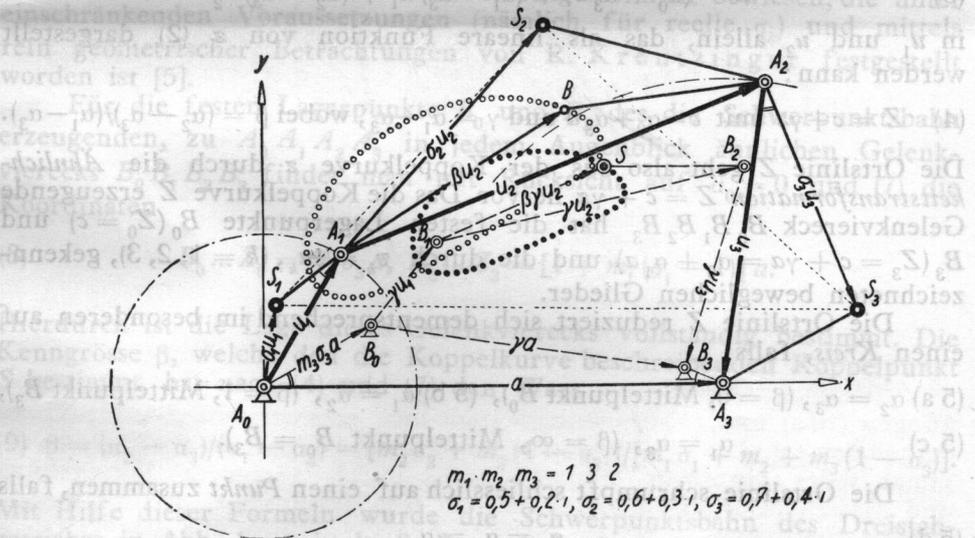


Abb. 1. — Dreistabgetriebe mit Schwerpunktsbahn und dazu ähnlicher Koppelkurve.

eine Gauss'sche Ebene einbettet und den veränderlichen Vektoren  $A_0 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3$  komplexe Zahlen  $u_1, u_2, u_3$  zuordnet, die konstante Absolutbeträge und eine feste Summe haben:

$$(1) \quad |u_k| = a_k = \text{const.}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad u_1 + u_2 + u_3 = a = \text{const.}$$

Ein mit der Koppel  $A_1 A_2$  starr verbundener Punkt  $B$ , festgelegt durch den Vektor  $A_1 B = \beta u_2$  mit  $\beta = \text{const.}$ , beschreibt während der Bewegung eine sogenannte *Koppelkurve*. Diese wohlbekannte, von 6 Gestaltparametern abhängende algebraische Kurve ist im allgemeinen von 6. Ordnung und trizirkulär<sup>1)</sup>. Sie findet wegen ihrer einfachen Erzeugung und ihres Formenreichtums vielseitige Anwendung im Maschinenbau. Macht man  $A_0$  zum Nullpunkt der Zahlenebene, so wird die Koppelkurve in bequemer Weise dargestellt durch die komplexe Gleichung

$$(2) \quad z = u_1 + \beta u_2,$$

wobei die Variablen  $u_k$  der Festsetzung (1) unterliegen<sup>2)</sup>.

In der Folge benötigen wir den nachstehenden

1. Hilfssatz. Sind  $u_1, u_2, u_3$  drei komplexe Veränderliche mit festen Absolutbeträgen und konstanter Summe  $a \neq 0$ , dann stellt jede Linearkombination  $Z = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$  mit konstanten Koeffizienten  $\alpha_k$  im allgemeinen eine Koppelkurve dar, die zu einer vom Gelenkviereck  $u_1 + u_2 + u_3 = a$  erzeugbaren Koppelkurve ähnlich ist.

Elimination von  $u_3$  führt nämlich auf ein Linearpolynom

$$(3) \quad Z = (\alpha_0 + \alpha_3 a) + (\alpha_1 - \alpha_3) u_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) u_2$$

in  $u_1$  und  $u_2$  allein, das als lineare Funktion von  $z$  (2) dargestellt werden kann:

$$(4) \quad Z = c + \gamma z \quad \text{mit} \quad c = \alpha_0 + \alpha_3 a \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}, \quad \text{wobei} \quad \beta = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}.$$

Die Ortslinie  $Z$  geht also aus der Koppelkurve  $z$  durch die Ähnlichkeitstransformation  $Z = c + \gamma z$  hervor. Das die Koppelkurve  $Z$  erzeugende Gelenkviereck  $B_0 B_1 B_2 B_3$  hat die festen Lagerpunkte  $B_0 (Z_0 = c)$  und  $B_3 (Z_3 = c + \gamma a = \alpha_0 + \alpha_1 a)$  und die durch  $v_k = \gamma u_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), gekennzeichneten beweglichen Glieder.

Die Ortslinie  $Z$  reduziert sich dementsprechend im besonderen auf einen Kreis, falls

$$(5 \text{ a}) \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad (\beta = 0, \text{ Mittelpunkt } B_0), \quad (5 \text{ b}) \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad (\beta = 1, \text{ Mittelpunkt } B_3),$$

$$(5 \text{ c}) \quad \alpha_1 = \alpha_3, \quad (\beta = \infty, \text{ Mittelpunkt } B_0 = B_3).$$

Die Ortslinie schrumpft schliesslich auf einen Punkt zusammen, falls

$$(5 \text{ d}) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3,$$

und zwar auf den Punkt  $B_0 = B_3$ .

<sup>1)</sup> Vgl. etwa [1], oder [2]. Eine ausführliche Theorie der Koppelkurve mit komplexen Hilfsmitteln gab A. Haarbleicher [3].

<sup>2)</sup> Einen auf dieser komplexen Darstellung beruhenden kurzen analytischen Beweis des klassischen Satzes von S. Roberts, betreffend die dreifache Erzeugung der Koppelkurve durch Gelenkvierecke (Dreistabgetriebe), gab der Verfasser in [4].

2. Betrachten wir nun ein materielles Dreistabgetriebe  $A_0 A_1 A_2 A_3$  (Abb. 1). Die beweglichen Glieder mögen die Relativmassen  $m_1, m_2, m_3$  mit der Summe 1 und die Schwerpunkte  $S_1, S_2, S_3$  haben. Deren Lage sei durch die Vektoren  $A_0 S_1 = \sigma_1 u_1, A_1 S_2 = \sigma_2 u_2, A_2 S_3 = \sigma_3 u_3$  mittels der im allgemeinen komplexen Konstanten  $\sigma_k$  festgelegt; ihre komplexen Koordinaten lauten demnach:

$$(6) \quad S_1 \dots z_1 = \sigma_1 u_1, \quad S_2 \dots z_2 = u_1 + \sigma_2 u_2, \quad S_3 \dots z_3 = u_1 + u_2 + \sigma_3 u_3.$$

Der Gesamtschwerpunkt  $S$  der beweglichen Teile ist sodann gekennzeichnet durch

$$(7) \quad S \dots Z = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \quad \text{mit}$$

$$\alpha_1 = m_1 \sigma_1 + m_2 + m_3 = 1 + m_1 (\sigma_1 - 1), \quad \alpha_2 = m_2 \sigma_2 + m_3, \quad \alpha_3 = m_3 \sigma_3.$$

Auf Grund des 1. Hilfssatzes gilt daher der

Satz 1. Die Bahn des Gesamtschwerpunktes eines Dreistabgetriebes ist im allgemeinen eine Koppelkurve, die zu einer Koppelkurve des Getriebes ähnlich ist.

Damit ist eine Tatsache in voller Allgemeinheit bewiesen, die unter einschränkenden Voraussetzungen (nämlich für reelle  $\sigma_k$ ) und mittels rein geometrischer Betrachtungen von R. Kreuzinger festgestellt worden ist [5].

Für die festen Lagerpunkte  $B_0$  und  $B_3$  des die Schwerpunktsbahn erzeugenden, zu  $A_0 A_1 A_2 A_3$  in jedem Augenblick ähnlichen Gelenkvierecks  $B_0 B_1 B_2 B_3$  findet man mit Rücksicht auf  $\alpha_0 = 0$  und (7) die Koordinaten

$$(8) \quad B_0 \dots Z_0 = m_3 \sigma_3 a, \quad B_3 \dots Z_3 = [1 + m_1 (\sigma_1 - 1)] a.$$

Hierdurch ist die Lage dieses Gelenkvierecks vollständig bestimmt. Die Kenngrösse  $\beta$ , welche den die Koppelkurve beschreibenden Koppelpunkt  $S$  bestimmt, hat nach (4) und (7) den Wert

$$(9) \quad \beta = (\alpha_2 - \alpha_3) / (\alpha_1 - \alpha_3) = [m_2 \sigma_2 + m_3 (1 - \sigma_3)] / [m_1 \sigma_1 + m_2 + m_3 (1 - \sigma_3)].$$

Mit Hilfe dieser Formeln wurde die Schwerpunktsbahn des Dreistabgetriebes in Abb. 1 ermittelt. Stellen mit horizontaler Tangente gehören zu Gleichgewichtslagen des Getriebes, deren Stabilität oder Labilität unmittelbar zu erkennen ist.

Mittels der Kriterien 5 a...5 d erhält man auch Aufschluss über die Ausnahmefälle des Satzes 1. Kreise als Schwerpunktsbahnen treten auf, wenn  $\beta = 0, 1$  oder  $\infty$ . Dies zieht mit Rücksicht auf die reellen und positiven Massenwerte  $m_k$  folgende Bedingungen nach sich:

$$\beta = 0 \dots \sigma_2 / (\sigma_3 - 1) = m_3 / m_2;$$

$$(10 a) \quad \overleftrightarrow{A_2 A_1 S_2} + \overleftrightarrow{S_3 A_3 A_2} = \pm \pi, \quad \overline{A_1 S_2 / A_3 S_3} = m_3 \cdot \overline{A_1 A_2} / (m_2 \cdot \overline{A_2 A_3}),$$

$$\beta = 1 \dots \sigma_1 / (\sigma_2 - 1) = m_2 / m_1;$$

$$(10 b) \quad \overleftrightarrow{A_1 A_0 S_1} + \overleftrightarrow{S_2 A_2 A_1} = \pm \pi, \quad \overline{A_0 S_1 / A_2 S_2} = m_2 \cdot \overline{A_0 A_1} / (m_1 \cdot \overline{A_1 A_2}),$$

$$(10 c) \quad \beta = \infty \dots m_1 (1 - \sigma_1) + m_3 \sigma_3 = 1.$$

Schliesslich folgt auf Grund von (5 d) und (7) noch der bemerkenswerte

Satz 2. Der Gesamtschwerpunkt eines Dreistabgetriebes ist fest, falls

$$(10 d) \quad \sigma_2 = 1 + (m_1 / m_2) \sigma_1 \quad \text{und} \quad \sigma_3 = 1 + m_2 / m_3 + (m_1 / m_3) \sigma_1.$$

Er liegt an der Stelle  $m_3 \sigma_3 a$ .

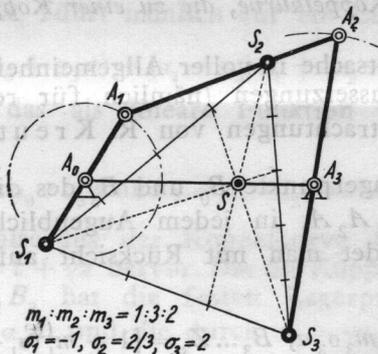


Abb. 2. — Dreistabgetriebe mit unveränderlichem Gesamtschwerpunkt.

Die Doppelbedingung (10 d) ist äquivalent zu den beiden Bedingungen (10 a) und (10 b), woraus auch ihre geometrische Bedeutung zu entnehmen ist. Die Bedingung ist durchaus erfüllbar, da der Teilschwerpunkt jedes einzelnen Getriebegliedes durch geeignete Formgebung und Massenverteilung grundsätzlich an jede gewünschte Stelle gebracht werden kann. Eine derartige Schwerpunktsverteilung für das Getriebe aus Abb. 1 zeigt beispielsweise mit reellen  $\sigma_k$  (Abb. 2). Ein gemäss Satz 2 konstruiertes Dreistabgetriebe mit unveränderlichem Gesamtschwerpunkt hat die bemerkenswerte Eigenschaft, in jeder Stellung in *indifferentem Gleichgewicht* zu sein. Es behält diese Eigenschaft auch nach Veränderung der Lagerpunkte  $A_0$  und  $A_3$  bei, da die Bedingung (10 d) nur die Massen und Schwerpunkte der drei Glieder betrifft.

3. Das Schubkurbelgetriebe  $A_0A_1A_2A'_2$  (Abb. 3) mit festem Lagerpunkt  $A_0$  und geradegeführten Punkt  $A_2$  kann als Grenzform eines Gelenkvierecks aufgefasst werden, dessen zweiter Lagerpunkt  $A_3$  ins Unendliche gerückt ist. Die analytische Behandlung verlangt allerdings eine gewisse Modifikation. Macht man  $A_0$  wieder zum Nullpunkt einer Gauss'schen Zahlenebene und ordnet man den Vektoren  $A_0A_1, A_1A_2$  zwei komplexe Variable  $u_1, u_2$  mit festen Absolutbeträgen zu, versteht hingegen unter  $u_3$  eine komplexe Konstante, die einen Vektor  $A_2A'_2$  darstellt, dessen Endpunkt auf der zur Bahn von  $A_2$  parallelen Geraden durch  $A_0$  liegt, so wird das Getriebe beschrieben durch:

$$(11) |u_k| = a_k = \text{const.}, (k = 1, 2), u_3 = \text{const.}, \arg(u_1 + u_2 + u_3) = \alpha = \text{const.}$$

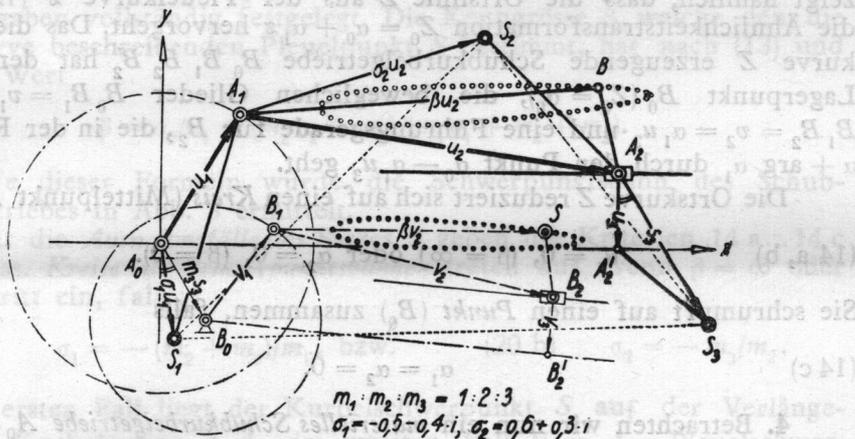


Abb. 3. — Schubkurbelgetriebe mit Schwerpunktsbahn und dazu ähnlicher Pleuelkurve.

Legt man wie in Abb. 3 die Achse der reellen Zahlen parallel zur Bahngeraden von  $A_2$ , so hat man  $\alpha = 0$ . Für das übliche „zentrische“ Schubkurbelgetriebe kann  $u_3 = 0$  angenommen werden.

Ein mit der Pleuelstange  $A_1A_2$  starr verbundener Punkt  $B$ , festgelegt durch den Vektor  $A_1B = \beta u_2$  mit  $\beta = \text{const.}$ , durchläuft während der Bewegung eine sogenannte Pleuelkurve. Diese wohlbekannte, von 5 Gestaltparametern abhängige algebraische Kurve, ist im allgemeinen von 4. Ordnung und monozirkular [1]...[3]. Sie wird wieder erfasst durch die komplexe Gleichung

$$(12) z = u_1 + \beta u_2,$$

wobei die Variablen  $u_k$  jetzt der Festsetzung (11) zu genügen haben.

Wir vermerken den entsprechenden

2. Hilfssatz. Sind  $u_1, u_2$  zwei komplexe Veränderliche mit festen Absolutbeträgen, und hat ihre um eine Konstante  $u_3$  vermehrte Summe ein festes Argument  $\alpha$ , dann stellt jede Linearkombination  $Z = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  mit konstanten Koeffizienten  $\alpha_k$  im allgemeinen eine Pleuelkurve dar, die zu einer vom Schubkurbelgetriebe  $\arg(u_1 + u_2 + u_3) = \alpha$  erzeugbaren Pleuelkurve ähnlich ist.

#### Die Umformung

$$(13) \quad Z = \alpha_0 + \alpha_1(u_1 + \beta u_2) \quad \text{mit } \beta = \alpha_2/\alpha_1, (\alpha_1 \neq 0),$$

zeigt nämlich, dass die Ortslinie  $Z$  aus der Pleuelkurve  $z$  (12) durch die Ähnlichkeitstransformation  $Z_0 = \alpha_0 + \alpha_1 z$  hervorgeht. Das die Pleuelkurve  $Z$  erzeugende Schubkurbelgetriebe  $B_0 B_1 B_2 B'_2$  hat den festen Lagerpunkt  $B_0 (Z_0 = \alpha_0)$ , die beweglichen Glieder  $B_0 B_1 = v_1 = \alpha_1 u_1$ ,  $B_1 B_2 = v_2 = \alpha_1 u_2$  und eine Führungsgerade für  $B_2$ , die in der Richtung  $\alpha + \arg \alpha_1$  durch den Punkt  $\alpha_0 - \alpha_1 u_3$  geht.

Die Ortskurve  $Z$  reduziert sich auf einen Kreis (Mittelpunkt  $B_0$ ), falls

$$(14 \text{ a, b}) \quad \alpha_1 = 0, (\beta = \infty) \quad \text{oder} \quad \alpha_2 = 0, (\beta = 0).$$

Sie schrumpft auf einen Punkt ( $B_0$ ) zusammen, falls

$$(14 \text{ c}) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

4. Betrachten wir nun ein materielles Schubkurbelgetriebe  $A_0 A_1 A_2 A'_2$  (Abb. 3). Die beweglichen Glieder  $A_0 A_1$  (Kurbel),  $A_1 A_2$  (Pleuelstange) und  $A_2 A'_2$  (Kolben) mögen die Relativmassen  $m_1, m_2, m_3$  mit der Summe 1 und die Schwerpunkte  $S_1, S_2, S_3$  haben. Deren Lage sei durch die Vektoren  $A_0 S_1 = \sigma_1 u_1$ ,  $A_1 S_2 = \sigma_2 u_2$  mit im allgemeinen komplexen Konstanten  $\sigma_k$ , sowie durch  $A_2 S_3 = s_3 = \text{const.}$  festgelegt. Die komplexen Koordinaten der Teilschwerpunkte lauten daher:

$$(15) \quad S_1 \dots z_1 = \sigma_1 u_1, \quad S_2 \dots z_2 = u_1 + \sigma_2 u_2, \quad S_3 \dots z_3 = u_1 + u_2 + s_3.$$

Der Gesamtschwerpunkt  $S$  der beweglichen Teile ist sodann bestimmt durch

$$(16) \quad S \dots Z = m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \quad \text{mit}$$

$$\alpha_0 = m_3 s_3, \quad \alpha_1 = m_1 \sigma_1 + m_2 + m_3 = 1 + m_1(\sigma_1 - 1), \quad \alpha_2 = m_2 \sigma_2 + m_3.$$

Auf Grund des 2. Hilfssatzes gilt demnach der

Satz 3. Die Bahn des Gesamtschwerpunktes eines Schubkurbelgetriebes ist im allgemeinen eine Pleuelkurve, die zu einer Pleuelkurve des Getriebes ähnlich ist.

Für den festen Lagerpunkt  $B_0$  des die Schwerpunktsbahn erzeugenden, in jedem Augenblick zu  $A_0 A_1 A_2 A_2' A_1'$  ähnlichen Schubkurbelgetriebes  $B_0 B_1 B_2 B_2'$  findet man nach 3

$$(17) \quad B_0 \dots Z_0 = \alpha_0 = m_3 s_3,$$

für die beweglichen Teile die Vektoren

$$(18) \quad B_0 B_1 = v_1 = \alpha_1 u_1, \quad B_1 B_2 = v_2 = \alpha_1 u_2, \quad B_2 B_2' = v_3 = \alpha_1 u_3.$$

Da die Bahngerade von  $B_2'$  durch  $B_0$  geht, so ist das Getriebe durch diese Angaben vollständig festgelegt. Die Kenngrösse  $\beta$ , welche den die Pleuelkurve beschreibenden Pleuelpunkt  $S$  bestimmt, hat nach (13) und (16) den Wert

$$(19) \quad \beta = \alpha_2 / \alpha_1 = (m_2 \sigma_2 + m_3) / (m_1 \sigma_1 + m_2 + m_3).$$

Mit Hilfe dieser Formeln wurde die Schwerpunktsbahn des Schubkurbelgetriebes in Abb. 3 ermittelt.

Über die Ausnahmefälle des Satzes 3 geben die Kriterien 14 a... 14 c Aufschluss. Kreise als Schwerpunktsbahnen treten auf, wenn  $\beta = \infty$  oder 0. Dies tritt ein, falls:

$$(20 a) \quad \sigma_1 = -(m_2 + m_3) / m_1, \quad \text{bzw.} \quad (20 b) \quad \sigma_2 = -m_3 / m_2.$$

Im ersten Fall liegt der Kurbelschwerpunkt  $S_1$  auf der Verlängerung des Kurbelradius  $A_0 A_1$ , im zweiten Fall liegt der Pleuelschwerpunkt  $S_2$  auf der Verlängerung der Pleuelstrecke  $A_1 A_2$ ; die Lage des Kolbenschwerpunkts  $S_3$  ist dabei ohne Belang.

Sind die Bedingungen (20 a) und (20 b) gleichzeitig erfüllt, so erhält man zufolge (14 c) ein Schubkurbelgetriebe mit ruhendem Gesamtschwerpunkt an der Stelle  $B_0$  (17).

Eingegangen am 24 II 1963

Technische Hochschule,  
Wien, Österreich

#### L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

1. Schoenfliess A., Grübler M., *Kinematik*. Enzykl. Math. Wiss., IV, 3.
2. Ebner F., *Leitfaden des technisch wichtigen Kurven*. Leipzig, 1904.
3. Haarbleicher A., J. éc. polyt., 1933, 31, pp. 13-40.
4. Wunderlich W., Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci., 1958, 12, pp. 11-18.
5. Kreuzinger R., *Getriebetechnik*, 1942, 10, S. 397-398.

### ASUPRA TRAIECTORIEI BARICENTRULUI TRIBARULUI ȘI A MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELA

(Rezumat)

Se demonstrează, cu ajutorul numerelor complexe, că baricentrul unui mecanism material cu trei bare descrie o curbă care este asemenea unei traiectorii generate de același mecanism; acest fapt rămâne valabil și pentru cazul limită al unei manivele de lungime infinită.

Se obțin condiții simple pentru ca baricentrul unui sistem să rămână fix.

#### Explicația figurilor

Fig. 1. — Mecanism tribar cu traiectoria baricentrului și curba de bielă asemenea.

Fig. 2. — Mecanism tribar (patrulater) cu baricentrul total invariabil.

Fig. 3. — Mecanism bielă-manivelă cu traiectoria baricentrului și curba de bielă asemenea.

Über die Ausnahmefälle des Satzes 3 geben die Kriterien 14 a, 14 b) Aufschluss. Kreis der Schwerpunktbestimmungen treten auf, wenn  $\rho = \infty$  oder 0. Dies tritt ein, falls:

$$c_1 = -(m_2 + m_3) \cdot m_1 \cdot \rho \quad \text{bzw.} \quad (20 a)$$

$$c_2 = -m_1 \cdot m_2 \cdot \rho \quad (20 b)$$

Im ersten Fall liegt der Kurvenhöhenpunkt 2 auf der Verlängerung der Kurvenhöhe A, im zweiten Fall liegt der Höhenpunkt 2 auf der Verlängerung der Kurvenhöhe A, die Lage des Kurvenhöhenpunktes 2 ist dabei ohne Belang.

Sind die Bedingungen (20 a) und (20 b) gleichzeitig erfüllt, so erhält man zufolge (14 c) ein Schubmittelpunkt mit tertiärem Gesamt-Höhenpunkt an der Stelle B (17).

Technische Hochschule  
Wien, Österreich

Erzogen am 24 II 1953

#### LITERATURVERZEICHNIS

1. Schöenflies A., Geometrie der Kinematik, Leipzig, 1877, IV, 3.
2. Eötvös L., Über die Bewegung des Massenmittelpunktes eines Systems, Ann. Phys., 1848, 15, 337-358.
3. Haspelberger A., J. ec. polyt., 1933, 31, pp. 13-19.
4. Wunderlich W., Publ. Inst. Math. Acad. Sci. 1952, 12, pp. 11-18.
5. Kreuzinger R., Geometrielehre, 1912, 10, 2, 307-308.