

WUNDERLICH

Normale Axonometrie mit rationalen Verkürzungen

1. Bei dem als «normale Axonometrie» bekannten Abbildungsverfahren der darstellenden Geometrie wird das abzubildende Objekt mit einem seinen Haupttrichtungen angepassten Achsenkreuz xyz verbunden und gemeinsam mit diesem normal auf eine Bildebene projiziert. Konstruktiv wird dabei die Tatsache ausgenützt, dass sämtliche zu einer Achse parallelen Abmessungen des Objektes parallel und in gleicher Weise verkürzte Bilder erhalten. Sind φ , ψ , χ die Winkel, welche die Projektionsrichtung mit den Achsen x , y , z bildet, so haben die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse die Werte $\xi = \sin\varphi$, $\eta = \sin\psi$, $\zeta = \sin\chi$. Wegen $\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1$ genügen die Verkürzungen der grundlegenden Beziehung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2, \quad (1)$$

ferner den natürlichen Nebenbedingungen

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (2)$$

Für gewöhnlich dient die Axonometrie zur bequemen Herstellung anschaulicher Ansichten. Hierzu ist notwendig, dass alle drei Achsen gegen die Bildebene geneigt sind ($\varphi, \psi, \chi \neq \pi/2$). Dementsprechend sind bei «echter» Axonometrie in (2) die Grenzen auszuschliessen.

In der Praxis können zur Festlegung der Annahme zwei Wege eingeschlagen werden:

a) Wahl der Achsenbilder x^n , y^n , z^n und Konstruktion der zugehörigen Verkürzungen [1]¹⁾. Formelmässig besteht mit den gegebenen Winkeln $\alpha = \sphericalangle y^n z^n$, $\beta = \sphericalangle z^n x^n$, $\gamma = \sphericalangle x^n y^n$ (die stumpf und zeichnerisch bequem vorausgesetzt werden) der Zusammenhang

$$\xi^2 : \eta^2 : \zeta^2 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma, \quad (3)$$

der im Verein mit (1) die Verkürzungsverhältnisse ξ , η , ζ zu berechnen gestattet. Diese Werte fallen im allgemeinen irrational aus, was oft als Nachteil angesehen wird; ein triftiger Grund ist hierfür allerdings kaum vorhanden, denn die Vornahme der Verkürzungen verlangt weder graphisch noch mit dem Rechenstab mehr Aufwand als bei rationalen Werten²⁾.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 4.

²⁾ Trotzdem meint man manchmal, der *schiefen Axonometrie* mit einfachen Verkürzungsverhältnissen vor der normalen den Vorzug einräumen zu sollen.

b) Wahl der Verkürzungsverhältnisse ξ, η, ζ mit Bedacht auf (1) und (2) und Konstruktion der Achsenbilder [1]. Auf Grund von (3) und $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ergibt sich

$$\cos 2\alpha = (\xi^4 - \eta^4 - \zeta^4) : 2\eta^2\zeta^2 \text{ usf.}^2) \quad (4)$$

Vielfach wird vorgeschlagen, die Proportion $\xi : \eta : \zeta$ ganzzahlig vorzusehen; die Verkürzungsverhältnisse selbst sind dann aber meist noch irrational und die Richtungswinkel der Achsenbilder stets unbequem. So empfiehlt beispielsweise das deutsche Normblatt DIN 5 die Annahme $\xi : \eta : \zeta = 1 : 2 : 2$ [2], welche auf $\xi = \sqrt{2}/3, \eta = \zeta = 2\sqrt{2}/3$ und $\alpha = \arccos(-1/8) = 97^\circ 10' 50''$, $\beta = \gamma = \arcsin(3/4) = 131^\circ 24' 35''$ führt.

2. Ob es nun Annahmen zur normalen Axonometrie mit *durchwegs rationalen Verkürzungsverhältnissen* ξ, η, ζ gibt, scheint eine offene Frage zu sein. Ohne dieser Frage ein ihr nach dem Gesagten keineswegs zukommendes Gewicht beimessen zu wollen, soll sie hier doch kurz und elementar behandelt werden, da ihr ein gewisser Reiz nicht abzusprechen ist.

Deuten wir die Grössen ξ, η, ζ als kartesische Normalkoordinaten, so läuft die Frage darauf hinaus, ob es auf der Kugel (1) innerhalb des durch (2) abgegrenzten Gebietes *rationale Punkte* (also Punkte mit durchwegs rationalen Koordinaten) gibt. Mit Benützung des bekannten rationalen Kugelpunktes $P(1, 1, 0)$ ist eine positive Antwort leicht zu erteilen: Man lege durch P einen Strahl mit ganzen Richtwerten $-a, -b, c$ ($a, b, c > 0$)

$$\xi = 1 - at, \quad \eta = 1 - bt, \quad \zeta = ct; \quad (5)$$

sein Restschnittpunkt mit der Kugel (1), bestimmt durch

$$t = \frac{2(a+b)}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad (6)$$

ist dann sicher rational und liefert die *Lösung*

$$\xi : \eta : \zeta : 1 = (b^2 + c^2 - a^2 - 2ab) : (a^2 + c^2 - b^2 - 2ab) : 2(a+b)c : (a^2 + b^2 + c^2). \quad (7)$$

In den Bedingungen (2) sind nur die oberen Schranken wesentlich, weil deren Einhaltung bei erfüllter Beziehung (1) die unteren Schranken zwangsläufig berücksichtigt. Die Wahl der Parameter a, b, c unterliegt daher (unter Ausschluss der Grenzen) lediglich den *Einschränkungen*

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 > 2(a+b)c. \quad (8)$$

Aus den unendlich vielen existierenden Lösungen sei etwa die zur erlaubten Annahme $a = 2, b = 1, c = 6$ gehörige Lösung $\xi = 29/41, \eta = 35/41, \zeta = 36/41$ herausgegriffen. Die zugehörigen Achsenwinkel betragen gemäss (4): $\alpha = 109^\circ 25' 23''$, $\beta = 123^\circ 00' 18''$, $\gamma = 127^\circ 34' 19''$.

3. Naturgemäss erhebt sich nun der Wunsch, den gemeinsamen Nenner des rationalen Verkürzungstripels ξ, η, ζ möglichst niedrig zu halten. Dieser Nenner hängt aber

²⁾ Man beachte, dass zufolge (3) in dem Hilfsdreieck mit den Seiten ξ^2, η^2, ζ^2 die Winkel $2\alpha - \pi, 2\beta - \pi, 2\gamma - \pi$ auftreten.

keineswegs unmittelbar vom Betrag der Parameter a, b, c ab, da die rechte Seite von (7) einen gemeinsamen Teiler enthalten kann, wie das Beispiel $a = 8, b = 1, c = 14$ beweist, das die Verkürzungen $\xi = 13/29, \eta = 27/29, \zeta = 28/29$ liefert.

Man wird also wohl oder übel den direkten Weg einschlagen müssen und, ausgehend vom Ansatz

$$\xi = \frac{u}{n}, \quad \eta = \frac{v}{n}, \quad \zeta = \frac{w}{n} \quad (u, v, w, n \text{ ganz}), \quad (9)$$

die *diophantische Gleichung*

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2n^2 \quad (10)$$

bei möglichst niedrigem n zu lösen versuchen, wobei nur Lösungen interessieren, die den Nebenbedingungen $0 < u < n, 0 < v < n$ und $0 < w < n$ genügen.

Vor der Behandlung des allgemeinen Falles wollen wir zunächst die «*dimetrische*» Annahme erledigen: Es handelt sich um den (nicht immer empfehlenswerten) Fall zweier gleichen Verkürzungen, wobei etwa $\xi = \eta$ vorausgesetzt sei. Mit $u = v$ reduziert sich die Gleichung (10) auf

$$w^2 = 2(n - u)(n + u). \quad (11)$$

Offensichtlich muss w gerade sein; dann ist aber die rechte Seite von (11) durch 4 teilbar, und damit sogar durch 8. Dies bedingt wieder, dass w durch 4 teilbar sein muss. Wählt man ein solches w und zerlegt man $w^2/8$ in zwei ganzzahlige Faktoren $r > 0$ und $s > r$, so erhält man eine Lösung $u = s - r, n = s + r$ von (11). Hierbei ist nur noch auf die Bedingung $n > w$ zu achten, die $s/r > 3 + 2\sqrt{2} = 5,828 \dots$ verlangt (und für $w = 4$ noch nicht erfüllbar ist).

Die einfachste Lösung ergibt sich für $w = 8$ über $r = 1, s = 8$ mit $\xi = \eta = 7/9, \zeta = 8/9$; diese Annahme erwähnt R. STURM [3], der hinzufügt, «es wäre interessant, noch andere derartige Gruppierungen zu ermitteln». – Die nächste einfache Annahme liefert $w = 12$ über $r = 1, s = 18$ mit $\xi = \eta = 17/19, \zeta = 12/19$.

Die zugehörigen Achsenwinkel betragen zufolge (4):

$$\alpha = \beta = \arcsin \frac{1}{\xi \sqrt{2}}, \quad \gamma = 2(\pi - \alpha). \quad (12)$$

4. Für die *allgemeine* («*trimetrische*») Annahme setzen wir $\xi < \eta < \zeta < 1$, also $u < v < w < n$ voraus. Wegen $w \leq n - 1$ ist $v \leq n - 2$ und $u \leq n - 3$, und mit Rücksicht auf $u \geq 1$ ist demnach $n \geq 4$. Die oberen Schranken für v und w führen mit (10) auf die Beschränkung $u^2 \geq 6n - 5$ nach unten. Aus

$$6n - 5 \leq u^2 \leq (n - 3)^2 \quad (13)$$

folgt über $n^2 - 12n + 14 \geq 0$ die verbesserte Aussage $n \geq 6 \pm \sqrt{22}$, also $n \geq 11$. Ein Versuch mit dem Höchstwert $u = n - 3$ verlangt $v = n - 2$ und $w = n - 1$ und zeigt für $n \geq 11$

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2n^2 = n^2 - 12n + 14 > 0, \quad (14)$$

ist also fruchtlos. Es kommt daher nur ein $u \leq n - 4$ in Betracht. Die neue Abschätzung

$$6n - 5 \leq u^2 \leq (n - 4)^2 \quad (15)$$

verlangt dann über $n^2 - 14n + 21 \geq 0$ sogar $n \geq 7 \pm \sqrt{28}$, also $n \geq 13$.

Das Quadrat einer ungeraden Zahl lässt modulo 8 bekanntlich stets den Rest 1, das Quadrat einer geraden Zahl hingegen 0 oder 4. Ist also n gerade, so ist die rechte Seite von (10) kongruent $0 \pmod{8}$, sodass keine der Zahlen u, v, w ungerade sein kann; sind aber alle Werte in (10) gerade, dann können sie auf die Hälfte reduziert werden. Wir brauchen also nur *ungerade Werte* von n zu betrachten; dann ist aber $u^2 + v^2 + w^2 \equiv 2 \pmod{8}$, sodass jeweils zwei von den Zahlen u, v, w ungerade sein müssen, während die dritte gerade, und zwar durch 4 teilbar sein muss.

Ausgerüstet mit diesen Kenntnissen können wir nun an die systematische Untersuchung aller Annahmen $n \geq 13$ gehen. Für u sind jeweils die Werte des Intervalls (15) zu berücksichtigen, für v und w die den erwähnten Kongruenzbeziehungen genügenden Werte der Intervalle $u + 1 \leq v \leq n - 2$ bzw. $v + 1 \leq w \leq n - 1$; wegen $w^2 = 2n^2 - u^2 - v^2 \leq (n - 1)^2$ brauchen jedoch nur solche v -Werte betrachtet zu werden, für welche

$$v^2 \geq (n + 1)^2 - 2 - u^2. \quad (16)$$

n	u	v
13	9	11
15	11	12
17	11	15
17	13	15
19	13	16
19	15	16

Die nebenstehend verzeichneten, nach allem *zulässigen Kombinationen* n, u, v führen, wie man leicht nachprüft, auf *keine Lösungen* für w .

Der nächste Wert $n = 21$, gekoppelt mit dem kleinsten zulässigen Wert $u = 11$, liefert dann für $v = 19$ die erste brauchbare Lösung, nämlich $w = 20$. Damit ist also das *einfachste trimetrische Verkürzungstripel* $\xi = 11/21, \eta = 19/21, \zeta = 20/21$ gefunden³⁾. Die zugehörigen Achsenwinkel betragen gemäss (4): $\alpha = 98^\circ 40' 06''$, $\beta = 121^\circ 22' 33''$, $\gamma = 139^\circ 57' 21''$.

Die nächsten Lösungen sind $\xi = 16/23, \eta = 19/23, \zeta = 21/23$ und die zu Beginn von Abschnitt 3 vermerkte Annahme mit $n = 29$. Die einfachste der «isometrischen» Annahme $\xi = \eta = \zeta$ nahekommende Lösung lautet nach einer Mitteilung von M. ABDEL-LATIF: $\xi = 39/49, \eta = 40/49, \zeta = 41/49$; die zugehörigen Achsenwinkel betragen: $\alpha = 117^\circ 35' 05''$, $\beta = 119^\circ 51' 18''$, $\gamma = 122^\circ 33' 37''$.

W. WUNDERLICH, Wien

LITERATUR

- [1] TH. SCHMID, *Darstellende Geometrie, I*, 247 ff (Berlin/Leipzig 1912).
 [2] E. MÜLLER, E. KRUPPA, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 392 ff (Wien 1948).
 [3] R. STURM, *Elemente der darstellenden Geometrie*, 146 (Leipzig 1900).

³⁾ Die Darstellung (7) erzeugt diese Lösung mit $a = 5, b = 1, c = 10$.