

# Symmetrische Koppelkurven mit zwei Flachpunkten

Von D. TESAR und W. WUNDERLICH

*Die Konstruktion von Gelenkvierecken, welche symmetrische Koppelkurven mit zwei Flachpunkten erzeugen, wird auf ein kubisches Problem zurückgeführt und sowohl graphisch als auch rechnerisch gelöst. Gewisse Sonderfälle gestatten eine vereinfachte Behandlung.*

*The construction of three-bar linkages generating symmetrical coupler curves with two undulation points is reduced to a cubic problem and solved as well graphically as analytically. Certain special cases allow a simplified treatment.*

В настоящей работе конструкция шарнирных четырёхугольников, которые порождают симметрические кривые сцепления с двумя „Плоскостными“ точками сводится к кубической проблеме и решена графически и численно. Некоторые частные случаи решаются проще.

## I. Problemstellung

Sei  $A^*ABB^*$  ein ebenes Gelenkviereck mit festem Steg  $A^*B^*$ . Jeder mit der Koppel  $AB$  starr verbundene Punkt  $C$  beschreibt bei der Bewegung eine algebraische Kurve von im allgemeinen 6. Ordnung. Diese wohlbekannten „Koppelkurven“ finden wegen ihres Formenreichtums bei einfachster Erzeugung vielfache Anwendung in der Getriebetechnik. Im besonderen werden sie häufig zu *angenäherten Geradfürungen* herangezogen; eine elementare Theorie der einschlägigen Mechanismen von P. L. TSCHEBYSCHEW wurde vor einiger Zeit an dieser Stelle entwickelt [5].

Für manche Zwecke ist nun eine angenäherte *doppelte Geradführung* erwünscht, beispielsweise für verbesserte Schaltgetriebe [3]. Die Frage nach den hierfür geeigneten *symmetrischen Koppelkurven mit zwei Flachpunkten* wurde kürzlich von G. R. VELDKAMP [4] angeschnitten, jedoch nur für gewisse Sonderfälle beantwortet. Einen Weg zur allgemeinen Behandlung des Problems will die vorliegende Arbeit aufzeigen. Die numerische Auswertung, die dem Konstrukteur die Auswahl passender Mechanismen erleichtern wird, soll einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben<sup>1)</sup>.

## II. Lösungsweg

Primär wird eine brauchbare *symmetrische Koppelkurve* naturgemäß durch ein gleicharmiges Gelenkviereck ( $A^*A = B^*B$ ) mit gleichschenkligen Koppeldreieck ( $AC = BC$ ) erzeugt. Gibt man das Gelenkviereck vor, so wäre für die Bewegung der Koppel  $AB$  zunächst die sogenannte BALLSche Kurve zu ermitteln, das ist der von der Gangpolkurve verschiedene Teil der Einhüllenden aller Wendekreise. Diese BALLSche Kurve besteht aus jenen Punkten, deren Bahnen einen *Flachpunkt* aufweisen [2]. Die Spitze  $C$  des Koppeldreiecks wäre dann in einem auf der Koppelsymmetrale gelegenen Doppelpunkt der BALLSchen Kurve anzunehmen. Im Hinblick auf die äußerst komplizierte Natur der BALLSchen Kurve erscheint jedoch dieser Weg nicht ohne weiteres gangbar.

Unter Anwendung des bekannten Satzes von S. ROBERTS über die *dreifache Erzeugung der Koppelkurve* [2] bietet sich für die *sekundäre Erzeugung* einer symmetrischen Koppelkurve ein Gelenkviereck mit den Abmessungen

$$(1) \quad AA^* = AB = AC.$$

Solche Mechanismen, bei welchen das Koppeldreieck ebenfalls gleichschenklige ist, aber jetzt mit einem Schenkel auf der Koppel ruht, hat schon P. L. TSCHEBYSCHEW vorzugsweise verwendet, weil sie oft günstigere Antriebsverhältnisse aufweisen.

Auch wir wollen die sekundäre Erzeugung zugrunde legen. Betrachten wir das Gelenkviereck in jener Stellung; in welcher sich der Punkt  $C$  gerade im Flachpunkt seiner Bahn befindet (Bild 1).  $C$  muß einerseits dem momentanen *Wendekreis*  $k$  angehören, der ja alle Punkte verschwindender Bahnkrümmung enthält, und andererseits zusammen mit  $A$  und  $B$  auf der momentanen *Scheitelkubik*  $l$  liegen, die alle Punkte stationärer Bahnkrümmung umfaßt [2]. Mit Benützung der momentanen (quadratischen) *Krümmungsverwandschaft*  $P \rightarrow P^*$ , die jeden Punkt  $P$  des bewegten Systems mit dem Krümmungsmittelpunkt  $P^*$  seiner Bahn verknüpft (und durch den Wende-

<sup>1)</sup> Nach Abfassung dieser Arbeit erlangte der erste Autor anlässlich eines Gastvortrages in Delft Kenntnis davon, daß kürzlich E. A. DIJKSMAN in einer demselben Thema gewidmeten Dissertation [6] ähnliche Gedankengänge verfolgt hat.

kreis  $k$  mit dem darauf befindlichen Momentanpol  $O$  vollständig bestimmt ist), eröffnet sich nun folgender Weg:

Nach Annahme des Wendekreises  $k$  und des Momentanpols  $O \in k$  wähle man den Punkt  $A$  (beliebig innerhalb später noch anzugebender Grenzen). Nun ermittle man mittels der Krümmungsverwandtschaft die zu  $A$  gehörige Bahnkrümmungsmittelpunkt  $A^*$  und schlage mit Rücksicht auf (1) um  $A$  den durch  $A^*$  gehenden Hilfskreis  $h$ . Einer seiner Schnittpunkte mit  $k$  werde mit  $C$  bezeichnet. Durch die beiden Punkte  $A$  und  $C$  zusammen mit dem Doppelpunkt  $O$ , wo die Scheitelkubik  $l$  bekanntlich den Wendekreis berührt und rechtwinklig durchsetzt, ist dieselbe eindeutig festgelegt. Einer der von ihr aus  $h$  ausgeschnittenen Punkte ( $\neq C$ ) sei  $B$ . Nochmalige Anwendung der Krümmungsverwandtschaft liefert dann den noch fehlenden, zu  $B$  gehörigen Lagerpunkt  $B^*$ , womit das gesuchte Gelenkviereck gefunden ist.

Die Wahl des Ausgangspunktes  $A$  ist so vorzunehmen, daß die beiden eigentlichen Schnittpunkte der Kreise  $h$  und  $k$  reell ausfallen. Die Grenze des für  $A$  zulässigen Bereiches  $\mathfrak{A}$  der Ebene wird offenbar von jenen Punkten gebildet, für welche der Hilfskreis  $h$  von  $k$  berührt wird. Diese Grenze wird in Abschnitt V bestimmt.

Die Kubik  $l$  ist bekanntlich zirkular, d. h. eine Kurve 3. Ordnung, welche die absoluten Kreispunkte  $K_1, K_2$  (als einfache Punkte) enthält. Von den sechs Schnittpunkten des Kreises  $h$  und der Kubik  $l$  sind also drei von vornherein bekannt ( $C, K_1, K_2$ ) und auszuschließen. Die Ermittlung von  $B$  ist demnach bloß ein kubisches Problem, was die Gleichung (19) rechnerisch bestätigt. Unter den drei Lösungen ist sicher wenigstens eine reell, sodaß die Einschränkung  $A \in \mathfrak{A}$  ausreicht.

### III. Zeichnerische Durchführung

Zur besseren Verständigung wollen wir schon jetzt Polarkoordinaten  $r, \varphi$  einführen (Bilder 1, 2): Der Ursprung sei im Momentanzentrum  $O$ , als Längeneinheit diene der Durchmesser des Wendekreises  $k$ , und der Polarwinkel  $\varphi$  werde von der Wendekreistangente („Poltangente“) aus gezählt.

Die die Punkte  $A(r; \varphi)$  und  $A^*(r^*; \varphi)$  verknüpfende Krümmungsverwandtschaft wird dann durch die wohlbekannte Formel von EULER-SAVARY

$$(2) \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} = \frac{1}{\sin \varphi}$$

definiert [2]. Mit Benützung des  $O$  auf  $k$  gegenüberliegenden „Wendepols“  $I$  kann der konstruktive Übergang  $A \rightarrow A^*$  etwa nach R. BEREIS [1] folgendermaßen vollzogen werden (Bild 2): Man falle aus  $I$  auf den Strahl  $OA$  das Lot; dessen Pol bezüglich des durch  $O$  gehenden Kreises um  $A$  ist dann der gesuchte Bahnkrümmungsmittelpunkt  $A^*$  zu  $A^2$ .

Der nächste Schritt besteht nach Abschnitt II darin, um  $A$  den Hilfskreis  $h$  durch  $A^*$  zu schlagen und mit dem Wendekreis  $k$  in  $C$  zu schneiden.

Die Scheitelkubik  $l$  hat in dem eingeführten Koordinatensystem eine Polargleichung von der Bauart

$$(3) \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{\cos \varphi} + \frac{\beta}{\sin \varphi} \quad (\alpha, \beta = \text{const}).$$

Sie ist demnach durch die beiden ihr angehörenden Punkte  $A$  und  $C$  eindeutig bestimmt. Anstatt jedoch  $l$  mit

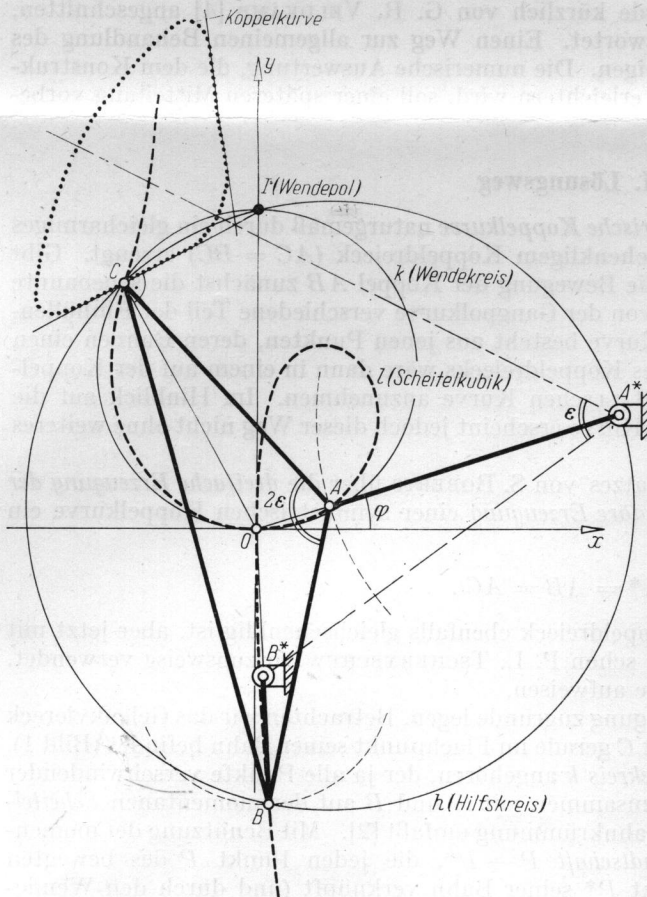


Bild 1

<sup>2)</sup> Man prüft leicht nach, daß die Abstände des Lotes bzw. des Punktes  $A^*$  von  $A$  zufolge (2) das Produkt  $r^2$  ergeben, was die erwähnte polare Beziehung bedingt. — In Bild 2 ist zufällig  $OA^* = OI$ .



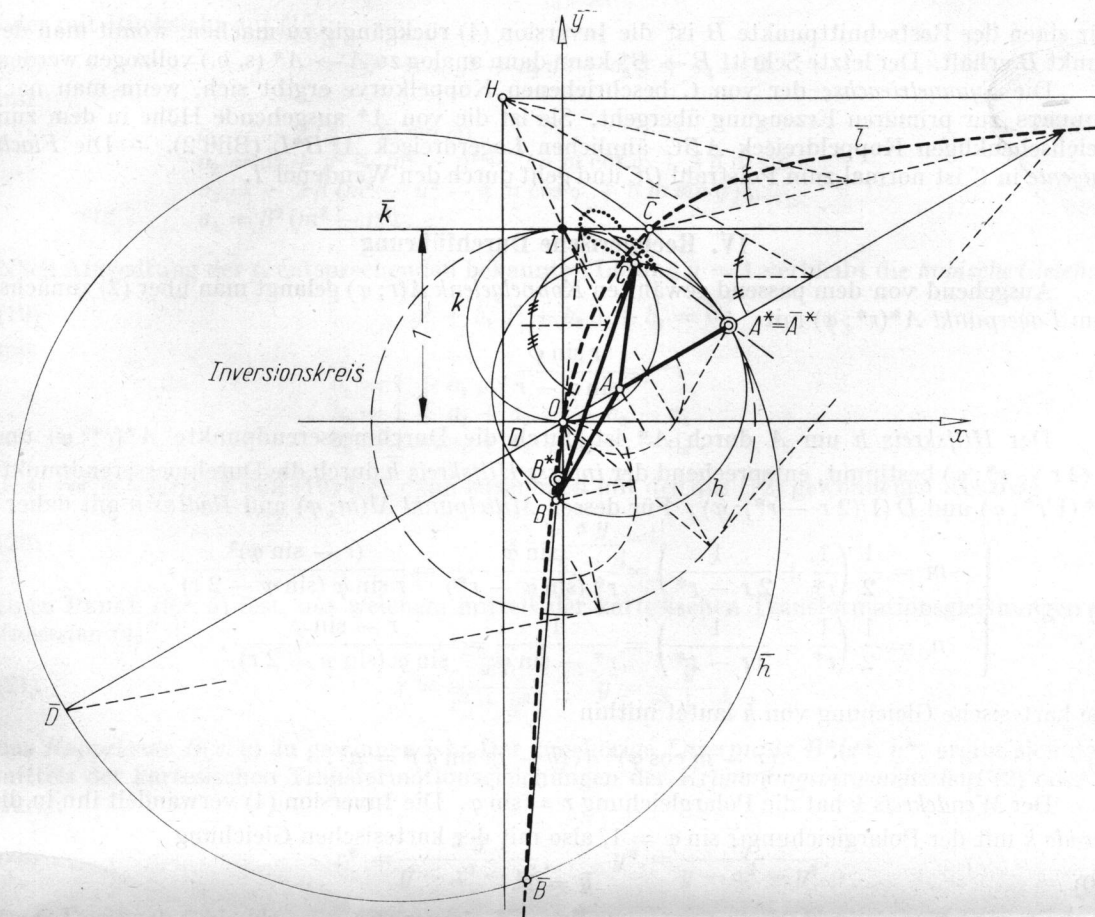


Bild 2

dem Kreis  $h$  in  $B$  zu schneiden, wie es der Plan verlangt, üben wir die *Inversion* (Transformation durch reziproke Radien)

$$(4) \quad \bar{r} = \frac{1}{r}$$

aus. Diese verwandelt auf Grund ihrer bekannten Eigenschaften den Kreis  $h$  in einen anderen Kreis  $\bar{h}$  (der leicht zu konstruieren ist), und die Kubik  $l$  in eine *gleichseitige Hyperbel*  $\bar{l}$

$$(5) \quad \bar{r} = \frac{\alpha}{\cos \varphi} + \frac{\beta}{\sin \varphi},$$

wie nach Übergang zu kartesischen Koordinaten  $\bar{x} = \bar{r} \cos \varphi$ ,  $\bar{y} = \bar{r} \sin \varphi$  aus der kartesischen Gleichung

$$(6) \quad (\bar{x} - \alpha)(\bar{y} - \beta) = \alpha \beta$$

zu erkennen ist. Von dieser durch den Ursprung  $O$  gehenden Hyperbel kennt man die (leicht angebbaren) zu  $A$  und  $C$  inversen Punkte  $\bar{A}$  und  $\bar{C}$ , ferner die zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptotenrichtungen. Mit Rücksicht darauf, daß bei der gleichseitigen Hyperbel konjugierte Durchmesser spiegelbildlich zu den Asymptoten liegen<sup>3)</sup>, läßt sich der Mittelpunkt  $H(\alpha, \beta)$  unserer Hyperbel  $\bar{l}$  folgendermaßen finden: Man ziehe durch den Halbirungspunkt der Sehne  $OA$  jene Gerade, deren Neigung gegen die  $x$ -Achse entgegengesetzt gleich der Sehnenneigung ist, und verfähre ebenso mit den Sehnen  $OC$  und  $AC$ ; die drei so eingeführten Geraden sind Hyperbel-durchmesser und schneiden einander also in einem gemeinsamen Punkt  $H$  (Bild 2).

Die nunmehr aus ihren Asymptoten und etwa dem Punkt  $O$  leicht zu zeichnende Hyperbel  $\bar{l}$  ist anschließend mit dem Kreis  $\bar{h}$  zu schneiden, wobei der gemeinsame Punkt  $\bar{C}$  ausscheidet.

<sup>3)</sup> Für die gleichseitige Hyperbel mit der kartesischen Gleichung  $xy = a$  gilt  $x dy + y dx = 0$ ; die Durchmesserrichtung  $y/x$  und die Tangentenrichtung  $dy/dx$  sind also entgegengesetzt gleich.

Für einen der Restschnittpunkte  $\bar{B}$  ist die Inversion (4) rückgängig zu machen, womit man den Punkt  $B$  erhält. Der letzte Schritt  $B \rightarrow B^*$  kann dann analog zu  $A \rightarrow A^*$  (s. o.) vollzogen werden.

Die *Symmetrieachse* der von  $C$  beschriebenen Koppelkurve ergibt sich, wenn man nach ROBERTS zur primären Erzeugung übergeht. Sie ist die von  $A^*$  ausgehende Höhe in dem zum gleichschenkligen Koppeldreieck  $ABC$  ähnlichen Lagerdreieck  $A^*B^*L$  (Bild 2). — Die *Flachtangente* in  $C$  ist normal zum Polstrahl  $OC$  und geht durch den Wendepol  $I$ .

#### IV. Rechnerische Durchführung

Ausgehend von dem passend gewählten *Koppelgelenk*  $A(r; \varphi)$  gelangt man über (2) zunächst zum *Lagerpunkt*  $A^*(r^*; \varphi)$  mit

$$(7) \quad r^* = \frac{r \sin \varphi}{\sin \varphi - r}.$$

Der *Hilfskreis*  $h$  um  $A$  durch  $A^*$  ist durch die Durchmesserendpunkte  $A^*(r^*; \varphi)$  und  $D(2r - r^*; \varphi)$  bestimmt, entsprechend der *inverse Hilfskreis*  $\bar{h}$  durch die Durchmesserendpunkte  $\bar{A}^*(1/r^*; \varphi)$  und  $\bar{D}(1/(2r - r^*); \varphi)$ . Für dessen *Mittelpunkt*  $M(m; \varphi)$  und *Radius*  $n$  gilt daher

$$(8) \quad \begin{cases} m = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^*} + \frac{1}{2r - r^*} \right) = \frac{\sin \varphi}{r^* (\sin \varphi - r^*)} = \frac{(r - \sin \varphi)^2}{r \sin \varphi (\sin \varphi - 2r)}, \\ n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^*} - \frac{1}{2r - r^*} \right) = \frac{1}{r^* - \sin \varphi} = \frac{r - \sin \varphi}{\sin \varphi (\sin \varphi - 2r)}. \end{cases}$$

Die kartesische Gleichung von  $\bar{h}$  lautet mithin

$$(9) \quad (\bar{x} - m \cos \varphi)^2 + (\bar{y} - m \sin \varphi)^2 = n^2.$$

Der *Wendekreis*  $k$  hat die Polargleichung  $r = \sin \varphi$ . Die Inversion (4) verwandelt ihn in die *Gerade*  $\bar{k}$  mit der Polargleichung  $\bar{r} \sin \varphi = 1$ , also mit der kartesischen Gleichung

$$(10) \quad \bar{y} = 1.$$

Die benötigten Schnittpunkte  $C_1, C_2$  von  $h$  und  $k$  sind invers zugeordnet den Schnittpunkten  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  von  $\bar{h}$  und  $\bar{k}$ ; deren Abszissen  $\bar{x} = c_1, c_2$  ergeben sich aus (9) und (10) mit

$$(11) \quad c_{1,2} = m \cos \varphi \pm \sqrt{n^2 - (1 - m \sin \varphi)^2}.$$

Bezeichne nun  $c$  den gewählten Wert  $c_1$  oder  $c_2$  und  $\bar{C}$  den entsprechenden der beiden Punkte  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ . Die zur Scheitelkubik  $l$  inverse *gleichseitige Hyperbel*  $\bar{l}$  hat gemäß (5) oder (6) eine kartesische Gleichung der Bauart

$$(12) \quad \frac{\alpha}{\bar{x}} + \frac{\beta}{\bar{y}} = 1.$$

Mit Hilfe der  $\bar{l}$  angehörenden Punkte  $\bar{A}(\cos \varphi/r, \sin \varphi/r)$  und  $\bar{C}(c, 1)$  berechnen sich die Mittelpunktskoordinaten  $\alpha, \beta$  aus

$$(13) \quad \frac{\alpha}{\cos \varphi} + \frac{\beta}{\sin \varphi} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r^*} + \frac{1}{\sin \varphi}, \quad \frac{\alpha}{c} + \beta = 1$$

zu

$$(14) \quad \alpha = \frac{c \sin \varphi \cos \varphi}{r^* (c \sin \varphi - \cos \varphi)}, \quad \beta = 1 - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^* (c \sin \varphi - \cos \varphi)}.$$

Nunmehr ist der Kreis  $\bar{h}$  (9) mit der Hyperbel  $\bar{l}$  (12) zu schneiden. Die Kehrwerte

$$(15) \quad \tilde{x} = \frac{1}{\bar{x}}, \quad \tilde{y} = \frac{1}{\bar{y}}$$

der Schnittpunktskoordinaten genügen den Gleichungen

$$(16) \quad (1 - m \tilde{x} \cos \varphi)^2 \tilde{y}^2 + \tilde{x}^2 (1 - m \tilde{y} \sin \varphi)^2 = n^2 \tilde{x}^2 \tilde{y}^2, \quad \alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} = 1.$$

Elimination von  $\tilde{x}$  führt zunächst auf eine Gleichung 4. Grades

$$(17) \quad 1 + a_1 \tilde{y} + a_2 \tilde{y}^2 + a_3 \tilde{y}^3 + a_4 \tilde{y}^4 = 0.$$



oder mit Rücksicht auf (15):

$$(18) \quad \bar{y}^4 + a_1 \bar{y}^3 + a_2 \bar{y}^2 + a_3 \bar{y} + a_4 = 0$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= -2(\beta + m \sin \varphi), \\ a_2 &= \alpha^2 + \beta^2 + m^2 - n^2 - 2\alpha m \cos \varphi + 4\beta m \sin \varphi, \\ a_3 &= -2\beta(m^2 - n^2 - \alpha m \cos \varphi + \beta m \sin \varphi), \\ a_4 &= \beta^2(m^2 - n^2). \end{aligned}$$

Nach Abspaltung der  $\bar{C}$  entsprechenden bekannten Lösung  $\bar{y} = 1$  verbleibt die *kubische Gleichung*

$$(19) \quad \bar{y}^3 + b_1 \bar{y}^2 + b_2 \bar{y} + b_3 = 0$$

mit

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 + a_1, \\ b_2 &= 1 + a_1 + a_2 = -a_3 - a_4, \\ b_3 &= 1 + a_1 + a_2 + a_3 = -a_4. \end{aligned}$$

Jede reelle Wurzel  $\bar{y}$  von (19) legt dann zusammen mit der aus (12) gewonnenen Abszisse

$$(20) \quad \bar{x} = \frac{\alpha \bar{y}}{\bar{y} - \beta}$$

einen Punkt  $\bar{B}(\bar{x}, \bar{y})$  fest, aus welchem mittels der kartesischen Transformationsgleichungen der *Inversion* (4)

$$(21) \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$$

das *Koppelende*  $B(x, y)$  zu gewinnen ist. Der zugehörige *Lagerpunkt*  $B^*(x^*, y^*)$  ergibt sich dann mittels der kartesischen Transformationsgleichungen der *Krümmungsverwandtschaft* (2) oder (7) durch

$$(22) \quad x^* = \frac{xy}{y - x^2 - y^2}, \quad y^* = \frac{y^2}{y - x^2 - y^2}.$$

Der noch fehlende, die gewünschte Koppelkurve erzeugende *Koppelpunkt*  $C(X, Y)$  leitet sich aus dem bereits bekannten Punkt  $\bar{C}(c, 1)$  wieder durch die *Inversion* (21) ab:

$$(23) \quad X = \frac{c}{c^2 + 1}, \quad Y = \frac{1}{c^2 + 1}.$$

Kurz zusammengefaßt verläuft also die Rechnung nach folgendem *Programm*: Wahl der Polarkoordinaten des ersten Koppelgelenks  $A(r; \varphi)$  unter Beachtung von Abschnitt V; Bestimmung des zugehörigen Lagerpunktes  $A^*(r^*; \varphi)$  mittels (7); Berechnung der Hilfskreisparameter  $m, n$  gemäß (8); Ermittlung der Hilfskoordinate  $c$  zufolge (11); Aufsuchen des Hyperbelmittelpunktes  $H(\alpha, \beta)$  mittels (14); Aufstellung und Auflösung der kubischen Gleichung (19) für  $\bar{y}$ ; Ergänzung der Abszisse  $\bar{x}$  mit (20); Bestimmung des zweiten Koppelgelenks  $B(x, y)$  und des zugehörigen Lagerpunktes  $B^*(x^*, y^*)$  mittels (21) und (22); Festlegung des Koppelpunktes  $C(X, Y)$  durch (23).

## V. Zulässigkeitsbereiche

Die Wahl des Ausgangspunktes  $A(r; \varphi)$  hat so zu erfolgen, daß der Radikand in (11) nicht negativ wird. Der solcherart durch

$$(24) \quad (1 - m \sin \varphi)^2 \leq n^2$$

gekennzeichnete *Zulässigkeitsbereich*  $\mathfrak{A}$  für das Koppelgelenk  $A$  wird begrenzt durch eine vermöge

$$(25) \quad 1 - m \sin \varphi = \pm n$$

erklärte Randkurve. Drückt man  $m$  und  $n$  gemäß (8) durch  $r$  und  $\varphi$  aus, so erhält man die (für beide Vorzeichen gemeinsame) Polargleichung der *Randkurve* von  $\mathfrak{A}$ :

$$(26) \quad r^2(1 + 3 \sin \varphi) - r \sin \varphi(1 + 3 \sin \varphi) + \sin^3 \varphi = 0.$$

Übergang zu Normalkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  führt zur kartesischen Gleichung

$$(27) \quad (x^2 + y^2)^4(x^2 - 8y^2) - 2y(x^2 + y^2)^3(x^2 - 8y^2) + y^2(x^2 + y^2)^2(x^2 - 14y^2) + 6y^5(x^2 + y^2) - y^6 = 0.$$

Es handelt sich mithin um eine *tetrazirkulare Kurve 10. Ordnung* mit zwei reellen Asymptoten  $x \pm 2\sqrt{2}y = 0$ , die im Ursprung  $O$  einen sechsfachen Punkt mit zusammenfallenden Tangenten hat<sup>4)</sup> und überdies einen gewöhnlichen Doppelpunkt in der Wendekreismitte  $J(0, 1/2)$  aufweist. Ihr Diagramm in Bild 3 wurde mit Hilfe der Parameterdarstellung

$$(28) \quad r = u \sin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{u(1-u)}{1-3u+3u^2}$$

gezeichnet.

Der mit  $\mathfrak{A}$  durch die Krümmungsverwandtschaft (2) zusammenhängende Bereich  $\mathfrak{A}^*$  für den Lagerpunkt  $A^*$  ist einfacher gebaut (Bild 3). Drückt man in (25)  $m$  und  $n$  gemäß (8) durch  $r^*$  und  $\varphi$  aus, so erhält man die Polargleichung der *Randkurve* von  $\mathfrak{A}^*$ :

$$(29) \quad r^{*2} - r^*(1 + \sin \varphi) + \sin^2 \varphi = 0.$$

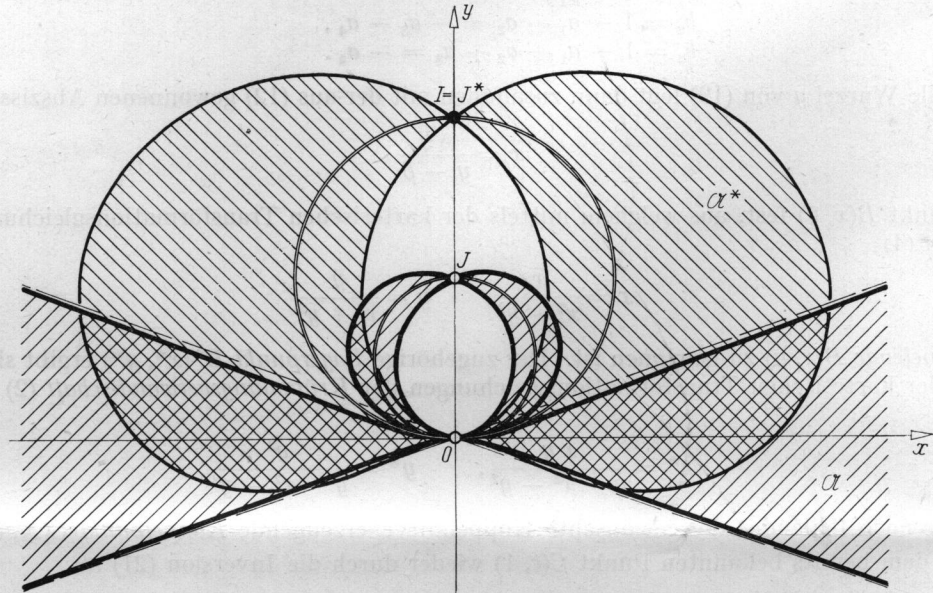


Bild 3

Die kartesische Gleichung

$$(30) \quad (x^{*2} + y^{*2})^4 - 2y^*(x^{*2} + y^{*2})^3 - (x^{*2} + y^{*2})^2(x^{*2} - 2y^*) - 2y^{*2}(x^{*2} + y^{*2}) + y^{*4} = 0$$

lehrt, daß es sich um eine ganz im Endlichen verlaufende *vollzirkulare Kurve 8. Ordnung* handelt, welche im Ursprung  $O$  einen vierfachen Punkt mit zusammenfallenden Tangenten hat (Doppelspitze) und überdies im Wendepol  $J^* = I(0, 1)$  einen gewöhnlichen Doppelpunkt besitzt. Zum Zeichnen des Diagramms empfiehlt sich die Parameterdarstellung

$$(31) \quad r^* = u^* \sin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{u^*}{1 - u^* + u^{*2}}.$$

Für zusammengehörige Punkte  $A, A^*$  sind die Parameterwerte  $u, u^*$  gemäß (2) durch

$$(32) \quad \frac{1}{u} - \frac{1}{u^*} = 1$$

verknüpft.

Erwähnt sei, daß die zu (29) *inverse Kurve* erheblich einfacher ist. Mit  $\bar{r}^* = 1/r^*$  erhält man zunächst die Polargleichung

$$(33) \quad \bar{r}^{*2} \sin^2 \varphi - \bar{r}^*(1 + \sin \varphi) + 1 = 0,$$

und Übergang zu kartesischen Koordinaten liefert dann die *Kurve 4. Ordnung*

$$(34) \quad \bar{x}^{*2} = (\bar{y}^* - 1)^2(\bar{y}^{*2} + 1).$$

Dieselbe gestattet die Parameterdarstellung

$$(35) \quad \bar{x}^* = (\operatorname{sh} v - 1) \operatorname{ch} v, \quad \bar{y}^* = \operatorname{sh} v$$

<sup>4)</sup> Die Singularität in  $O$  läßt sich auflösen in zwei Spitzen  $y^2 = \pm x^3 + \dots$  und zwei reguläre Bögen  $y = x^2 \pm x^3 + \dots$ , die einander oskulierend durchsetzen.



oder auch (mit  $e^v = w$ ):

$$(36) \quad \bar{x}^* = \frac{1}{4} (w - w^{-1} - 2) (w + w^{-1}), \quad \bar{y}^* = \frac{1}{2} (w - w^{-1}).$$

Da  $\bar{x}^*(w)$  und  $\bar{y}^*(w)$  rationale Funktionen sind, handelt es sich um eine rationale Kurve, und da sowohl Inversion (21) als auch Krümmungsverwandtschaft (22) birationale Transformationen sind, so sind also auch die Bereichsränder von  $\mathfrak{A}^*$  und  $\mathfrak{A}$  rationale Kurven, wobei  $w$  als rationaler Parameter dienen kann.

### VI. Sonderfälle

#### 1. Sonderfall: $\varphi = 0, r$ beliebig.

Es erscheint verlockend, den Ausgangspunkt  $A$  auf der Poltangente zu wählen ( $\varphi = 0, r \neq 0$ ), die ja ganz im Innern des Zulässigkeitsbereichs  $\mathfrak{A}$  verläuft.  $A^*$  fällt dann mit dem Pol  $O$  zusammen ( $r^* = 0$ ), und der Hilfskreis  $h$  um  $A$  durch  $A^*$  liefert den Punkt  $C$  eindeutig (Bild 4). Die durch  $A$  und  $C$  bestimmte Scheitelkubik  $l$  zerfällt hier in die Poltangente  $x$  und den Kreis  $h$ . Der Punkt  $B$  wird daher unbestimmt und darf auf  $h$  beliebig angenommen werden, womit dann der zugehörige Lagerpunkt  $B^*$  festliegt. Aus der Tatsache, daß der im Kreis  $h$  zur Sehne  $BC$  gehörige Peripheriewinkel  $BA^*C$  die Hälfte des Zentriwinkels  $BAC$  ist, folgt, daß  $A^*C$  die Symmetrieachse der von  $C$  beschriebenen Koppelkurve ist. Diese besitzt daher im allgemeinen  $C$  als einzigen Flachpunkt, weshalb dieser Sonderfall auszuschließen ist.

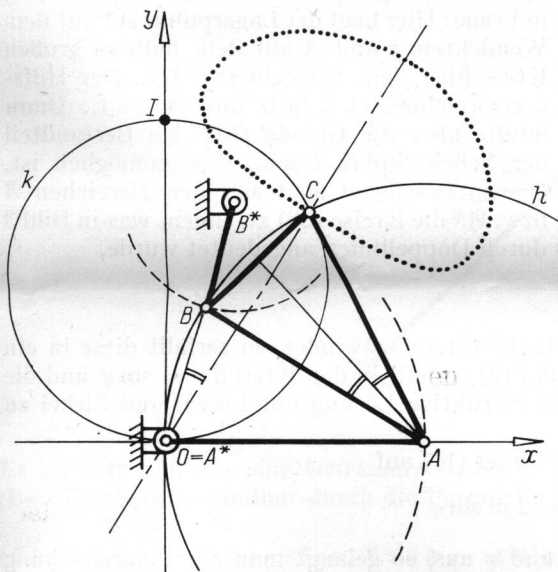


Bild 4

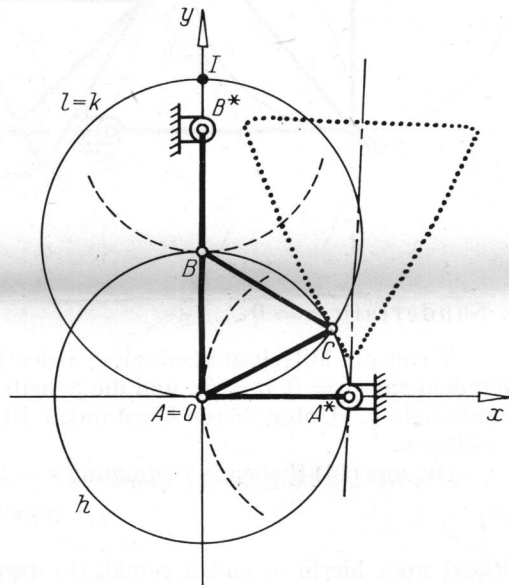


Bild 5

#### 2. Sonderfall: $\varphi = 0, r = 0$ .

Wird  $A$  im Pol  $O$  angenommen, so darf  $A^*$  frei auf der Poltangente gewählt werden. Unter diesen Umständen oskuliert der Wendekreis  $k$  die Scheitelkubik  $l$  im Knoten  $O$ , wie sich zeigen läßt. Soll  $l$  nun noch einen der beiden Punkte  $C$  enthalten, die der Hilfskreis  $h$  auf  $k$  ausschneidet, so ist dies nur in der Weise möglich, daß  $l$  in  $k$  und die Polnormale  $y$  zerfällt. Für  $B$  kommt dann jeder der beiden Punkte von  $h$  in Betracht, die auf  $y$  liegen; der zugehörige Lagerpunkt  $B^*$  ergibt sich mittels der Krümmungsverwandtschaft (Bild 5). — Dieser Sonderfall findet sich schon bei G. R. VELDKAMP ([4], Fig. 41).

#### 3. Sonderfall: $\varphi = \pi/2, r = 1/2$ .

Wählt man  $A$  im Doppelpunkt  $J(0, 1/2)$  des Bereichsrandes (27), so fällt  $A^*$  in den Wendepol  $I(0, 1)$ . Der Hilfskreis  $h$  deckt sich mit dem Wendekreis  $k$ , so daß  $C$  unbestimmt wird und auf  $h = k$  frei gewählt werden darf (Bild 6). Auch diesmal zerfällt die Scheitelkubik  $l$  in den Wendekreis  $k$  und die Polnormale  $y$ . Dementsprechend dürfte auch  $B$  auf  $h$  beliebig angenommen werden. Im allgemeinen ist dann  $B^*$  ein Fernpunkt, so daß kein echtes Gelenkviereck, sondern ein Schubkurbelgetriebe vorliegt, noch dazu ein derart spezielles (zentrisch, Koppel- und Kurbellänge gleich), daß das Koppeldreieck eine Ellipsenbewegung vollführt und  $C$  eine Gerade beschreibt. Diese Möglichkeit ist demnach auszuschließen.

Nimmt man jedoch  $B$  im Pol  $O$  an, so darf  $B^*$  frei auf der Poltangente  $x$  gewählt werden (Bild 6). Jeder Punkt  $C$  des Wendekreises beschreibt dann eine Koppelkurve mit zwei Flachpunkten. Auch dieser Sonderfall findet sich bei G. R. VELDkamp ([4], Fig. 43).

#### 4. Sonderfall: $\alpha = \beta = \infty$ .

Eine Ausartung tritt ein, wenn der Nenner in (14) verschwindet, weil dann der Hyperbelmittelpunkt  $H(\alpha, \beta)$  ins Unendliche rückt. Die betreffende Bedingung

$$(37) \quad c \sin \varphi = \cos \varphi$$

führt über (11) auf

$$(38) \quad (m \pm n) \sin \varphi = 1$$

und mit Benützung von (8) auf

$$(39) \quad r = \frac{1}{2} \sin \varphi, \quad r^* = \sin \varphi$$

bzw.

$$(40) \quad r = \frac{1 \pm i}{2} \sin \varphi, \quad r^* = \pm i \sin \varphi.$$

Aus Realitätsgründen kommt nur der Fall (39) in Frage: Hier liegt der Lagerpunkt  $A^*$  auf dem Wendekreis  $k$  und  $A$  auf dem halb so großen Kreis über dem Durchmesser  $OJ$ . Der Hilfskreis  $h$  schneidet  $k$  in  $O$  und  $A^* = C$ . Dann müßte aber die Gerade  $OAC$  ein Bestandteil der Scheitelkubik  $l$  sein, was unmöglich ist. Dementsprechend sind aus den Bereichen  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{A}^*$  die Kreise (39) zu tilgen, was in Bild 3 durch Doppellinien angedeutet wurde.

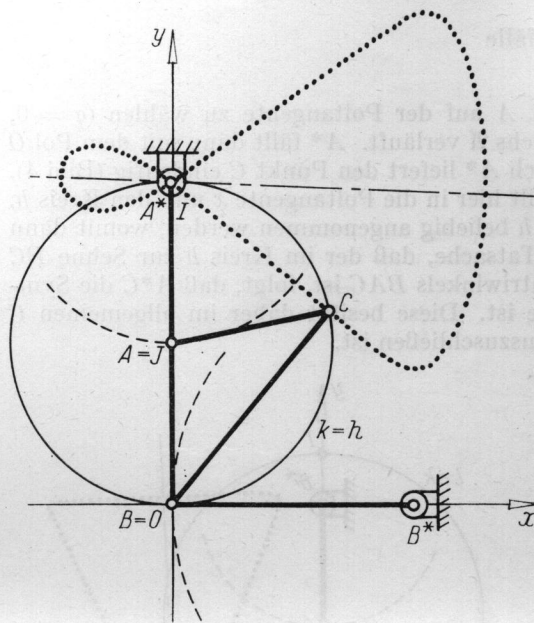


Bild 6

#### 5. Sonderfall: $\alpha = 0$ .

Wenn die Mittelpunktsabszisse  $\alpha$  der Hyperbel  $\bar{l}$  (6) verschwindet, so zerfällt diese in ein Geradenpaar ( $\bar{x} = 0, \bar{y} = \beta$ ), und die Scheitelkubik  $l$  (3) zerfällt in den Kreis  $\beta r = \sin \varphi$  und die Polnormale  $y$ . Unter diesen Umständen ist die konstruktive Lösung mit Lineal und Zirkel zu bewältigen.

Die aus (14) fließende Bedingung  $c = 0$  führt über (11) auf

$$(41) \quad m^2 - n^2 + 1 = 2m \sin \varphi.$$

Drückt man hierin  $m$  und  $n$  gemäß (8) durch  $r$  und  $\varphi$  aus, so gelangt man zur Polargleichung

$$(42) \quad 4r^3 \sin \varphi - r^2(1 + 5 \sin^2 \varphi) + 2r \sin \varphi(1 + \sin^2 \varphi) - \sin^2 \varphi = 0$$

einer gewissen Ortslinie  $p$  für  $A$ . Auf Grund der kartesischen Gleichung

$$(43) \quad 4y(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(x^2 + 6y^2) + 2y(x^2 + 2y^2) - y^2 = 0$$

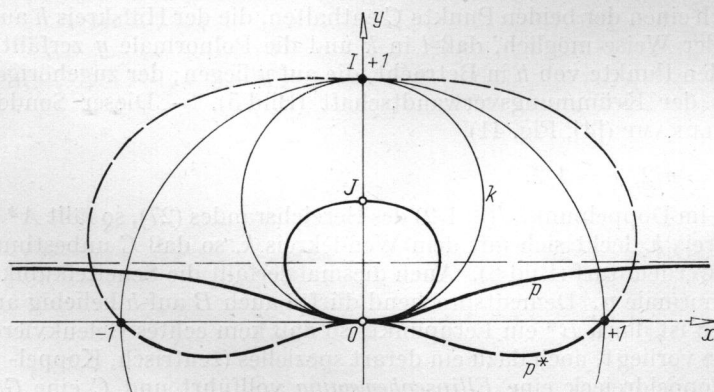


Bild 7



handelt es sich um eine *bizirkulare Kurve 5. Ordnung* mit der Asymptote  $y = 1/4$  und einer Selbstoskulation im Ursprung  $O$  (Bild 7). Zur Konstruktion bedient man sich am besten der Parameterdarstellung

$$(44) \quad r = u \sin \varphi, \quad \sin^2 \varphi = \frac{(1 - u)^2}{u(2 - 5u + 4u^2)}.$$

Drückt man hingegen  $m$  und  $n$  in (41) gemäß (8) durch  $r^*$  und  $\varphi$  aus, so erhält man die  $p$  in der Krümmungsverwandtschaft entsprechende *Ortslinie*  $p^*$  für  $A^*$  mit der Polargleichung

$$(45) \quad r^{*3} - r^{*2} \sin \varphi - r^*(1 - 2 \sin^2 \varphi) - \sin \varphi = 0$$

und der kartesischen Gleichung

$$(46) \quad (x^{*2} + y^{*2})^2 - (x^{*2} + y^{*2})y^* - (x^{*2} + y^{*2}) - y^* = 0.$$

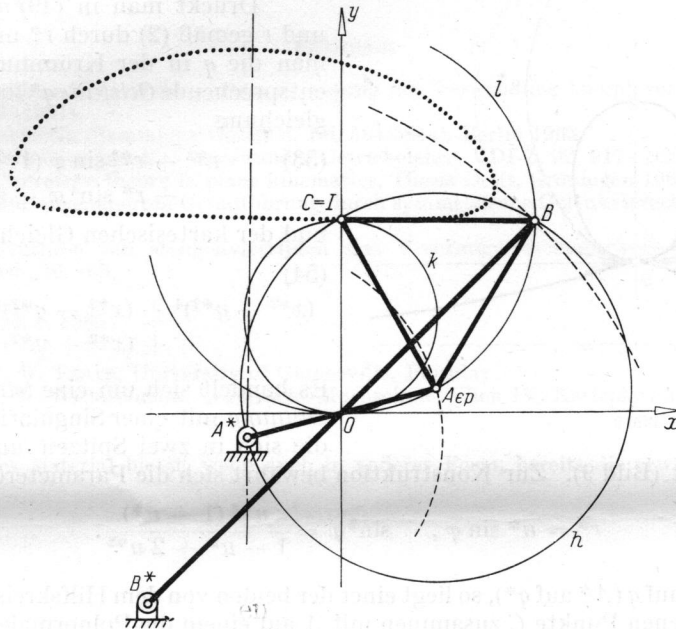


Bild 8

Es handelt sich um eine *bizirkulare Kurve 4. Ordnung* mit einem Flachpunkt im Wendepol  $I = C$  (Bild 7), bequem erfaßbar durch die Parameterdarstellung

$$(47) \quad r^* = u^* \sin \varphi, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 + u^*}{u(2 - u^* + u^{*2})}.$$

Wählt man  $A$  auf  $p$  ( $A^*$  auf  $p^*$ ), so geht der Hilfskreis  $h$  durch den Wendepol  $I = C$ . Für  $B$  kommen dann jene Punkte von  $h$  in Frage, die entweder auf dem die Poltangente  $x$  in  $O$  berührenden Kreis  $l$  durch  $A$  oder auf der Polnormale  $y$  liegen. Im ersten Fall erweist sich die Koppel  $AB$  als parallel zum Steg  $A^*B^*$  (Bild 8), und es liegt offenbar ein weiterer von G. R. VELDKAMP ([4], Fig. 46) betrachteter Spezialfall vor. Das Punktepaar  $B$  fällt allerdings nur dann reell aus, wenn  $A$  auf dem gestreckten, durch  $0 < u < 1$  gekennzeichneten Teil von  $p$  angenommen wird;  $A^*$  ist dann an den entsprechenden, durch  $u^* < -1$  abgegrenzten Abschnitt von  $p^*$  unterhalb der Poltangente gebunden. Die betreffenden Bögen wurden in Bild 7 stärker hervorgehoben.

6. Sonderfall:  $\beta = 0$ .

Auch wenn die Mittelpunktsordinate  $\beta$  der Hyperbel  $\bar{l}$  (6) verschwindet, zerfällt diese in ein Geradenpaar ( $\bar{x} = \alpha, \bar{y} = 0$ ); entsprechend zerfällt die Scheitelkubik  $l$  (3) in den Kreis  $\alpha r = \cos \varphi$  und die Poltangente  $x$ . Unter diesen Umständen ist das Gelenkviereck wieder mit Lineal und Zirkel zu ermitteln.

Die aus (14) fließende Bedingung

$$(48) \quad r c = \cos \varphi$$

führt über (11) zunächst auf

$$(49) \quad r^2(n^2 - m^2 + 2m \sin \varphi - 1) + (2rm - 1) \cos^2 \varphi = 0.$$

Drückt man hierin  $m$  und  $n$  gemäß (8) durch  $r$  und  $\varphi$  aus, so gelangt man zur Polargleichung

$$(50) \quad 4 r^3 \sin \varphi + r^2 (1 - 7 \sin^2 \varphi) + 4 r \sin^3 \varphi - \sin^4 \varphi = 0$$

einer gewissen Ortslinie  $q$  für  $A$ . Aus der kartesischen Gleichung

$$(51) \quad 4 y (x^2 + y^2)^3 + (x^2 - 6 y^2) (x^2 + y^2)^2 + 4 y^3 (x^2 + y^2) - y^4 = 0$$

ist zu ersehen, daß es sich um eine *trizirkulare Kurve 7. Ordnung* mit der Asymptote  $y = -1/4$  und einer Doppelspitze im Pol  $O$  handelt (Bild 9). Zur Konstruktion empfiehlt sich die Parameterdarstellung

$$(52) \quad r = u \sin \varphi, \quad \sin^2 \varphi = \frac{u^2}{(1 - u)(1 - 3u + 4u^2)}$$

Drückt man in (49)  $m$  und  $n$  gemäß (8) und  $r$  gemäß (2) durch  $r^*$  und  $\varphi$  aus, so erhält man die  $q$  in der Krümmungsverwandtschaft entsprechende Ortslinie  $q^*$  für  $A^*$  mit der Polargleichung

$$(53) \quad r^{*3} + r^{*2} \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) + r^* \sin^4 \varphi - \sin^5 \varphi = 0$$

und der kartesischen Gleichung

$$(54) \quad (x^{*2} + y^{*2})^4 + (x^{*2} + y^{*2})^2 (x^{*2} - y^{*2}) y^* + (x^{*2} + y^{*2}) y^{*4} - y^{*5} = 0$$

Es handelt sich um eine *tetrazirkulare Kurve 8. Ordnung* mit einer Singularität im Ursprung  $O$ , die sich in zwei Spitzen und einen einfachen

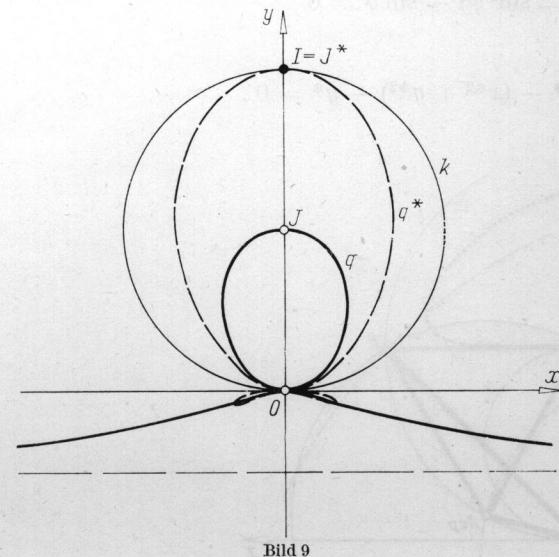


Bild 9

Bogen auflösen läßt (Bild 9). Zur Konstruktion bewährt sich die Parameterdarstellung

$$(55) \quad r^* = u^* \sin \varphi, \quad \sin^2 \varphi = \frac{u^{*2} (1 + u^*)}{1 - u^* + 2 u^{*2}}$$

Wählt man  $A$  auf  $q$  ( $A^*$  auf  $q^*$ ), so liegt einer der beiden von dem Hilfskreis  $h$  aus dem Wendekreis  $k$  ausgeschnittenen Punkte  $C$  zusammen mit  $A$  auf einem die Polnormale  $y$  im Pol  $O$  berührenden Kreis  $l$  (Bild 10). Der Restschnitt von  $h$  und  $l$  ist das zweite Gelenk  $B$  ( $\neq C$ ). Das zugehörige Lager  $B^*$  ergibt sich mittels der Krümmungsverwandtschaft (2). Die Koppelkurve von  $C$  weist die geforderten Qualitäten auf.

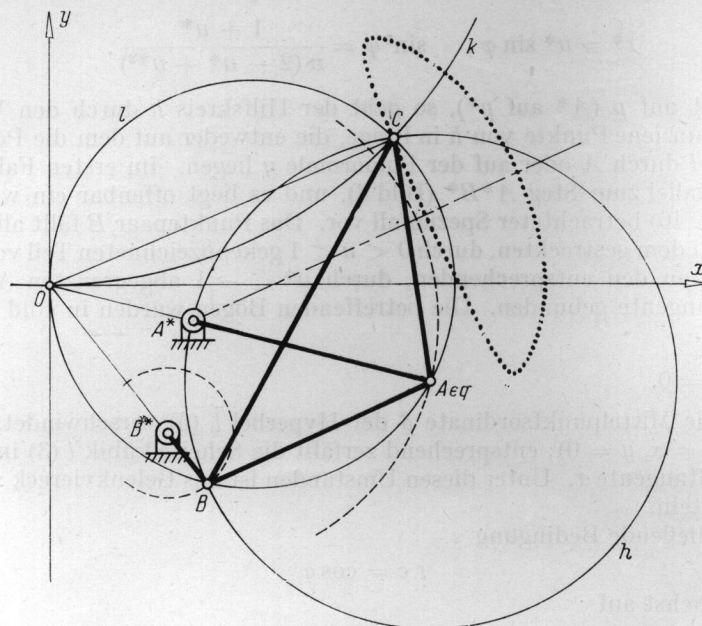


Bild 10



## VII. Schluß

Nach der auseinandergesetzten grundsätzlichen Erledigung des Problems der symmetrischen Koppelkurven mit zwei Flachpunkten bleibt noch der Wunsch nach Hinweisen für eine zweckmäßige Wahl des Ausgangspunktes  $A \in \mathfrak{A}$  oder des entsprechenden Lagerpunktes  $A^* \in \mathfrak{A}^*$  offen. Zu diesem Zweck wäre ein Überblick über die wichtigsten Kenndaten des zugehörigen Gelenkvierecks und der von ihm erzeugten Koppelkurve nötig. Diese allenfalls unter Einsatz elektronischer Rechenautomaten auszuführende Arbeit steht noch bevor. Ihre Ergebnisse könnten — ähnlich wie für die einfachen Geradföhrungen in [5] — graphisch in Form von Kurventafeln innerhalb der Bereiche  $\mathfrak{A}$  oder  $\mathfrak{A}^*$  festgehalten werden, die dann etwa den Winkel der beiden Flachtangenten oder den Winkel des Koppeldreiecks unmittelbar abzulesen erlauben müßten und auch Auskunft darüber zu geben hätten, ob das erzeugende Gelenkviereck einen umlaufenden Antrieb gestattet etc<sup>5</sup>). Ein solcher für den praktischen Einsatz wichtiger Behelf soll noch in Angriff genommen werden.

## Literatur

- 1 R. BEREIS, Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen, Österr. Ingen. Archiv **5**, 246—266 (1951).
- 2 H. R. MÜLLER, Kinematik (Sammlung Göschen, Bd. 584/584a), Berlin 1963.
- 3 K. RAUH, Bearbeitungsmaschinen — angewandte Getriebelehre, VDI-Z. **92**, 917—922 (1950).
- 4 G. R. VELDKAMP, Curvature theory in plane kinematics, Thesis Delft, Groningen 1963, 153—174.
- 5 W. WUNDERLICH, Zur angenäherten Geradföhrung durch symmetrische Gelenkvierecke, ZAMM **36**, 103—110 (1956).
- 6 E. A. DIJKSMAN, Synthese van stangenvierzijden met V-vormige, symmetrische koppelkrommen, Diss. Eindhoven 1964, insb. 59—68.

Manuskripteingang: 10. 9. 1965

*Anschriften:* Prof. Dr. D. TESAR, University of Gainesville, Florida;  
Prof. Dr. W. WUNDERLICH, Technische Hochschule, Wien IV, Karlsplatz 13

<sup>5</sup>) Einschlägiges Material bietet, wenn auch in anderer Form, bereits die erwähnte Dissertation von E. A. DIJKSMAN [6].