

Über zwei durch Zylinderrollung erzeugbare Modelle der Steinerschen Römerfläche

Von

WALTER WUNDERLICH

Von jener merkwürdigen algebraischen Fläche 4. Ordnung und 3. Klasse, von der J. STEINER als von seiner „Römerfläche“ zu sprechen pflegte [8] (siehe auch [7]), hat erstmals E. E. KUMMER ein Modell vorgelegt [5]. Dieses sehr bekannt gewordene Gipsmodell zeichnet sich durch höchste Symmetrie aus und zeigt alle charakteristischen Eigenheiten der Römerfläche: ihre drei in einem Tripelpunkt zusammenlaufenden Doppelgeraden, die vier ausgezeichneten Kegelschnitte, längs welchen die Fläche von vier Ebenen berührt wird, und die sechs auf den Doppelgeraden befindlichen Zwickpunkte, in welchen einander die vier erwähnten „Plattkegelschnitte“ berühren. Die vier ausgezeichneten Tangentialebenen bilden dabei ein reguläres Tetraeder, die Berührungskegelschnitte sind die Inkreise der dreieckigen Seitenflächen, und die Doppelgeraden sind die Gemeinlote der drei Gegenkantenpaare, also paarweise orthogonal. Die allgemeine Römerfläche ist, von Realitätsunterschieden abgesehen, zu diesem Modell kollinear.

So instruktiv das Kummersche Modell ist, seine geometrische Entstehung ist nicht mit wenigen Worten zu erklären. Unter diesen Umständen mag es erwünscht sein, zwei andere metrisch spezielle Modelle der Römerfläche kennenzulernen, die sich durch eine einfache *kinematische Erzeugung* auszeichnen. Das erste dieser Modelle ist überdies einer bequemen darstellend-geometrischen Behandlung zugänglich, die zahlreiche Fragen in eleganter Weise konstruktiv zu verfolgen gestattet.

Hinsichtlich der Theorie der Steinerschen Fläche sei auf die einschlägigen Enzyklopädieartikel von W. F. MEYER verwiesen [6].

1. Erstes Modell.

Satz I. *Rollt ein Drehzylinder vom Radius 2 um einen eingeschlossenen Drehzylinder vom Radius 1, so überstreicht jede mit ihm starr verbundene koaxiale Parabel eine Steinersche Römerfläche mit einer reellen und zwei konjugiert-imaginären Doppelgeraden.*

Macht man die Achse des ruhenden Zylinders zur z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems, so läßt sich die entstehende „Bewegfläche“ darstellen durch

$$(1.1) \quad x = \cos 2\varphi + r \cos \varphi, \quad y = \sin 2\varphi + r \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2} r^2.$$

Die Parameterlinien $\varphi = \text{const}$ sind die einzelnen Lagen der bewegten *Profilpara-*

bel¹⁾. Die Linien $r = \text{const}$ sind die Bahnen der einzelnen Parabelpunkte, bekanntlich *Pascalschnecken*; bei lotrechter z -Achse bedeuten sie die *Schichtenlinien* der Fläche.

Geht man mit $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$ zu homogenen Koordinaten und gleichzeitig mit

$$(1.2) \quad u = e^{2i\varphi}, \quad v = r \cdot e^{i\varphi}$$

zu neuen Flächenkoordinaten über, so gelangt man zur rationalen Darstellung

$$(1.3) \quad x_0 = 2u, \quad x_1 = u^2 + uv + v + 1, \quad x_2 = -i(u^2 + uv - v - 1), \quad x_3 = v^2.$$

Nachdem die Koordinatenfunktionen quadratische Polynome in u und v sind, so liegt nach K. TH. W. WEIERSTRASS [4], [6] tatsächlich eine *Römerfläche* vor. Die linearen Abhängigkeiten $\alpha u + \beta v + \gamma = 0$ liefern die für die Steinersche Fläche kennzeichnenden ∞^2 *Flächenkegelschnitte*.

Die Elimination von r und φ aus (1.1) führt zur kartesischen Flächengleichung

$$(1.4) \quad (x^2 + y^2 - 1)^2 = 2z(x^2 + y^2 + 2x + 1).$$

Bei der erzeugenden Zylinderrollung — in der technischen Kinematik wohlbekannt als „Umkehrung der Ellipsenbewegung“ — gleitet jede Durchmesserebene des beweglichen Zylinders durch eine feste Erzeugende des ruhenden Zylinders ([1], S. 14 bis 17). Insbesondere gleitet die die Profilparabel tragende Ebene ständig durch die Erzeugende $x = -1, y = 0$. Diese der Fläche angehörende Gerade h , gekennzeichnet durch $r = -2 \cos \varphi$ oder $u + v + 1 = 0$, wird in jedem Punkt von zwei Profilparabeln getroffen und stellt daher eine *reelle Doppelgerade* der Fläche dar. Die beiden restlichen Doppelgeraden i, j liegen im Unendlichen und sind konjugiert-imaginär: Sie fallen in die Ferngeraden der Minimalebenen $x \pm iy = 0$, wie aus (1.4) zu entnehmen ist, und gehören zu $u = 0$ bzw. $u = \infty$.

Der *dreifache Punkt M*, in welchem die Doppelgeraden h, i und j zusammenlaufen, ist mithin der Fernpunkt der z -Achse.

Der Scheitelpunkt $r = 0$ der Profilparabel durchläuft bei der erzeugenden Bewegung den in der xy -Ebene π_1 liegenden Basiskreis c_1 des Rastzylinders $x^2 + y^2 = 1$. Längs dieses Kreises wird die Römerfläche von π_1 berührt; c_1 ist also einer der vier *Plattkegelschnitte*. Ein weiterer liegt in der Ebene

$$(1.5) \quad \pi_2 \dots 4x + z + 4 = 0,$$

welche die Fläche längs der durch $r = -4 \cos \varphi$ oder $2u + v + 2 = 0$ beschriebenen Ellipse c_2 berührt; dieselbe verläuft auf dem zum Rastzylinder kongruenten Drehzylinder $(x + 2)^2 + y^2 = 1$. Die restlichen Plattkegelschnitte c_3 und c_4 befinden sich in den konjugiert-imaginären Ebenen

$$(1.6) \quad \pi_{3,4} \dots 2x \pm 2iy + z = 0$$

und sind gekennzeichnet durch $r = -2e^{i\varphi}$ oder $2u + v = 0$ bzw. $r = -2e^{-i\varphi}$ oder

¹⁾ Die Festsetzung des Parabelparameters mit $p = 1$ ist unwesentlich, da ihm durch proportionale Änderung der z -Abstände jeder beliebige Wert erteilt werden könnte.

$v + 2 = 0$. Beide gehören dem reellen hyperbolischen Zylinder $4xz + z^2 + 4z - 4 = 0$ an²⁾.

Die sechs *Zwickpunkte* (uniplanaren Doppelpunkte) der Fläche sind — in homogenen Koordinaten angeschrieben — die folgenden:

- Auf der reellen Doppelgeraden $h(x_0 + x_1 = x_2 = 0)$ der Punkt $A(1:-1:0:0)$, in welchem einander c_1 und c_2 berühren, und der Punkt $B(1:-1:0:2)$, in welchem einander c_3 und c_4 berühren.
- Auf der imaginären Doppelgeraden $i(x_0 = x_1 + ix_2 = 0)$ der Punkt $I(0:1:i:0)$, in welchem einander c_1 und c_3 berühren, und der Punkt $U(0:1:i:-4)$, in welchem einander c_2 und c_4 berühren.
- Auf der imaginären Doppelgeraden $j(x_0 = x_1 - ix_2 = 0)$ der Punkt $J(0:1:-i:0)$, in welchem einander c_1 und c_4 berühren, und der Punkt $V(0:1:-i:-4)$, in welchem einander c_2 und c_3 berühren.

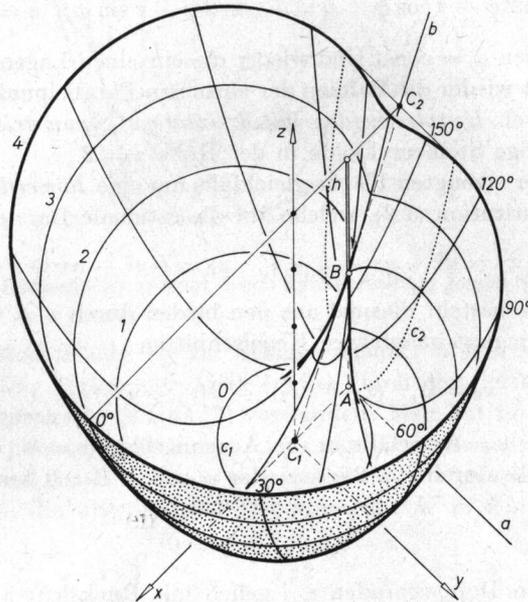


Abb. 1. Römerfläche, erzeugt durch Zylinderrollung gemäß Satz I.

Eine anschauliche Darstellung (Schrägriß auf die xy -Ebene) der Modellfläche bis zur Schichtenhöhe $z = 4$ zeigt Abb. 1. Die besprochene Fläche geht im übrigen durch die Kollineation

$$(1.7) \quad x^* = \frac{2x}{z}, \quad y^* = \frac{2y}{z}, \quad z^* = \frac{2}{z}$$

²⁾ Man gelangt zu diesen Plattkegelschnitten, wenn man bedenkt, daß sie c_1 und c_2 in deren Fernpunkten — als den Treffpunkten mit den Doppelgeraden i und j — berühren müssen. Die beiden Tangentialebenen π_3 und π_4 werden also von je einer Asymptote von c_1 und einer Asymptote von c_2 aufgespannt und enthalten daher beide die Verbindungsgerade des Mittelpunktes $C_1(0, 0, 0)$ von c_1 und des Mittelpunktes $C_2(-2, 0, 4)$ von c_2 .

in jene andere metrisch spezielle Römerfläche Φ_{III} über, welche der Verfasser vor einiger Zeit als Beispiel einer Fläche mit ebenen Falllinien (nämlich Parabeln) angegeben hat ([12] (Abb. 5)). Jene Fläche, die gleichfalls Pascalschnecken zu Schichtenlinien hat, gab auf Grund dieser Eigenschaft den Anstoß zur Entdeckung des vorliegenden Modells.

2. Zweites Modell.

Satz II. *Rollt ein Drehzylinder vom Radius 2 in einem Drehzylinder vom Radius 3, so überstreicht jede mit ihm starr verbundene koaxiale Parabel eine Steinersche Römerfläche mit drei reellen Doppelgeraden.*

Die analytische Darstellung der Fläche unterscheidet sich von (1.1) lediglich durch einen Vorzeichenwechsel in der zweiten Gleichung:

$$(2.1) \quad x = \cos 2\varphi + r \cos \varphi, \quad y = -\sin 2\varphi + r \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2} r^2.$$

Die Parameterlinien $\varphi = \text{const}$ sind wieder die einzelnen Lagen der *Profilparabel*, die Linien $r = \text{const}$ wieder die Bahnen der einzelnen Parabelpunkte oder *Schichtenlinien*, diesmal jedoch *Hypotrochoiden mit dreizähliger Symmetrie*, unter ihnen für $r = 2$ eine dreispitzige Steinerzykloide in der Höhe $z = 2$.

Daß es sich bei der erzeugten Fläche gleichfalls um eine *Römerfläche* handelt, folgt wieder aus der Substitution (1.2), welche auf die rationale Darstellung

$$(2.2) \quad x_0 = 2u, \quad x_1 = u^2 + uv + v + 1, \quad x_2 = i(u^2 - uv + v - 1), \quad x_3 = v^2$$

führt. Die *Fernkurve* besteht diesmal aus den beiden durch $u = 0$ bzw. $u = \infty$ gekennzeichneten konjugiert-imaginären Kegelschnitten

$$(2.3) \quad x_0 = 0, \quad (x_1 \mp ix_2)^2 = 2(x_1 \pm ix_2)x_3.$$

Der Hauptschnitt $y = 0$ zerfällt in die Ausgangslage $\varphi = 0$ ($u = 1$) der Profilparabel und die reelle, durch $r = 2 \cos \varphi$ oder $u - v + 1 = 0$ beschriebene *Doppelgerade* h :

$$(2.4) \quad x - 2z + 1 = y = 0.$$

Die beiden restlichen Doppelgeraden i, j gehen mit Rücksicht auf die Symmetrie aus h durch Drehungen um $\pm 120^\circ$ um die z -Achse hervor. Sie werden daher durch $r = 2 \cos(\varphi \mp 120^\circ)$ beschrieben und durch

$$(2.5) \quad 2x + 2z = 1, \quad \pm \sqrt{3} \cdot x + y = 0$$

dargestellt. — Der gemeinsame Punkt von h, i und j ist das *Tripelzentrum* $M(0, 0, 1/2)$.

Der vom Parabelscheitel $r = 0$ beschriebene Kreis c_1 ($x^2 + y^2 = 1$) in der Grundebene $\pi_1(z = 0)$ ist wieder einer der vier *Plattkegelschnitte*. Ein weiterer liegt in der Ebene

$$(2.6) \quad \pi_2 \dots 4x + z + 4 = 0,$$

welche die Fläche längs der durch $r = -4 \cos \varphi$ festgelegten Ellipse c_2 mit dem Grundriß $(x + 2)^2 + (y/3)^2 = 1$ berührt. Die restlichen Plattkegelschnitte c_3, c_4

gehen aus c_2 durch 120° -Drehungen um die z -Achse hervor. Sie werden daher über $r = -4 \cos(\varphi \mp 120^\circ)$ erhalten und liegen in den Ebenen

$$(2.7) \quad \pi_{3,4} \dots - 2x \pm 2y\sqrt{3} + z + 4 = 0.$$

Die sechs *Zwickpunkte* verteilen sich wie folgt: Auf der Doppelgeraden h (2.4) liegen die Punkte $(-1, 0, 0)$ und $(3, 0, 2)$, in welchen einander c_1 und c_2 bzw. c_3 und c_4 berühren. Die übrigen gehen wieder durch 120° -Drehungen daraus hervor.

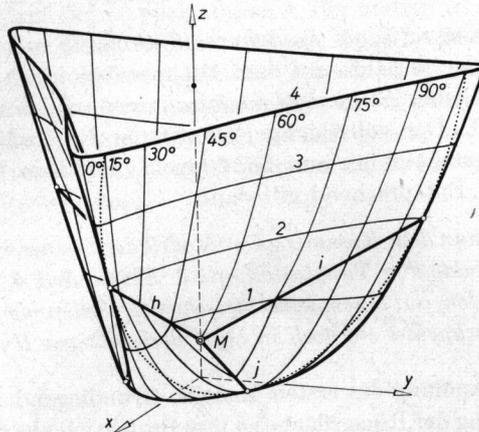


Abb. 2. Römerfläche, erzeugt durch Zylinderrollung gemäß Satz II.

Abb. 2 zeigt die Modellfläche bis zur Schichtenhöhe $z = 4$ in normalaxonomischer Darstellung. Das vorliegende Modell wird durch eine leicht angebbare Kollineation in das *Kummersche Modell* [2] verwandelt. Man hat nur dafür zu sorgen, daß die sechs *Zwickpunkte* in die Ecken eines regulären Oktaeders übergehen, was vor allem bedingt, daß die Ebene $z = -1$ ins Unendliche geworfen wird. Eine geeignete Kollineation, die überdies das Tripelzentrum M in den Ursprung bringt, lautet:

$$(2.8) \quad x^* = \frac{x\sqrt{2}}{z+1}, \quad y^* = \frac{y\sqrt{2}}{z+1}, \quad z^* = \frac{2z-1}{z+1}.$$

Drückt man hierin x, y, z gemäß (2.1) durch r und φ aus, so hat man eine Parameterdarstellung des Kummerschen (tetraedral-symmetrischen) Modells. Hieraus folgt dann der anscheinend noch nicht bemerkte

Satz III. *Das Kummersche Modell der Steinerschen Römerfläche wird von den Ebenen, die zu einer der vier dreizähligen Symmetrieachsen normal sind, nach Hypotrochoiden geschnitten.*

Die Ebene der erzeugenden Parabel ist eine Tangentialebene der Römerfläche (2.1) und hüllt daher den der Fläche vom Fernpunkt der z -Achse aus umschriebenen *Berührungszylinder* Δ ein. Auf Grund der Rollbewegung wird die Basis von Δ eine dreispitzige Hypozykloide sein. Um die Berührungslinie (den wahren Flächenumriß für

die Grundrißprojektion) zu ermitteln, hat man jene Punkte aufzusuchen, deren Schichtentangente (Bahntangente) denselben Richtungswinkel φ hat wie die Grundspur der Tangentialebene. Über die entsprechende Bedingung $x_\varphi : y_\varphi = \cos \varphi : \sin \varphi$ findet man zunächst

$$(2.9) \quad r = 2 \cos 3 \varphi,$$

und damit die Parameterdarstellung der *Berührungslinie*:

$$(2.10) \quad x = \cos 4 \varphi + 2 \cos 2 \varphi, \quad y = \sin 4 \varphi - 2 \sin 2 \varphi, \quad z = \cos 6 \varphi + 1.$$

Es handelt sich um eine *rationale Raumkurve 6. Ordnung* mit drei Spitzen in den Zwickpunkten $z = 2$. Sie verläuft auf dem Drehparaboloid $x^2 + y^2 = 4z + 1$ und fällt im Grundriß mit jener *Steinerzykloide* zusammen, die von der Schichtenlinie $z = 2$ ($r = 2$) herrührt. Der vollständige Schnitt der Römerfläche mit ihrem Berührungszylinder Δ besteht daher aus der doppelt zählenden Berührungslinie und der Schichtenzykloide. Entsprechend gilt dann:

Satz IV. *Umschreibt man dem Kummerschen Modell der Steinerschen Römerfläche aus einem der vier Nabelpunkte den Tangentialkegel 3. Klasse und 4. Ordnung, so berührt er sie längs einer rationalen, auf einem konzentrischen Drehellipsoid verlaufenden Raumkurve 6. Ordnung und schneidet sie noch in einer dreispitzigen Hypozykloide³⁾.*

3. Konstruktive Behandlung des ersten Modells. Grundlegend für die darstellend-geometrische Behandlung der Römerfläche ist ihre Projektion aus dem Tripelpunkt M , die eine eindeutige Abbildung der Fläche auf die Zeichenebene vermittelt. Beim ersten Modell (1.1) ist M der Fernpunkt der z -Achse, so daß die Abbildung als *Grundrißprojektion* $P \rightarrow P'$ angesprochen werden kann. Als Bildebene mag dabei die xy -Ebene π_1 dienen.

Die drei in M zusammenlaufenden *Doppelgeraden* h, i und j sind Sehstrahlen und bilden sich der Reihe nach auf den Zwickpunkt $A = h'$ und die absoluten Punkte $I = i'$ und $J = j'$ von π_1 ab.

Die erzeugenden *Parabeln* bilden sich auf die Strahlen des Büschels A ab. Jeder weitere *Flächenkegelschnitt* k trifft die Doppelgeraden h, i und j , erscheint also im Grundriß als *Kreis* k' durch A :

Satz V. *Sämtliche ∞^2 der Römerfläche (1.1) angehörenden Kegelschnitte bilden sich im Grundriß als Kreise oder Gerade durch den Zwickpunkt A ab.*

Beispiele hierfür bieten u. a. der in π_1 gelegene Plattkreis $c_1 = c'_1$ und der in π_2 (1.5) verlaufende zweite Plattkegelschnitt c_2 . Sein Grundriß c'_2 ist zu c'_1 kongruent, weil die Fläche bezüglich der projizierenden Ebene $x = -1$ schief-symmetrisch ist; die Symmetriestrahlen sind parallel zur Zwicktangente b in B , die die Mittelpunkte C_1 und C_2 von c_1 und c_2 verbindet (Richtung $x : y : z = -1 : 0 : 2$, vgl. Abb. 1).

Die *Schlüsselfigur* für alle Konstruktionen stellt Abb. 3 dar. Als gegeben ist das Kreispaar c_1, c_2 anzusehen. Die Tangente a im Berührungspunkt A ist die Schnitt-

³⁾ In dieser Hinsicht sind die Nabelpunkte des Kummerschen Modells ausgezeichnet, denn für die Tangentialkegel aus anderen Flächenpunkten fällt der Restschnitt nicht mehr eben aus.

gerade der ausgezeichneten Tangentialebenen π_1 und π_2 . Sei nun k' der A enthaltende Grundrißkreis einer Flächenellipse k . Diese berührt die Ebenen π_1 und π_2 in den Schnittpunkten 1 und 2 mit c_1 und c_2 . Die Tangenten t_1 und t_2 von k in 1 und 2 sind die in π_1 und π_2 verlaufenden Spuren der Ebene τ von k , müssen einander demnach in einem Punkt T von a treffen. Sie schneiden c_1 und c_2 in zwei weiteren Punkten $\bar{1}$ und $\bar{2}$. Der Kreis \bar{k}' , der t_1 in $\bar{1}$ und t_2 in $\bar{2}$ berührt (und überdies durch A geht), ist der Grundriß des zweiten τ angehörenden Flächenkegelschnittes \bar{k} . Von den beiden eigentlichen Schnittpunkten der (ähnlichen und ähnlich gelegenen) Kegelschnitte k und \bar{k} liegt einer auf der Doppelgeraden h , der andere ist der Berührungspunkt P der Tangentialebene τ . Beachtet man, daß der Kreis k' die Kreise c_1 und c_2 wie in A auch in 1 und 2' unter gleichen Winkeln schneidet, so erkennt man, daß die Geraden t_1 und t_2 von den kongruenten Kreisen c_1 und c_2 gleiche Segmente abschneiden. Die Zentralabstände $C_1 t_1$ und $C_2' t_2'$ sind mithin gleich, und der Winkel $\omega = \sphericalangle t_1 t_2'$ stimmt mit dem Winkel überein, unter welchem die Kreise c_1, c_2 und die Strecke $C_1 C_2'$ aus dem Punkt T erscheinen.

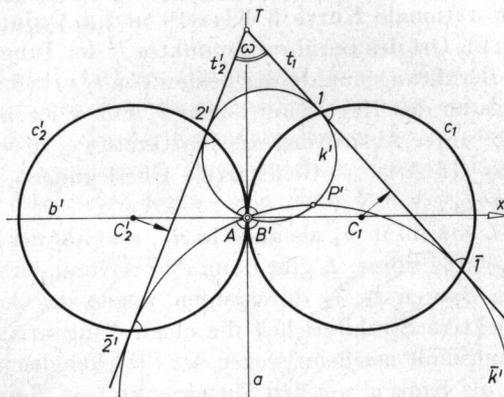


Abb. 3. Grundriß eines Tangentialschnitts der Römerfläche von Abb. 1 oder 5.

Um umgekehrt für einen durch seinen Grundriß P' gegebenen Flächenpunkt P die Tangentialebene τ zu finden, spiegle man den Punkt C_2' an der Symmetrale von AP' . Die Spur t_1 von τ ergibt sich dann als Symmetrale zwischen diesem Spiegelpunkt und C_1 ; die zweite Spur t_2 läßt sich gemäß Abb. 3 leicht ergänzen⁴⁾.

Eine für manche Zwecke wichtige Aufgabe besteht darin, die zu einer gegebenen Ebene ε parallelen Tangentialebenen der Römerfläche zu konstruieren. Mit den Spuren $e_1 = \varepsilon \pi_1$ und $e_2 = \varepsilon \pi_2$ sind die Richtungen von t_1 und t_2 und damit der Winkel $\omega = \sphericalangle t_1 t_2'$ bekannt. Der durch C_1 und C_2' gelegte Hilfskreis, der zur Sehne $C_1 C_2'$ (mit Beachtung der Orientierung) den Peripheriewinkel ω faßt, schneidet aus der Achse a die beiden möglichen Lagen für den Punkt T aus, durch welchen die gesuchten Spuren t_1 und t_2 in den bekannten Richtungen gehen. Die Aufgabe besitzt mithin zwei eigentliche Lösungen, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß von

⁴⁾ Die Spuren t_1 und t_2 entsprechen einander in einer birationalen kubischen Strahlverwandtschaft.

den drei Tangentialebenen, die aus der Ferngerade von ε an die Fläche 3. Klasse gehen, die Fernebene von vornherein bekannt ist.

Die besprochene Aufgabe ist beispielsweise auszuführen, wenn es darum geht, den *Umriss der Römerfläche für Parallelprojektion* zu ermitteln, wie er etwa in Abb. 1 benötigt wurde: Man legt durch einen festen Projektionsstrahl l verschiedene Hilfsebenen ε und sucht die zu ε parallelen Tangentialebenen τ auf. Der gemäß Abb. 3 zu bestimmende Berührungspunkt P einer solchen Tangentialebene τ ist dann ein Umrisspunkt, und vier zusätzliche ergeben sich noch, wenn man an die beiden Flächenkegelschnitte k und \bar{k} in τ die zu l parallelen Tangenten legt. — Die so konstruierte Umrisslinie (oder Eigenschattengrenze für die Lichtrichtung l) ist im allgemeinen eine *Raumkurve 6. Ordnung*, die den Fernpunkt M enthält und daher im Grundriß als Kurve 5. Ordnung (mit einem dreifachen Punkt in A) erscheint.

Auch für ein *Projektionszentrum* L_1 in π_1 läßt sich der Umriss der Fläche einfach bestimmen. Man lasse die Spur t_1 das Büschel L_1 durchlaufen und füge jeweils die zweite Spur t_2 gemäß Abb. 3 hinzu. Diese hüllt die Spur des Tangentialkegels aus L_1 ein, und zwar eine rationale Kurve 3. Klasse⁴) und 4. Ordnung. Die zugehörige *Umrisslinie* ergibt sich als Ort des Berührungspunktes P der Tangentialebene $\tau = t_1 t_2$ und enthält auch die Berührungspunkte der beiden von t_1 verschiedenen Tangenten, die man aus L_1 jeweils an das Kegelschnittspaar k, \bar{k} in τ legen kann. Die Umrisslinie reduziert sich hier unter Abspaltung des Plattenkreises c_1 in π_1 auf eine rationale *Raumkurve 4. Ordnung* (II. Art). — Gleichartige Überlegungen gelten für ein Projektionszentrum L_2 in π_2 .

Liegt das *Zentrum* L sowohl in π_1 als auch in π_2 , also *auf der Zwicktangente* a , so vereinfachen sich die Verhältnisse. L gibt dann den unveränderlichen Achsenpunkt $T = t_1 t_2$ ab, und die Spuren t_1, t_2 durchlaufen wegen des konstanten Winkels $\sphericalangle t_1 t_2 = \omega$ zwei projektive Strahlbüschel, die einen Tangentialkegel 2. Klasse erzeugen. Seine Berührungslinie erscheint wegen der Streckengleichheit $TP' = TA = \text{const}$ im Grundriß als Kreis q' um den Mittelpunkt $L = T$ und ist demnach ein *Kegelschnitt* q , der das *Zwickelement* (B, b) enthält.

Hat man umgekehrt ein *Zentrum* L *auf der Zwicktangente* $b = C_1 C_2$, so gelangt man zu einem *Umrisskegelschnitt* p durch das *Zwickelement* (A, a) . Legt man nämlich durch b eine Hilfsebene ε , so schneidet sie die Römerfläche nach zwei Kegelschnitten q , die sich auf Kreise durch das Linienelement $(B', b') = (A, x)$ abbilden, und die Berührungspunkte der aus L' an die Kreise q' gezogenen Tangenten liegen auf einem Kreis p' um den Mittelpunkt L' .

Mit Hilfe der ∞^1 Flächenkegelschnitte p und der längs ihnen der Fläche anschreibbaren Kegel 2. Grades, die ihre Spitzen auf der Zwicktangente b haben, läßt sich offenbar eine *Umrisskonstruktion für beliebiges Zentrum* durchführen. Gleiche Dienste leisten natürlich auch die ∞^1 Kegelschnitte q .

Die beiden Kegelschnittssysteme p und q bilden offensichtlich ein *konjugiertes Netz* auf der Römerfläche. Im Grundriß bildet es sich auf ein aus den beiden parabolischen Kreisbüscheln p' und q' bestehendes *Orthogonalnetz* ab. Führt man nun im Raum die auf das uneigentliche Geradenpaar i, j als absolutes Gebilde gegründete „*isotrope Metrik*“ mit dem Bogenelement $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ein, die K. STRUBECKER [9], [10] weitgehend ausgebaut hat, so ist das im Sinne dieser Metrik orthogonal-konjugierte

Kurvennetz p, q als das System der *Krümmungslinien* der Fläche anzusehen, welches durchwegs aus „*Kreisen*“ des isotropen Raumes besteht.

Dieser Gedanke läßt sich noch weiter verfolgen. Durch zwei benachbarte Kegelschnitte p, p_1 läßt sich ein Drehparaboloid mit z -paralleler Achse legen; rückt dann p_1 auf der Fläche gegen p , so gelangt man zu einem *Drehparaboloid II*, welches die Römerfläche längs p berührt. Die ∞^1 Paraboloiden *II* enthalten das absolute Gebilde i, j als gemeinsames, uneigentliches Erzeugendenpaar; sie sind mithin als „*Kugeln*“ des isotropen Raumes aufzufassen, und demzufolge die von ihnen eingehüllte Römerfläche als „*Kanalfläche*“. In gleicher Weise ist die Fläche aber auch die Einhüllende einer zweiten Schar von „*Kugeln*“ Θ , die sie längs der „*Kreise*“ q berühren. Als *doppelte Kanalfläche* stellt daher die betrachtete Römerfläche in gewisser Hinsicht ein Analogon der *Dupinschen Zyklide* des euklidischen Raumes dar, allerdings einer dort nicht existierenden Sonderform mit paarweise (in A und B) zusammengedrängten Knotenpunkten. Auch in anderer Hinsicht ist die Fläche ungewöhnlich, insofern als sie ∞^2 „*Kreise*“ trägt, wofür es kein euklidisches Seitenstück gibt. Zusammenfassend gilt:

Satz VI. *Das Modell (1.1) der Steinerschen Römerfläche ist auf doppelte Weise als Kanalfläche des isotropen Raumes aufzufassen. Es trägt ∞^2 Kreise im Sinne der isotropen Metrik, darunter die die Krümmungslinien darstellenden Charakteristiken der beiden erzeugenden Kugelscharen. Diese das Zwickellement (A, a) bzw. (B, b) enthaltenden Kreise werden beschrieben durch $r = c \cdot \cos \varphi$ bzw. $r = c \sin \varphi - 2 \cos \varphi$.*

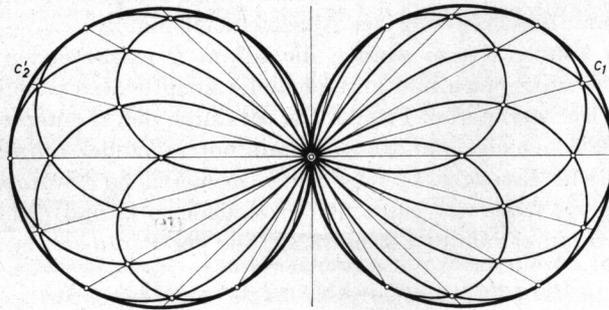


Abb. 4. Grundriß des Schmiegliniennetzes der Römerfläche von Abb. 1 oder 5.

Ohne Beweis sei mitgeteilt: Die *Schmieglinien* (Asymptotenlinien) der Römerfläche (1.1) — bekanntlich Raumkurven 4. Ordnung II. Art — bilden sich im Grundriß auf eine *Ähnlichkeitsschar von Bernoullischen Lemniskaten* ab (Abb. 4). Nach Übergang zu Polarkoordinaten $\varphi, R = r + 2 \cos \varphi$ (Ursprung A) werden sie beschrieben durch

$$(3.1) \quad R = 2 \sqrt{\cos 2\alpha \cdot \cos 2(\varphi - \alpha)} \quad \text{mit} \quad \alpha = \text{const.}$$

Nebenbei bemerkt bildet das System der Schmieglinien zusammen mit der Parabelschar $\varphi = \text{const}$ ein *Dreiecksnetz* oder *Sechseckgewebe* im Sinne von W. BLASCHKE (Abb. 4).

Auf weitere Konstruktionen, wie etwa die Ermittlung der ebenen Schnitte der Römerfläche, soll hier nicht mehr eingegangen werden⁵⁾. Betont sei jedoch, daß das darstellend-geometrische Konzept unverändert auch für alle zu (1.1) *affinen Flächen* gültig bleibt, sofern diese dieselben isotropen Doppelgeraden i und j enthalten. Unter Umständen ist vielleicht ein *doppelt-symmetrisches Modell* erwünscht. Man erhält ein solches mittels der Affinität

$$(3.2) \quad x^* = x + 1, \quad y^* = y, \quad z^* = \frac{1}{2}z + x + 1,$$

welche die schiefe Symmetrie des Modells (1.1) bezüglich der Ebene $x = -1$ in eine orthogonale Symmetrie verwandelt. Das neue Modell (Abb. 5) hat dann anstelle von (1.4) die kartesische Gleichung

$$(3.3) \quad (x^{*2} + y^{*2})^2 - 4z^*(x^{*2} + y^{*2}) + 4x^{*2} = 0.$$

Die beiden Plattkegelschnitte liegen jetzt in den Ebenen $z^* = \pm x^*$.

4. Weitere kinematisch erzeugbare Modelle von Römerflächen. Die beiden Modelle (1.1) und (2.1) der Steinerschen Römerfläche sind nur Einzelfälle einschlägiger *Bewegflächen*, unter welchen sie durch die besondere Einfachheit ihrer kinematischen Erzeugung hervorstechen. Bestehende Möglichkeiten der Verallgemeinerung sollen kurz angedeutet werden.

Geht man von einem beliebigen elliptischen Flächenpunkt Q einer Römerfläche aus und macht man das Paar der dort vorhandenen konjugiert-imaginären *Schmieg-tangenten* (Haupttangente) durch eine Kollineation zu *Tangenten des absoluten Kegelschnitts* — die ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit $x_0 = x_1 \pm ix_2 = 0$ angenommen werden können —, so werden die ∞^3 in Q existierenden oskulierenden Quadriken zu achsenparallelen und untereinander kongruenten oskulierenden Drehparaboloiden der transformierten Fläche. Die ∞^1 durch den Q entsprechenden Fernpunkt gehenden Flächenkegelschnitte sind dann untereinander *kongruente Parabeln*, die eine kinematische Erzeugbarkeit der neuen Römerfläche gewährleisten.

In diese Kategorie fallen die betrachteten Modelle (1.1) und (2.1). Ein weiteres Beispiel ist die vorhin erwähnte Fläche (3.3). Aus der Parameterdarstellung

$$(4.1) \quad x^* = r \cos \varphi, \quad y^* = r \sin \varphi, \quad z^* = \frac{1}{4}r^2 + \cos^2 \varphi$$

ist abzulesen, daß alle Meridianparabeln $\varphi = \text{const}$ den gleichen Parameter $p = 2$ haben. Die in Abb. 5 dargestellte Fläche entsteht offenbar, wenn man eine zur z -Achse symmetrische Parabel einem „*harmonischen Umschwung*“ mit der Schwingfrequenz 2 unterwirft, d. h. einer räumlichen Bewegung, die sich aus einer gleichförmigen Drehung um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit 1 und einer Sinusschwingung längs der z -Achse mit der Frequenz 2 zusammensetzt [2], [3]⁶⁾. Die Bahnkurven sind unter-

⁵⁾ Die ebenen Schnitte lassen sich mit Benützung der Flächenkegelschnitte oder auch der eingeschriebenen Drehparaboloide unschwer konstruieren. Sie erscheinen im Grundriß als bizirkulare Quartiken mit einem Doppelpunkt in A .

⁶⁾ Ersetzt man die erzeugende Parabel durch ihre Scheiteltangente, so entsteht ein *Plücker-konoid*, das den in Abb. 5 erkennbaren Charakter der Römerfläche in der Umgebung ihrer reellen Doppelgerade bestimmt.

einander affine Raumkurven 4. Ordnung mit einem gemeinsamen Doppelpunkt im Fernpunkt der z -Achse. Es gilt mithin:

Satz VII. *Wird eine Parabel einem harmonischen Umschwung mit der Frequenz 2 um ihre Achse unterworfen, so erzeugt sie eine doppelt-symmetrische Römerfläche mit einer reellen und zwei konjugiert-imaginären Doppelgeraden.*

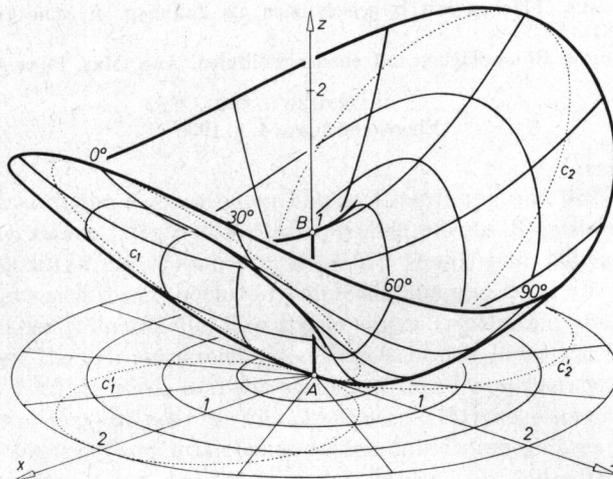


Abb. 5. Römerfläche, erzeugt durch harmonischen Umschwung gemäß Satz VII.

Eine andere Möglichkeit besteht ferner darin, durch eine Kollineation einen der *Plattkegelschnitte* der Römerfläche in die *Fernebene* zu werfen. Dann sind sämtliche ∞^2 Flächenkegelschnitte *Parabeln*, und unter diesen werden je ∞^1 kongruent sein. Dementsprechend ist eine solche Römerfläche sogar *auf* ∞^1 Arten durch *Bewegung einer Parabel* zu erzeugen. Beispiele hierfür bieten die in [11], [12] vorgeführten Römerflächen mit ebenen Fallinien, unter ihnen die durch die Kollineation (1.7) aus dem Modell (1.1) entstehende. — Die *Grenzformen* der Römerfläche (mit zusammengerückten Doppelgeraden) bedürfen dabei einer eigenen Behandlung.

Literaturverzeichnis

- [1] W. BLASCHKE und H. R. MÜLLER, Ebene Kinematik. München 1956.
- [2] W. KAUTNY, Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. **60**, 66–82 (1956).
- [3] W. KAUTNY, Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. **63**, 169–188 (1959).
- [4] E. E. KUMMER, Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Scharen von Kegelschnitten liegen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1863**, 324–336 = J. reine angew. Math. **64**, 66–76 (1865).
- [5] E. E. KUMMER, Gipsmodell der Steinerschen Fläche. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1863**, 539.
- [6] W. F. MEYER, Spezielle algebraische Flächen. Enzykl. Math. Wiss. III C 10, 1483–1490 und 1647–1660.

- [7] H. SCHRÖTER, Über die Steinersche Fläche vierten Grades. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1863**, 520–538 = J. reine angew. Math. **64**, 79–94 (1865).
- [8] J. STEINER, Zwei spezielle Flächen vierter Ordnung (Nach mündlichen Mitteilungen Steiners). Ges. Werke II, S. 723–724. Berlin 1882.
- [9] K. STRUBECKER, Beiträge zur Geometrie des isotropen Raums. J. reine angew. Math. **178**, 135–173 (1938).
- [10] K. STRUBECKER, Differentialgeometrie des isotropen Raumes, III (Flächentheorie). Math. Z. **48**, 369–427 (1942).
- [11] W. WUNDERLICH, Flächen mit Kegelschnitten als Falllinien. J. reine angew. Math. **208**, 204–220 (1961).
- [12] W. WUNDERLICH, Römerflächen mit ebenen Falllinien. Ann. Mat. Pura Appl. **57**, 97–108 (1962).

Eingegangen am 4. 4. 1966

Anschrift des Autors:
W. Wunderlich
Technische Hochschule
1040 Wien IV
Karlsplatz 13
Österreich