

Kubische Strahlflächen, die sich durch Bewegung einer starren Parabel erzeugen lassen

Von
Walter Wunderlich, Wien

Josef Krames zum 70. Geburtstag am 7. 10. 1967

Mit 4 Textabbildungen

(Eingegangen am 4. April 1966)

Die ebenen Tangentialbedingte einer kubischen Strahlfläche \mathcal{S} ist ein kubischer Komplex \mathcal{K} der Ordnung 3. Dieser Komplex \mathcal{K} ist ein spezieller Fall eines kubischen Komplexes \mathcal{K} der Ordnung 3, der durch die Bewegung einer starren Parabel erzeugt wird. Die ebenen Tangentialbedingte einer kubischen Strahlfläche \mathcal{S} ist ein kubischer Komplex \mathcal{K} der Ordnung 3. Dieser Komplex \mathcal{K} ist ein spezieller Fall eines kubischen Komplexes \mathcal{K} der Ordnung 3, der durch die Bewegung einer starren Parabel erzeugt wird.

In der vorliegenden Note soll nun eine weitere, wesentliche Eigenschaft dieser kubischen Strahlflächen \mathcal{S} untersucht werden. Es wird gezeigt, dass diese Flächen \mathcal{S} die Eigenschaft besitzen, dass jede Gerade g , die eine dieser Flächen \mathcal{S} in drei Punkten schneidet, die Tangentialgeraden t_1, t_2, t_3 in diesen Punkten tangential ist. Diese Eigenschaft ist eine charakteristische Eigenschaft dieser kubischen Strahlflächen \mathcal{S} .

Die ebenen Tangentialbedingte einer kubischen Strahlfläche \mathcal{S} ist ein kubischer Komplex \mathcal{K} der Ordnung 3. Dieser Komplex \mathcal{K} ist ein spezieller Fall eines kubischen Komplexes \mathcal{K} der Ordnung 3, der durch die Bewegung einer starren Parabel erzeugt wird.



bekanntlich jeweils in eine Erzeugende l und einen Kegelschnitt k , der nur ausnahmsweise ausartet. Die Fläche Φ enthält mithin ∞^2 nicht ausgeartete Kegelschnitte k . Unter den ∞^1 Erzeugenden l gibt es zwei singuläre („Torsallinien“), längs welchen die Fläche von je einer Ebene („Torsalebene“) berührt wird [9]. Die Flächenkegelschnitte berühren diese Torsalebene in Punkten der zugehörigen Torsallinien. Sorgt man nun etwa durch eine geeignete Kollineation dafür, daß eine *Torsalebene* mit der *Fernebene* zusammenfällt, so treten als Flächenkegelschnitte k durchwegs *Parabeln* auf, und unter diesen ∞^2 Parabeln werden je ∞^1 denselben Parameter p haben, also *kongruent* sein. Damit ist aber die Erzeugung der Fläche Φ als *Bewegfläche auf ∞^1 Arten* gewährleistet. Die genannten Erzeugungen sind natürlich auch bei reell vorausgesetzten Flächen nur dann reell ausführbar, wenn die Torsalelemente reell sind. Sie sollen hier für zwei typische Normalformen näher untersucht werden.

Damit wird einerseits ein Beitrag zu der vom Jubilar so sehr geförderten Theorie der kubischen Strahlflächen geleistet [9], andererseits werden dadurch neue Beispiele für die noch wenig erforschten „mehrfachen Bewegflächen“ beigezeichnet. Eine geschlossene Theorie derselben, wie sie etwa für die mehrfachen Schiebflächen von S. Lie [7] entwickelt worden ist, liegt derzeit nicht vor, doch sind verschiedene Teilergebnisse bekannt; so für die Schraubenschiebflächen von E. Müller [8], für spezielle Bewegflächen von G. Koenigs [5], B. Gambier [4] und L. Ballif [1], für Quadriken von H. Brauner [2], und für Römerflächen (als deren Ausartung die kubischen Strahlflächen angesehen werden können) vom Verfasser [11].

1. Kubische Strahlfläche mit zwei reellen Torsallinien

Betrachtet werde die zum Plücker-Konoid [9] kollineare Fläche Φ mit der kartesischen Gleichung

$$x^2 z = y^2. \quad (1.1)$$

Die Fläche ist ein *aufrechtes Konoid* mit der Achse z und hat ihre Torsalebene in der xy -Ebene und der Fernebene, die sie längs der x -Achse bzw. der Ferngerade der yz -Ebene berührt. Φ gestattet nach dem Muster der von K. Weierstraß für die Steinersche Römerfläche eingeführten Darstellung die quadratische Parameterdarstellung

$$\Phi \dots x = u, \quad y = uv, \quad z = v^2. \quad (1.2)$$

Kubische Strahlflächen, die sich durch Bewegung einer starren Parabel erzeugen lassen

Von

Walter Wunderlich, Wien

Josef Krames zum 70. Geburtstag am 7. 10. 1967

Mit 4 Textabbildungen

(Eingegangen am 4. April 1966)

Jede *Strahlfläche (Regelfläche)* läßt sich naturgemäß auf unendlich viele Arten durch Bewegung einer Geraden erzeugen. Ist die Fläche im besonderen ein *aufrechtes Konoid*, d. h. treffen ihre geradlinigen Erzeugenden eine feste Achse unter rechtem Winkel, so gestattet sie überdies nach L. Burmester [3] eine weitere kinematische Erzeugung durch Zylinderrollung: Rollt nämlich ein Drehzylinder in einem doppelt so großen, so bewegt sich jeder Oberflächenpunkt auf einem Parallelkreisdurchmesser des ruhenden Zylinders; demgemäß überstreicht jede Oberflächenkurve des Rollzylinders ein aufrechtes Konoid, dessen Achse mit jener des Rastzylinders zusammenfällt, und jedes aufrechte Konoid läßt sich auf diese Weise gewinnen. Insbesondere entsteht etwa das Plücker-Konoid aus einer Ellipse des Rollzylinders, oder die Schraubwendelfläche aus einer Schraublinie. Ferner ist bekannt, daß sich die *Wendelfläche* auch durch Verschiebung einer Schraublinie längs einer gleichsinnig-kongruenten erzeugen läßt, und gewisse Normalformen der *Cayleyschen Strahlfläche 3. Grades* können durch Verschiebung einer kubischen Parabel längs einer gleichsinnig-kongruenten erhalten werden, was sich als affiner Grenzfall der vorhergehenden Aussage auffassen läßt [10].

In der vorliegenden Note soll nun auf eine weitere, wesentlich kompliziertere kinematische Erzeugungsmöglichkeit gewisser *Strahlflächen 3. Grades* — darunter wiederum auch der Cayleyschen Fläche — hingewiesen werden, die auf einem an sich einfachen Gedanken beruht. Die ebenen Tangentialschnitte einer kubischen Strahlfläche Φ zerfallen

Deutet man die Veränderlichen u und v als kartesische Koordinaten in einer *Bildebene* ω , so entspricht jedem Bildpunkt $P^*(u, v)$ vermöge (1.2) eindeutig ein bestimmter Flächenpunkt $P(x, y, z)$.

Den Bildgeraden $v = \text{const}$ sind dabei die *Erzeugenden* l von Φ zugeordnet, den übrigen Bildgeraden

$$k^* \dots v = \alpha u + \beta \quad (\alpha \neq 0) \quad (1.3)$$

die ∞^2 *Flächenparabeln*

$$k \dots x = u, \quad y = u(\alpha u + \beta), \quad z = (\alpha u + \beta)^2, \quad (1.4)$$

wobei lediglich die durch $u = \text{const}$ gekennzeichneten ebenen Schnitte $x = \text{const}$ nicht erfaßt werden. Die *Trägerebene* τ von k ist eine *Tangentialebene* der Fläche und hat die Gleichung

$$\tau \dots \alpha \beta x + \alpha y - z + \beta^2 = 0. \quad (1.5)$$

Sie schneidet Φ neben k noch in einer *Erzeugenden* l mit der Bildgeraden

$$l^* \dots v = -\beta. \quad (1.6)$$

Von den beiden Punkten, die k und l gemeinsam haben, liegt einer auf der z -Achse, die die Doppelgerade von Φ ist. Der andere ist der *Berührungspunkt* T von τ ; sein Bildpunkt T^* ergibt sich als Schnitt der Bildgeraden k^* und l^* in

$$T^* \dots u = -\frac{2\beta}{\alpha}, \quad v = -\beta. \quad (1.7)$$

Die *Achse* der Parabel k (1.4) verläuft parallel zur yz -Ebene und hat die Richtung $0 : 1 : \alpha$. Die *Parabelebene* τ (1.5) hat die Normalenrichtung $\alpha \beta : \alpha : -1$, die mit der x -Achse den durch

$$\cos^2 \gamma = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 + 1} \quad (1.8)$$

bestimmten Winkel γ einschließt. Um den *Parameter* p der Parabel k zu ermitteln, betrachte man ihren Aufriß (Normalprojektion auf die yz -Ebene), der den Parameter $p \cos^2 \gamma$ hat. Nach Drehung um den der Achsenrichtung entsprechenden Winkel $\delta = \text{arctg } \alpha$ liest man aus

$$\begin{aligned} y' &= y \cos \delta + z \sin \delta = \alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} \cdot u^2 + \dots, \\ z' &= -y \sin \delta + z \cos \delta = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \cdot u + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

den Aufrißparameter mit

$$p \cos^2 \gamma = \frac{\alpha \beta^2}{2(\alpha^2 + 1)^{3/2}} \quad (1.10)$$

ab, woraus sich über (1.8) der gesuchte Wert

$$p = \frac{\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 + 1}{2 \alpha (\alpha^2 + 1)^{3/2}} \quad (1.11)$$

ergibt.

Die durch $p = \text{const}$ definierte *Schar kongruenter Flächenparabeln* k wird demnach durch

$$\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 + 1 = 2 p \alpha (\alpha^2 + 1)^{3/2} \quad (1.12)$$

beschrieben. Die Schar der zugehörigen Parabelebenen τ (1.5) hüllt eine der Fläche Φ berührend umschriebene *Torse* Θ ein. Deren *Klasse* ergibt sich mit 16, indem

man die Veränderlichen α und β als kartesische Koordinaten in einer Hilfsebene deutet: Die Gleichung (1.12) wird dabei durch eine Kurve 8. Ordnung dargestellt, die Gleichung (1.5) mit festem x, y, z durch eine Hyperbel, was 16 Schnittpunkte liefert, von denen jeder eine durch den gewählten Raumpunkt $P(x, y, z)$ gehende Tangentialebene von Θ repräsentiert.

Die *Berührungslinie* q von Θ mit Φ hat als Ort der Berührungspunkte T gemäß (1.7) und (1.12) in ω die *Bildkurve*

$$q^* \dots u^4(4v^4 + 4v^2 + u^2)^2 = 16 p^2 v^2(4v^2 + u^2)^3. \quad (1.13)$$

Dies ist eine *Kurve 12. Ordnung* mit je einem vierfachen Punkt in den Fernpunkten der u - und v -Achse. Ihr Aussehen ist aus Abb. 1 für zwei Werte von p zu entnehmen.

Um die *Berührungskurve* q selbst zu beurteilen, schneide man sie mit einer beliebigen Tangentialebene τ von Φ . Die n Schnittpunkte

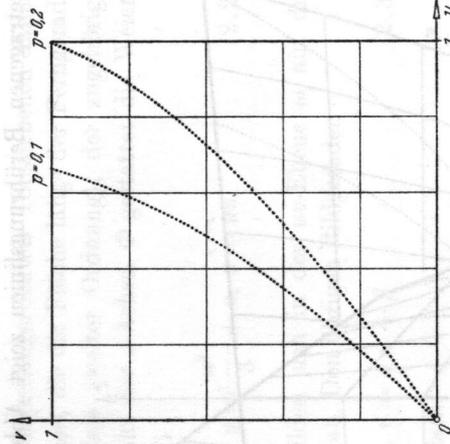


Abb. 1. uv -Bild der kubischen Strahlfläche (1.2)

verteilen sich im Bild auf zwei Gerade, nämlich auf die Bildgerade allgemeiner Lage der τ angehörenden Flächenparabel und auf die zur u -Achse parallele Bildgerade der τ angehörenden Flächen erzeugenden. Dementsprechend ist mit Rücksicht auf den einen vierfachen Punkt von $q^* = 12 + 8 = 20$, und q erweist sich als *Raumkurve 20. Ordnung*. Sie ist wie die Fläche Φ symmetrisch zur xz - und zur yz -Ebene. Ihr *Grundriß* ergibt sich über (1.2) und (1.13) als *Kurve 16. Ordnung*

$$q' \dots x^4(x^6 + 4x^2y^2 + 4y^4)^2 = 16p^2y^2(x^4 + 4z^2)^3. \quad (1.14)$$

Der *Aufriß* ist eine doppelt überdeckte *Kurve 10. Ordnung*

$$q'' \dots y^4(4z^3 + 4z^2 + y^2)^2 = 16p^2z^2(y^2 + 4z^2)^3. \quad (1.15)$$

Der *Kreuzriß* schließlich ist eine doppelt zählende *Kurve 8. Ordnung*

$$q''' \dots x^4(x^2 + 4z^2 + 4z)^2 = 16p^2z(x^2 + 4z)^3. \quad (1.16)$$

Eine anschauliche Darstellung der Fläche mit den in Abb. 1 eingetragenen Berührungslinien zeigt Abb. 2. — Wir fassen zusammen:

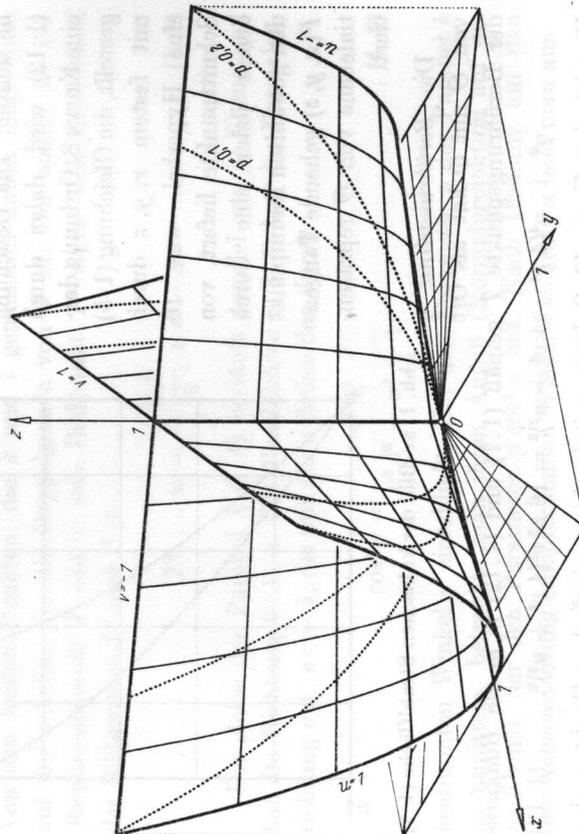


Abb. 2. Axonometrische Darstellung der Fläche (1.2). Das Parameterliniennetz entspricht dem Koordinatennetz in Abb. 1

SATZ 1. Die kubische Strahlfläche (1.1) gestattet auf ∞^3 Arten eine Erzeugung durch Bewegung einer starren Parabel. Deren Ebene hilft

jeweils eine Torse 16. Klasse ein, die der Fläche längs einer Kurve 20. Ordnung berührend umschrieben ist.

Der Wert des Parabelparameters p ist keiner Beschränkung unterworfen. Es darf jedoch nicht übersehen werden, daß jeweils nur eine gewisse Zone der Fläche Φ erfaßt wird. Ihre Grenze erscheint in der Bildebene ω als Einhüllende der durch (1.12) ausgesonderten Geraden k^* (1.3); dies ist eine Kurve 8. Klasse.

2. Kubische Strahlfläche mit vereinigten Torsallinien

Für diese auch als *Cayleysche Fläche* bekannte Strahlfläche Φ sei die in der Dissertation des Verfassers [10] vorgeschlagene und später auch von J. Krames [6] adoptierte Normalform

$$x^3 - 3xy + 3z = 0 \quad (2.1)$$

zugrundegelegt. Die beiden zusammengedrängten Torsalebene fallen hier mit der Fernebene zusammen, die die Fläche längs der Ferngerade der yz -Ebene berührt (Torsallinie zweiter Ordnung); der zugehörige Kuspidualpunkt ist der Fernpunkt der z -Achse. Φ gestattet die Weierstraßsche Parameterdarstellung

$$\Phi \dots x = u, \quad y = \frac{u^2}{3} + v, \quad z = uv. \quad (2.2)$$

Die *Flächenerzeugenden* l bilden sich in der w -Ebene ω auf die v -parallelen Geraden $u = \text{const ab.}$ Den übrigen Bildgeraden

$$k^* \dots v = \alpha u + \beta \quad (2.3)$$

entsprechen die ∞^2 *Flächenparabeln*

$$k \dots x = u, \quad y = \frac{u^2}{3} + \alpha u + \beta, \quad z = u(\alpha u + \beta). \quad (2.4)$$

Sie erscheinen im Grundriß durchwegs als achsenparallele und untereinander kongruente Parabeln mit dem gemeinsamen Parameter $3/2$.

Die *Trügerebene* τ von k ist eine *Tangentialebene* von Φ und hat die Gleichung

$$\tau \dots (3\alpha^2 - \beta)x - 3\alpha y + z + 3\alpha\beta = 0. \quad (2.5)$$

Sie schneidet die Fläche neben k noch in einer *Erzeugenden* l mit der Bildgeraden

$$l^* \dots u = 3 \alpha. \tag{2.6}$$

Der *Berührungspunkt* T von τ hat das durch k^* und l^* bestimmte Bild

$$T^* \dots u = 3 \alpha, v = 3 \alpha^2 + \beta. \tag{2.7}$$

Auf dieselbe Weise wie in Abschnitt 1 findet man mit Benützung des durch

$$\cos^2 \gamma = \frac{(3 \alpha^2 - \beta)^2}{(3 \alpha^2 - \beta)^2 + 9 \alpha^2 + 1} \tag{2.8}$$

festgelegten Neigungswinkels γ der Parabelebene τ (2.5) gegen die Aufrißebene $x = 0$, nachdem man die der Achsenrichtung $0 : 1 : 3 \alpha$ entsprechende Drehung um den Winkel $\delta = \arctg 3 \alpha$

$$y' = y \cos \delta + z \sin \delta = \frac{1}{3} \sqrt{9 \alpha^2 + 1} \cdot u + \dots, \tag{2.9}$$

$$z' = -y \sin \delta + z \cos \delta = \frac{\beta - 3 \alpha^2}{\sqrt{9 \alpha^2 + 1}} \cdot u + \dots \tag{2.10}$$

vorgenommen hat, über den Aufrißparameter

$$p \cos^2 \gamma = \frac{3(3 \alpha^2 - \beta)^2}{2(9 \alpha^2 + 1)^{3/2}} \tag{2.11}$$

den Parameter p der Flächenparabel k mit

$$p = \frac{3}{2} \cdot \frac{(3 \alpha^2 - \beta)^2 + 9 \alpha^2 + 1}{(9 \alpha^2 + 1)^{3/2}}. \tag{2.12}$$

Die durch $p = \text{const}$ definierte Schar kongruenter Flächenparabeln k wird demnach durch

$$(3 \alpha^2 - \beta)^2 + 9 \alpha^2 + 1 = \frac{2p}{3} (9 \alpha^2 + 1)^{3/2} \tag{2.13}$$

beschrieben. Die Schar der zugehörigen Parabelebenen τ (2.5) hüllt eine der Fläche Φ berührend umschriebene *Torse* Θ ein. Deren Klasse ergibt sich mit 12, wenn man wieder die Verhältnisse in der $\alpha\beta$ -Ebene betrachtet: Die Relation (2.5) mit festen x, y, z stellt sich als Hyperbel dar, die jedoch den im Fernpunkt der β -Achse vorhandenen vierfachen Punkt der durch (2.12) erklärten Kurve 8. Ordnung enthält.

Die *Berührungslinie* q von Θ mit Φ hat als Ort der Berührungspunkte T gemäß (2.7) und (2.12) in ω die *Bildkurve*

$$q^* \dots [(2 u^2 - 3 v)^2 + 9 u^2 + 9 v^2 = 36 p^2 (u^2 + 1)^3. \tag{2.13}$$

Dies ist eine *Kurve 8. Ordnung* mit einem vierfachen Punkt im Fernpunkt der v -Achse. Ihr Aussehen ist für drei Werte von p aus Abb. 3 zu entnehmen¹.

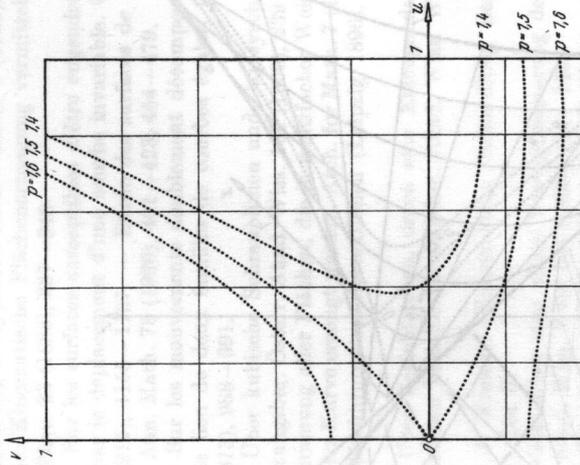


Abb. 3. uv -Bild der Cayleyschen Fläche (2.2)

Die *Berührungslinie* q selbst ist auf Grund ähnlicher Überlegungen wie in Abschnitt 1 eine *Raumkurve 12. Ordnung*. Sie ist wie die Fläche Φ axial-symmetrisch bezüglich der y -Achse. Im *Grundriß* erscheint sie mit Rücksicht auf (2.2) und (2.13) als *Kurve 8. Ordnung*

$$q' \dots [(x^2 - y)^2 + x^2 + 1]^2 = \frac{4p^2}{9} (x^2 + 1)^3, \tag{2.14}$$

während sie im Auf- und Kreuzriß die volle Ordnung 12 bewahrt.

Eine anschauliche Darstellung der Fläche mit den in Abb. 3 eingetragenen Berührungslinien zeigt Abb. 4. — Wir fassen zusammen:

¹ Für den Wert $p = 3/2$ sind die mit der Bewegung verknüpften Gebilde durchwegs rational.

SATZ II. Die Cayleysche Strahlfläche (2.1) gestattet auf ∞^1 Arten eine Erzeugung durch Bewegung einer starren Parabel. Deren Ebene hüllt jeweils eine Torse 12. Klasse ein, die der Fläche längs einer Kurve 12. Ordnung berührend umschrieben ist.

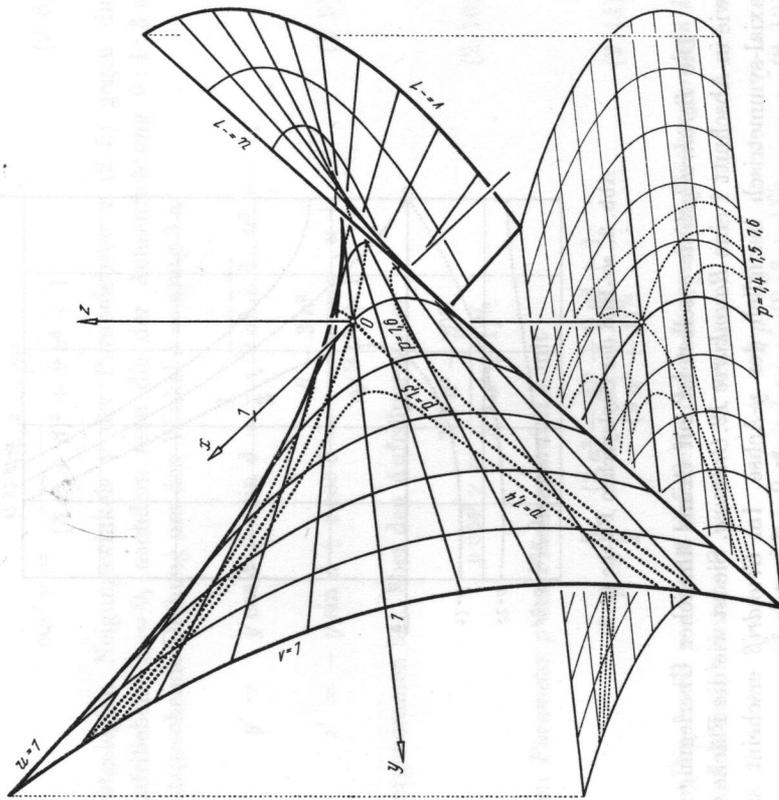


Abb. 4. Axonometrische Darstellung der Fläche (2.2). Das Parameterliniennetz entspricht dem Koordinatennetz in Abb. 3

Auch hier unterliegt der Parabelparameter p keinen Beschränkungen, doch wird stets nur ein gewisser Bereich der Fläche Φ in reeller Weise erfabt. Die Grenzlinie hat in ω eine Bildkurve 8. Klasse.

Literatur

[1] L. Ballij: Sur les surfaces engendrées de deux manières différentes par le mouvement d'une courbe indéformable. Comptes rendus Acad. Paris 158 (1914), 1484—1485.
 [2] H. Brauner: Quadriken als Bewegflächen. Monatsh. Math. 59 (1955), 45—63. — Erzeugung eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides durch Bewegung einer gleichseitigen Hyperbel. Archiv Math. 6 (1955), 330—334.
 [3] L. Burmester: Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung. Z. Math. Phys. 33 (1888), 337—348.
 [4] B. Gambier: Sur les surfaces susceptibles d'être engendrées de plusieurs façons différentes par le déplacement d'une courbe invariable. Comptes rendus Acad. Paris 158 (1914), 1155—1157. — Etude des surfaces de translation de Sophus Lie. Nouv. Ann. Math. 79 (1920), 401—423, 454—479.
 [5] G. Koenigs: Sur les mouvements doublement décomposables et sur les surfaces qui sont le lieu de deux familles de courbes égales. Comptes rendus Acad. Paris 157 (1913), 988—991.
 [6] J. Krames: Über kubische Schraublinien und Cayleysche Strahlflächen dritten Grades. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. 168 (1959), 239—248.
 [7] S. Lie: Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden. Arch. for Math. 7 (1882), 155—176. — Geometrie der Berührungstransformationen (Leipzig 1896), 362ff. — Vgl. a. [4].
 [8] E. Müller: Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 118 (1909), 3—13.
 [9] E. Müller - J. Krames: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Leipzig/Wien 1931), 204 ff.
 [10] W. Wunderlich: Über eine affine Verallgemeinerung der Grenzschaubung. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 144 (1935), 111—129.
 [11] W. Wunderlich: Römerflächen mit ebenen Falllinien. Ann. Mat. pura appl. 57 (1962), 97—108.