

Smn 176—35

Wunderlich W.

**Durch Schiebung
erzeugbare Römerflächen**

Von

Walter Wunderlich

(Mit 8 Abbildungen)

Aus den

**Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 176. Bd., 8. bis 10. Heft, 1967**

Wien 1968

**In Kommission bei Springer-Verlag, Wien-New York
Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien**

Durch Schiebung erzeugbare Römerflächen

Von

Walter Wunderlich, Wien

(Mit 8 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Oktober 1967)

1. Einleitung

Als „Römerfläche“ wird jene merkwürdige algebraische Fläche 4. Ordnung und 3. Klasse bezeichnet, mit der sich J. Steiner während seines Aufenthaltes in Rom 1844 intensiv beschäftigt hat, ohne später etwas über sie zu publizieren [1]. Die Fläche wurde dann von anderen Geometern eingehend betrachtet, und zwar meist vom *projektiven Gesichtspunkt* aus [2]. Neuerdings sind durch Untersuchungen des Verfassers auch *metrische Fragen* in den Gesichtskreis gerückt, wobei zunächst bemerkenswerte Formen der Römerfläche mit *ebenen Falllinien* [3, 4] und in der Folge metrisch ausgezeichnete Modelle entdeckt wurden, die eine einfache *kinematische Erzeugung* gestatten [5]. Als weiterer Beitrag hierzu sollen nunmehr jene Römerflächen studiert werden, die als *Schiebflächen* entstehen.

Nach dem klassischen Ansatz von K. Th. Weierstraß [1, 2] wird eine Römerfläche Ψ analytisch erfaßt, wenn man die homogenen projektiven Punktkoordinaten x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) als quadratische Polynome in zwei Parametern u, v anschreibt:

$$x_i = Q_i(u, v), \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Deutet man die inhomogenen Flächenkoordinaten u, v als kartesische Koordinaten in einer Bildebene π , so erhält man eine im allgemeinen

umkehrbar-eindeutige Abbildung $P(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow \mathfrak{P}(u, v)$ der Fläche auf eine Ebene („Weierstraß-Karte“). Jeder Geraden c

$$v = \alpha u + \beta \quad (1.2)$$

der Bildebene entspricht hierbei ein Kegelschnitt c der Fläche Ψ .

Die solcherart erkennbare Existenz von ∞^2 Flächenkegelschnitten ist kennzeichnend für die Römerfläche, wenn man von den als Grenzformen auftretenden kubischen Strahlflächen absieht [6]. Durch jeden Punkt $P \in \Psi$ gehen ∞^1 Kegelschnitte, denen im Bild die Strahlen des Büschels $\mathfrak{P} \in \pi$ entsprechen. Je zwei Punkte $P_1, P_2 \in \Psi$ können durch einen Kegelschnitt c verbunden werden, dessen Bild die Verbindungsgerade $c = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ ist. Die Trägerebene τ von c schneidet die Fläche 4. Ordnung Ψ neben c noch nach einem zweiten Kegelschnitt $\bar{c}$; den beiden „assozierten“ Kegelschnitten c und $\bar{c}$ entsprechen in der Weierstraßkarte zwei „assozierte“ Geraden c und $\bar{c}$, die einander in einer involutorischen quadratischen Strahlverwandtschaft $\mathfrak{G}$ zugeordnet sind. Den drei Hauptgeraden a_1, a_2, a_3 von $\mathfrak{G}$ (für welche die assoziierte Gerade unbestimmt wird) entsprechen drei Doppelgeraden a_1, a_2, a_3 der Fläche; dieselben laufen in einem dreifachen Punkt M („Tripelzentrum“) zusammen. Von den vier gemeinsamen Punkten der assoziierten Kegelschnitte c und $\bar{c}$ gehören drei den genannten Doppelgeraden an, der vierte stellt den Berührungspunkt T der Ebene τ mit der Fläche Ψ dar; dessen Bild ist der Schnittpunkt $\mathfrak{T}$ von c und $\bar{c}$. Die vier Doppelstrahlen $b_j = \bar{b}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) von $\mathfrak{G}$ sind auf Grund der Unbestimmtheit des Schnittpunktes die Bilder von vier Flächenkegelschnitten $b_j = \bar{b}_j$, längs welchen Ψ von je einer (singulären) Tangentialebene π_j berührt wird; diese vier „Plattkegelschnitte“ berühren einander paarweise in insgesamt sechs „Zwickpunkten“ der Fläche. Als uniplanare Doppelpunkte gehören diese Zwickpunkte zu je zweien den drei Doppelgeraden a_k an¹.

¹ Das Tripelzentrum M hat drei Bildpunkte, und zwar in den Ecken des Hauptdreiecks $a_1 a_2 a_3$. Die übrigen Punkte einer Doppelgeraden a_k haben je zwei Bildpunkte, die auf der entsprechenden Hauptgeraden a_k liegen und einer bestimmten Involution angehören, deren Doppelpunkte zwei von den sechs Zwickpunkten zugeordnet sind und sich daher insgesamt zu dreien auf die vier Doppelstrahlen b_j verteilen.

Von den Doppelgeraden a_k können zwei oder auch alle drei zusammenrücken. Gerade auf diese gerne ausgeschlossenen Grenzfälle wird es hier ankommen.

2. Römerflächen als Schiebflächen

Eine Schiebfläche entsteht durch Verschiebung einer starren „Profilkurve“ e längs einer „Leitkurve“ f . Die Einzellagen von e und die (zu f kongruenten und gleichgestellten) Bahnen der einzelnen Punkte von e bilden ein konjugiertes Netz von Flächenkurven. Die beiden Kurvenscharen können ihre Rollen vertauschen; dies bedeutet die Annahme von f als Profilkurve und von e als Leitkurve. Entsprechende Punkte auf zwei Kurven derselben Schaar sind durch parallele Tangenten gekennzeichnet; solche Punkte sind aber auch schon durch das Vorhandensein paralleler Tangentialebenen an die Kurven charakterisiert.

Zur Beantwortung der Frage, ob eine Römerfläche als Schiebfläche entstehen kann, bedenke man zunächst, daß die Treffpunkte aller Profilkurvenlagen mit einem Plattkegelschnitt b_j entsprechende Punkte im obigen Sinn sind, weil dort Berührung mit derselben Ebene π_j besteht. Wenn also eine Römerfläche als Schiebfläche erzeugbar ist, dann nur durch Verschiebung eines Kegelschnittes längs eines anderen.

Hätte ein solcher Kegelschnitt zwei verschiedene Fernpunkte $U \neq V$, so gäbe es mit den weiteren Individuen der Schiebschar ∞^1 U und V verbindende Kegelschnitte, was bei einer Römerfläche unmöglich ist. Als Profil- und Leitkurven kommen demnach nur Parabeln in Frage.

Umgekehrt entsteht durch Verschiebung einer Parabel e längs einer zweiten Parabel f — verschiedene Achsenrichtungen und Trägerebenen vorausgesetzt — tatsächlich stets eine Römerfläche². Sind nämlich

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1(u) \text{ und } \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2(v) \text{ mit } \mathfrak{f}_1(0) = \mathfrak{f}_2(0) = 0 \quad (2.1)$$

² Bei übereinstimmenden Achsenrichtungen entsteht bekanntlich ein Paraboloid, bei zusammenfallenden Trägerebenen würde hingegen die Schiebfläche in diese Ebene ausarten.

die vektoriellen, in u bzw. v quadratischen Parameterdarstellungen der beiden Parabeln, so hat die durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1(u) + \mathfrak{r}_2(v) \quad (2.2)$$

gegebene Gleichung der erzeugten Schiebfläche die typische Form des Weierstraßschen Ansatzes (1.1).

Zusammenfassend gilt daher der grundlegende

Satz I: *Durch Verschiebung einer Parabel längs einer anderen entsteht eine Römerfläche, wenn die Parabelebenen und die Achsenrichtungen verschieden sind. Die so erzeugten Römerflächen sind die einzigen, die gleichzeitig Schiebflächen sind.*

Mit (1.2) ergibt sich aus (2.2) eine quadratische Funktion $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u)$. Hieraus folgt

Satz II: *Die ∞^2 auf der gemäß Satz I erzeugten Römerfläche verlaufenden Kegelschnitte sind, soweit sie nicht ausarten, durchwegs Parabeln.*

Unter diesen ∞^2 Flächenparabeln werden je ∞^1 den gleichen Parameter p aufweisen, also kongruent sein. Hieraus fließt

Satz III: *Jede Römerfläche, die Schiebfläche ist, kann auf ∞^1 Arten durch Bewegung einer starren Parabel erzeugt werden.*

Die betreffenden Bewegungen sind im allgemeinen keine Schiebungen, sondern weitaus komplizierterer Natur.

In den folgenden Abschnitten sollen die drei einschlägigen, wesentlich verschiedenen Typen reeller Schieb-Römerflächen an Hand gewisser Normalformen näher untersucht werden; dieselben bieten einfache Modelle für Römerflächen mit vereinigten Doppelgeraden, die übersichtlicher sind als die bisher bekannten [7]. Als Unterscheidungsmerkmal der Typen dient dabei das Aussehen der nicht ausgearteten Plattkegelschnitte.

3. Schieb-Römerflächen mit zwei reellen Plattkegelschnitten

Im allgemeinen werden die Ebenen der beiden erzeugenden Parabeln aus Satz I eine Schnittgerade besitzen, die zu keiner der beiden Achsenrichtungen parallel ist. Dann können die beiden Parabeln in einer Anfangslage vorausgesetzt werden, in der sie einander in einem eigentlichen Punkt O berühren. Sie bilden dann zwei Plattkegelschnitte b_1, b_2 der Fläche und O ist ein *Zwickpunkt*.

Macht man O zum Ursprung und die gemeinsame Parabeltangente zur z -Achse eines affinen Koordinatensystems, dessen restliche Achsen x, y die Richtungen der Parabelachsen haben, so kann man nach Wahl passender Einheiten die beiden als *reell* angenommenen Parabeln b_1 und b_2 gemäß (2.1) ansetzen durch

$$x_1 = \frac{1}{2}u^2, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = u \quad \text{und} \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2}v^2, \quad z_2 = v. \quad (3.2)$$

Für die Römerfläche hat man dann nach (2.2) die Darstellung

$$x = \frac{1}{2}u^2, \quad y = \frac{1}{2}v^2, \quad z = u + v. \quad (3.2)$$

Als Normalform gelte jene durch (3.2) definierte Fläche Ψ_I , die sich ergibt, wenn x, y, z als kartesische Normalkoordinaten aufgefaßt werden. Die erzeugenden Parabeln haben dann den gemeinsamen Parameter $p = 1$.

Durch Elimination von u und v gelangt man zur impliziten Darstellung

$$(z^2 - 2x - 2y)^2 = 16xy. \quad (3.3)$$

Die eigentliche Doppelgerade a_1 wird beschrieben durch

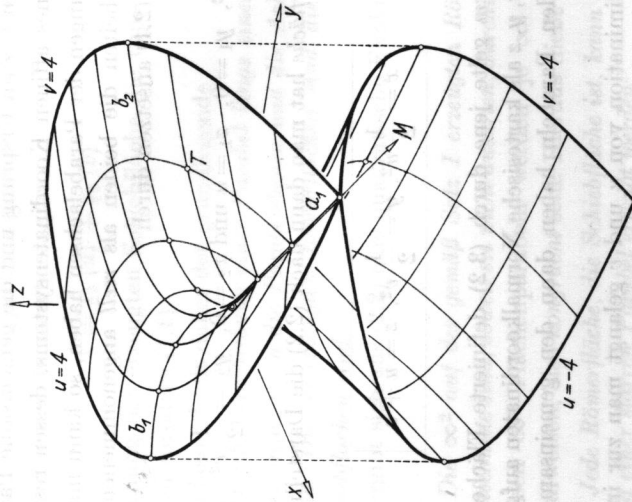
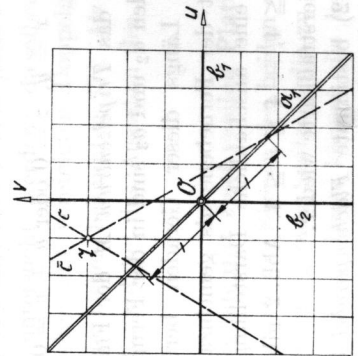
$$x = y, \quad z = 0 \quad \text{oder} \quad u + v = 0. \quad (3.4)$$

Ihr Fernpunkt ist das Tripelzentrum M der Fläche. Die beiden restlichen Doppelgeraden a_2 und a_3 sind in der Ferngeraden der xy -Ebene zusammengerückt. Längs dieser Geraden berühren einander zwei Flächenmäntel mit der Fernebene als gemeinsamer Tangentialebene.

Abb. 1 zeigt eine anschauliche Darstellung der Fläche Ψ_I im Bereich $-4 \leq u \leq 4, -4 \leq v \leq 4$. Abb. 2 gibt in halbem Maßstab die zugehörige Weierstraßkarte wieder.

Die durch (1.2) bestimmte Flächenparabel c hat die Darstellung

$$x = \frac{1}{2}u^2, \quad y = \frac{1}{2}(\alpha u + \beta)^2, \quad z = (\alpha + 1)u + \beta. \quad (3.5)$$

Abb. 1. Axonometrische Darstellung der Fläche Ψ_I .Abb. 2. Weierstraßkarte von Ψ_I .

Sie verläuft in der *Tangentialebene* τ mit der Gleichung

$$\alpha^2 x - y + \frac{\alpha \beta}{\alpha + 1} z = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \cdot \frac{\beta^2}{2}, \quad (3.6)$$

wie an Hand der durch die Substitution (3.5) entstehenden Identität in u zu bestätigen ist. Die zweite in τ verlaufende Flächenparabel c

$$v = \bar{\alpha} u + \beta \quad (3.7)$$

ist, wie ein Koeffizientenvergleich ergibt, festgelegt durch

$$\bar{\alpha} = -\alpha, \quad \bar{\beta} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \cdot \beta. \quad (3.8)$$

Die durch die *quadratische Strahlverwandtschaft* $\mathfrak{S}$ (3.8) verbundenen Geraden c (1.2) und $\bar{c}$ (3.7) sind, wie man leicht nachprüft, gegen die u -Achse entgegengesetzt gleich geneigt und schneiden die der Doppelgeraden a_1 (3.4) zugeordnete Bildgerade a_1 ($u + v = 0$) in zwei bezüglich des Ursprungs $\mathfrak{O}$ spiegelbildlichen Punkten (Abb. 2).

Der Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ von c und $\bar{c}$ hat die aus (1.2) und (3.7) mit Berücksichtigung von (3.8) zu berechnenden Koordinaten

$$u = \frac{-\beta}{\alpha(\alpha + 1)}, \quad v = \frac{\alpha \beta}{\alpha + 1}. \quad (3.9)$$

$\mathfrak{S}$ ist das Bild des *Berührungspunktes* T der Tangentialebene τ .

Um den *Parameter* p der durch (1.2) bestimmten Flächenparabel c (3.5) zu ermitteln, beachte man, daß die mit $u \rightarrow \infty$ abzulesende Achsenrichtung

$$x : y : z = 1 : \alpha^2 : 0 \quad (3.10)$$

parallel zur xy -Ebene verläuft. Es genügt daher, den Parameter $\hat{p}$ des Normalrisses von c auf die xy -Ebene zu kennen. Mit Benützung des Neigungswinkels γ der Parabelebene τ (3.6) gegen die xy -Ebene erhält man nämlich

$$p = \frac{\hat{p}}{\cos^2 \gamma}, \quad \text{wobei} \quad \operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{(\alpha + 1)^2 (\alpha^4 + 1)}{\alpha^2 \beta^2}. \quad (3.11)$$

Zur Bestimmung von $\hat{p}$ nehme man eine Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse um den der Achsenrichtung (3.10) entsprechenden Winkel $\delta = \arctg \alpha^2$ vor. Man gelangt so zu

$$\tilde{x} = x \cos \delta + y \sin \delta = \sqrt{\alpha^4 + 1} \cdot \frac{u^2}{2} + \dots, \quad (3.12)$$

$$\tilde{y} = -x \sin \delta + y \cos \delta = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^4 + 1}} \cdot u + \dots$$

Hieraus ist abzulesen

$$\hat{p} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^4 + 1)^{3/2}}, \quad (3.13)$$

und mit Rücksicht auf (3.11) folgt schließlich

$$p = \frac{(\alpha + 1)^2 (\alpha^4 + 1) + \alpha^2 \beta^2}{(\alpha^4 + 1)^{3/2}}. \quad (3.14)$$

Die durch $p = \text{const}$ definierte Schar kongruenter Flächenparabeln bedingt jeweils eine der in Satz III genannten ∞^1 Erzeugungen der Römerfläche Ψ_I (3.2) als *Bewegfläche*. Die hierbei von den Parabeln c (3.5) überdeckte Zone der Fläche wird von einer Kurve h begrenzt, der in der Weierstraßkarte die Einhüllende h der Bildgeraden c (1.2) entspricht; diese ist gemäß (3.14) eine algebraische Kurve 12. Klasse, weil die Veränderlichen α und β als inhomogene Geradenkoordinaten aufgefaßt werden können. Die von den Parabelebenen eingehüllte Torse Θ ist der Römerfläche längs einer Kurve q berührend angeschrieben, die mit Rücksicht auf (3.9) durch

$$(u^2 + v^2 + u^2 v^2) (\sqrt{u} + \sqrt{-v})^2 = p (u^2 + v^2)^{3/2} \quad (3.15)$$

dargestellt wird. Es handelt sich um eine algebraische Raumkurve 40. Ordnung, denn ihr durch (3.15) gegebenes Weierstraßbild q hat die Ordnung 20 und jeder ebene Schnitt der Römerfläche bildet sich auf eine Kurve 2. Ordnung ab. — Für $p = 1$ zerfällt das System kongruenter Flächenparabeln in die beiden Schiebcharen und eine nicht-triviale Restschar.

Die konstruktive Behandlung einer Römerfläche stützt sich am besten auf die Projektion aus dem Tripelzentrum M . Im vorliegenden Fall ist dies die Parallelprojektion in Richtung der Doppelgeraden a_1 (3.4); verwendet man die xz -Ebene π_1 als Bildebene, so wird einem Flächenpunkt $P(x, y, z)$ der Schrägriß $P^s(x - y, 0, z)$ zugeordnet.

Wegen

$$x - y = \frac{1}{2} (u^2 - v^2), \quad z = u + v \quad (3.16)$$

hängt dieses Bildfeld mit der Weierstraßkarte (u, v) vermöge einer birationalen quadratischen Transformation zusammen. Jeder Flächenelement c trifft die drei Doppelgeraden der Römerfläche, so daß er im Schrägriß als Parabel c^s durch $O = a_1^s$ mit x -paralleler Achse erscheint.

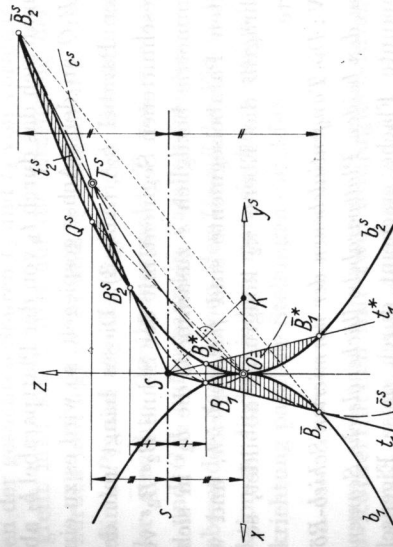


Abb. 3. Projektion von Ψ_I aus dem Tripelzentrum M (Schrägriß in Richtung der Doppelgeraden a_1 auf die xz -Ebene).

Die Römerfläche Ψ_I (3.2) ist durch das die beiden Plattkegelschnitte b_1, b_2 (3.1) abbildende Parabelpaar $b_1^s = b_1, b_2^s \cong b_2 \cong b_1$ ausreichend bestimmt. Die beiden Parabeln berühren einander im gemeinsamen Scheitel O (Abb. 3).

Sei nun t_1 die Schnittgerade einer beliebigen Tangentialebene τ von Ψ_I mit π_1 („1. Spur“). Sie trifft b_1 in zwei Punkten B_1 und $\bar{B}_1$, wo sie von den beiden in τ verlaufenden Flächenparabeln c und $\bar{c}$ berührt wird. Deren Bilder c^s und $\bar{c}^s$ können daher mit Benützung ihres gemeinsamen Punktes O konstruiert werden. Die Schnittgerade t_2 von τ mit der yz -Ebene π_2 („2. Spur“) ist gleichfalls gemeinsame Tangente von c und $\bar{c}$, wobei die Berührungspunkte B_2 und $\bar{B}_2$ der Plattparabel b_2 angehören müssen. Ferner ist klar, daß die beiden Spuren t_1 und t_2 in einem Punkt der z -Achse zusammentreffen. Mit Benützung dieses

Treffpunktes S und der Symmetrie von c^s und $\bar{c}^s$ bezüglich des durch S gehenden Durchmessers $s \parallel x$ lassen sich die Bildpunkte B_2^s und $B_2^{\bar{s}}$ leicht eintragen: Die Durchmesser durch B_1 und B_2^s bzw. durch B_1 und $B_2^{\bar{s}}$ liegen spiegelbildlich zu s . — In der (schiefen) Symmetrie bezüglich s , in der einander B_1 und B_2^s sowie B_1 und $B_2^{\bar{s}}$ entsprechen, wird dem Punkt O der zweite gemeinsame Punkt T^s von c^s und $\bar{c}^s$ zugeordnet; damit ist der Schrägriß des *Berührungspunktes* T von τ gefunden.

Denkt man sich das durch t_1 von der Plattparabel b_1 abgeschnittene Segment $B_1\bar{B}_1O$ an der z -Achse gespiegelt, so wird es zu einem Segment $B_1^* \bar{B}_1^* O$ der Parabel b_2^s (Abb. 3). Dieses hängt mit dem durch t_2^s von b_2^s abgeschnittenen Segment mit der Sehne $B_2^s \bar{B}_2^s$ vermöge jener schiefen Symmetrie bezüglich s zusammen, die b_2^s in sich überführt.³ Die genannten Parabelsegmente sind *flächengleich*, und weil der verwendete Schrägriß die Ebene π_2 kongruent abbildet, so gilt der bemerkenswerte

Satz IV: Die Tangentialebenen der normierten Schieb.-Römerfläche Ψ_I schneiden von den beiden Plattparabeln flächengleiche Segmente ab.

Die genannte Fläche erscheint durch diese Eigenschaft charakterisiert. Für die nichtnormierten Schieb.-Römerflächen tritt anstelle der Flächengleichheit eine gewisse Proportionalität. Der Satz IV läßt sich auf Römerflächen mit drei getrennten Doppelgeraden verallgemeinern, sofern zwei davon unendlich fern sind.

Die schiefe Spiegelung von b_2^s an s , die B_1^* mit B_2^s und $\bar{B}_1^*$ mit $\bar{B}_2^s$ vertauscht (und demnach auch t_1^* mit t_2^s), bringt O an eine Stelle $Q^s \in b_2^s$, die mit T^s auf einem Durchmesser liegt (Abb. 3). Man erkennt unschwer, daß t_2^s die Strecke $Q^s T^s$ halbiert. Damit ergibt sich eine Möglichkeit zur Lösung der *Umkehraufgabe*, betreffend die Ermittlung der Tangentialebene τ für einen durch seinen Schrägriß T^s gegebenen

³ Die zugehörigen Symmetriestrahlen sind normal zur Verbindung von S mit dem Scheitelkrümmungsmittelpunkt K von b_2^s , was eine einfache Konstruktion von B_2^s und $\bar{B}_2^s$ erlaubt (Abb. 3). Die benützte Doppelspiegelung an z und s gestattet den Übergang von t_1 zu t_2^s auch dann, wenn die Treffpunkte mit den Plattparabeln nicht reell ausfallen, also für die Tangentialebenen elliptischer Flächenpunkte.

Flächenpunkt T : Man bestimmt zunächst den Endpunkt Q^s des durch T^s gehenden Durchmessers der Parabel b_2^s , sowie den der z -Achse angehörenden Punkt $S \in \tau$, dessen z -Koordinate halb so groß ist wie jene von T^s ; das Bild t_2^s der 2. Spur von τ verbindet dann S mit dem Halbirungspunkt der Strecke $T^s Q^s$, und die gleichfalls von S ausgehende 1. Spur t_1 schneidet von der z -Achse die Hälfte der Strecke $T^s Q^s$ ab.

Eine weitere wichtige Grundaufgabe besteht in der Ermittlung der (einzigen) *Tangentialebene* τ *vorgeschriebener Stellung*. Hier sind also die Richtungen der gesuchten Spuren t_1 und t_2 von vornherein bekannt. Zur Lösung greift man am besten auf die Erzeugung der Fläche als Schiebfläche zurück und legt an b_1 und b_2 Tangenten in den gegebenen Richtungen. Sind P_1 und P_2 die zugehörigen Berührungspunkte, so ergibt sich der gesuchte Berührungspunkt T von τ als vierte Ecke des von OP_1 und OP_2 aufgespannten Parallelogramms. — Diese Aufgabe kann insbesondere dazu dienen, den *Umriß* der Fläche für beliebige Parallelprojektion zu finden, indem man sie für verschiedene zur gegebenen Blickrichtung parallele Stellungen durchführt.

4. Schieb.-Römerflächen mit zwei konjugiert-imaginären Plattkegelschnitten

Die beiden Plattparabeln b_1 und b_2 seien jetzt als *konjugiert-imaginär* vorausgesetzt:

$$x_1 = w^2, y_1 = -i w^2, z_1 = w; \quad x_2 = \bar{w}^2, y_2 = i \bar{w}^2, z_2 = \bar{w}. \quad (4.1)$$

Die durch Schiebung von b_1 längs b_2 erzeugte Römerfläche wird dann in komplexer Form dargestellt durch

$$x = w^2 + \bar{w}^2, y = -i(w^2 - \bar{w}^2), z = w + \bar{w}. \quad (4.2)$$

Wählt man jeweils konjugiert-komplexe Parameterwerte $w = u + i v$ und $\bar{w} = u - i v$, so erhält man die reellen Flächenpunkte. Die reelle Parameterdarstellung der Fläche lautet dementsprechend:

$$x = 2(u^2 - v^2), y = 4uv, z = 2u. \quad (4.3)$$

Als *Normalform* gelte jene Fläche Ψ_{II} , die sich ergibt, wenn die Koordi-

naten x, y, z wieder als normale kartesische erklärt werden. Die Ebenen $x \mp i y = 0$ der erzeugenden Parabeln b_1, b_2 (4.1) sind dann Minimalebenen; Ψ_{II} ist daher eine *Potentialfläche* [4]. Sie kann als Diagrammfläche des Realteils der komplexen analytischen Funktion $\omega = \sqrt{2} \zeta$ aufgefaßt werden, denn setzt man $x + i y = \zeta$, so folgt aus (4.2) $\zeta = 2 w^2$, und es ist

$$z = \operatorname{Re} \sqrt{2} \zeta. \quad (4.4)$$

Die v -Linien ($u = \text{const}$) des Koordinatensystems sind die *Schichtenlinien* $z = \text{const}$ der Fläche und für $u \neq 0$ *Parabeln*. Die u -Linien ($v = \text{const}$) sind gleichfalls *Parabeln* und verlaufen in den Ebenen $y/z = \text{const}$; man überzeugt sich leicht, daß sie die *Falllinien* der Fläche darstellen. Der im Grundriß auftretende Schichten- und Falllinienplan⁴ besteht aus konfokalen Parabeln [5, 6, 8].

Die Elimination von u und v aus (4.3) liefert die parameterfreie kartesische Flächengleichung

$$z^4 - 2 x z^2 - y^2 = 0. \quad (4.5)$$

Die eigentliche Doppelgerade a_1 der Fläche Ψ_{II} fällt mit der x -Achse zusammen ($u = 0$), und die beiden anderen Doppelgeraden $a_2 = a_3$ sind wieder in der Ferngeraden der xy -Ebene vereinigt. Der Fernpunkt der x -Achse stellt das Tripelzentrum M von Ψ_{II} dar, und der Ursprung O ist ein Zwickpunkt mit der z -Achse als Zwicktangente. — In dem für die anschauliche Darstellung Abb. 4 verwendeten Schrägriß auf die xy -Ebene („Militärperspektive“) bilden sich die Schichtenparabeln unverzerrt ab. Es läßt sich zeigen, daß der hierbei auftretende scheinbare Umriss der Fläche eine dreispitze Hypozykloide ist, denn es handelt sich um eine Kurve 3. Klasse, welche die Ferngerade in den absoluten Punkten berührt.

Die der Geraden c (1.2) der Weierstraßkarte (Gaußsche w -Ebene) entsprechende *Flächenparabel* c wird zufolge (4.3) beschrieben durch

$$x = 2(1 - \alpha^2) u^2 - 4 \alpha \beta u - 2 \beta^2, \quad y = 4 \alpha u^2 + 4 \beta u, \quad z = 2 u. \quad (4.6)$$

⁴ Dieser Plan geht vermöge der durch $\zeta = 2 w^2$ erklärten konformen Abbildung $w \rightarrow \zeta$ aus dem (orthogonalen) Koordinatenraster der w -Ebene hervor.

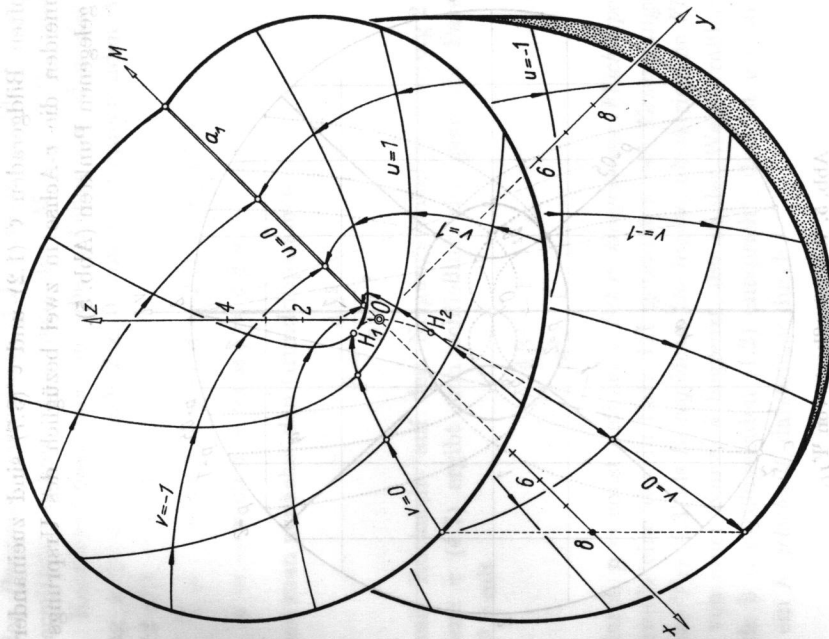


Abb. 4. Axonometrische Darstellung der Fläche Ψ_{II} .

Sie verläuft in der *Tangentialebene* τ :

$$2 \alpha x + (\alpha^2 - 1) y + 2 (\alpha^2 + 1) \beta z + 4 \alpha \beta^2 = 0. \quad (4.7)$$

Die zweite in τ verlaufende Flächenparabel $\bar{c}$ (3.7) wird, wie ein Koeffizientenvergleich lehrt, festgelegt durch

$$\alpha = -\frac{1}{\alpha}, \quad \beta = -\beta.$$

Die durch die involutorische quadratische Strahlverwandtschaft $\mathfrak{S}$ (4.8)

verknüpften Bildgeraden c (1.2) und $\bar{c}$ (3.7) sind zueinander normal und schneiden die v -Achse in zwei bezüglich des Ursprungs spiegelbildlich gelegenen Punkten (Abb. 5).

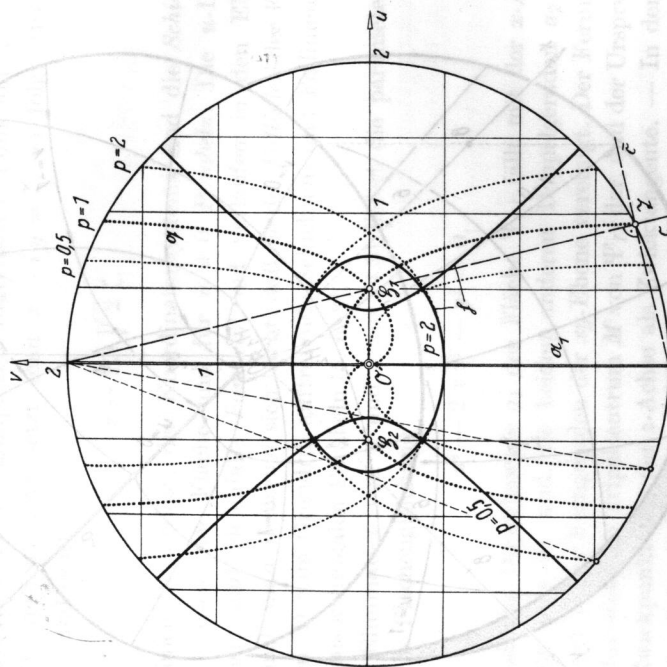


Abb. 5. Weierstraßkarte von Ψ_{II} .

Der Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ von c und $\bar{c}$, festgelegt durch

$$u = -\frac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2}, \quad v = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \cdot \beta, \quad (4.9)$$

ist das Weierstraßbild des Berührungspunktes T von τ^5 .

⁵ Die Linienelemente ($\mathfrak{S}c$) und ($\mathfrak{S}\bar{c}$) entsprechen den Schmielelementen im Flächenpunkt T . Das durch Integration dieser Elemente gewonnene System konfokaler Parabeln $u^2 = 2Cv + C^2$ stellt das Bild des Schmielelementes der Römerfläche (4.3) dar. Die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{S}$ (4.8), in der einander die assoziierten Geraden c und $\bar{c}$ zugeordnet sind, ist die wohlbekannte „Verwandtschaft konjugierter Normalen“ bezüglich einer beliebigen der konfokalen Parabeln.

Um den Parameter p der durch (1.2) bestimmten Flächenparabel c (4.6) zu ermitteln, nehme man nach dem Muster (3.12) eine Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse um den der Achsenrichtung $x:y:z = (1-\alpha^2):2\alpha:0$ von c entsprechenden Winkel $\delta = \arctg 2\alpha/(1-\alpha^2)$ vor:

$$\tilde{x} = x \cos \delta + y \sin \delta = 2(1+\alpha^2)u^2 + \dots$$

$$\tilde{y} = -x \sin \delta + y \cos \delta = 4\beta u + \dots \quad (4.10)$$

Hieraus liest man zunächst den Grundrißparameter

$$\hat{p} = \frac{4\beta^2}{\alpha^2 + 1} \quad (4.11)$$

ab, und mit Rücksicht auf den Neigungswinkel $\gamma = \arctg 2\beta$ der Parabelebene τ (4.7) ergibt sich schließlich der gesuchte Parameter $p = \hat{p}/\cos^2 \gamma$ mit

$$p = \frac{4\beta^2 + 1}{\alpha^2 + 1}. \quad (4.12)$$

Die durch $p = \text{const}$ definierte Schar kongruenter Flächenparabeln bedingt jeweils eine der in Satz III genannten ∞^1 Erzeugungen der Römerfläche Ψ_{II} (4.3) als Bewegungsfläche. Die hierbei überstrichene Flächenzone wird von einer Kurve h begrenzt, der in der Weierstraßkarte die Einhüllende $\mathfrak{h}$ der Bildgeraden (1.2) entspricht; dies ist gemäß (4.12) für $p \neq 1$ ein Kegelschnitt, darstellbar durch

$$\frac{u^2}{p} + \frac{v^2}{p-1} = \frac{1}{4}. \quad (4.13)$$

Diese Kegelschnitte $\mathfrak{h}$ fallen nur für $p > 0$ reell aus und sind dann für $p > 1$ Ellipsen, für $p < 1$ Hyperbeln, durchwegs mit der linearen Exzentrizität $1/2$. Sie erfüllen mithin eine konfokale Schar mit den gemeinsamen Brennpunkten $u = \pm 1/2$, $v = 0$ (Abb. 5). Die Zonen Grenzen h auf Ψ_{II} sind nach allem rationalen Raumkurven 4. Ordnung. Jede derselben besitzt einen zu $u = 0$ gehörenden, auf der x -Achse gelegenen Doppelpunkt D mit der Abszisse $x = (1-p)/2$ und bildet sich im Grundriß auf einen Kegelschnitt h'

$$(2p-1)^2(x^2+y^2) = [x+p(p-1)]^2 \quad (4.14)$$

ab. Für $p \neq 1/2$ ist der Ursprung O ein Brennpunkt und $x = p(1-p)$ die zugehörige Leitlinie (Polare); die numerische Exzentrizität hat den Betrag $1/(2p-1)$. Für $p = 1/2$ artet der Kegelschnitt h' in die doppelt zählende Gerade $x = 1/4$ aus, und die Grenzlinie h ist demnach eben. — Der *Aufriß* h'' der Zonengrenze ist für $p \neq 1/2$ eine *Parabel*.

$$(2p-1)z^2 = 2px + p(p-1). \quad (4.15)$$

Sie hat ihren Scheitel in D und den Parameter $p/(2p-1)$.

Drückt man die quadratische Relation (4.12) zwischen α und β in Parameterform aus, etwa durch

$$\alpha = \frac{p-1-\lambda^2}{2\sqrt{p}\cdot\lambda}, \quad \beta = \frac{p-1-\lambda^2}{4\lambda}, \quad (4.16)$$

so erkennt man, daß die von den Parabelebenen τ (4.7) einer Bewegschar $p = \text{const}$ eingehüllte Torse Θ eine *rationale Torse* 6. Klasse ist. Sie schneidet die Symmetrieebene $z = 0$ nach einer *Doppelkurve*, die als Einhüllende der Spurenschar

$$2\alpha x + (\alpha^2 - 1)y + \alpha(p\alpha^2 + p - 1) = 0 \quad (4.17)$$

ermittelt werden kann. Man findet

$$x = \frac{1-p}{2} + \frac{p\alpha^2}{2} \cdot \frac{\alpha^2-3}{\alpha^2+1}, \quad y = -\frac{2p\alpha^3}{\alpha^2+1}, \quad z = 0. \quad (4.18)$$

Dies ist eine monozirkulare Kurve 4. Ordnung und 3. Klasse (kollinear zu einer Kardioide), die eine reelle Spitze im Doppelpunkt D von h hat ($\alpha = 0$) und einen parabolischen Ast in Richtung der x -Achse ins Unendliche sendet ($\alpha = \infty$). Die zu verschiedenen p -Werten gehörigen Doppelkurven sind untereinander bezüglich des Punktes Θ verläuft zentrisch ähnlich. — Eine *zweite Doppelkurve* der Torse Θ verläuft in der Symmetrieebene $y = 0$ und wird dort von der Spur $\alpha x + (\alpha^2 + 1)\beta z + 2\alpha\beta^2 = 0$ der Ebene τ (4.7) eingehüllt. Nach Übergang zu dem im Falle $p \neq 1$ zweckmäßigeren Parameter $\vartheta = \alpha/\beta$ und Berücksichtigung der Bedingung (4.12) schreibt sich die Gleichung dieser Spur folgendermaßen:

$$(p\vartheta^3 - 4\vartheta)x + (\vartheta^2 - 4)z + 2(1-p)\vartheta^2 = 0. \quad (4.19)$$

Ihre Einhüllende, darstellbar durch

$$x = \frac{2(1-p)(\vartheta^2+4)}{p\vartheta^4+4(1-3p)\vartheta^2+16}, \quad y = 0, \quad z = \frac{4p(p-1)\vartheta^3}{p\vartheta^4+4(1-3p)\vartheta^2+16}. \quad (4.20)$$

ist demnach gleichfalls eine Kurve 4. Ordnung und 3. Klasse (kollinear zu einer Kardioide); ihre reelle Spitze liegt im Doppelpunkt D ($\vartheta = 0$) der Zonengrenze h , während O ein gewöhnlicher Scheitelpunkt ist ($\vartheta = \infty$).

Die *Berührungslinie* q der Römerfläche Ψ_{II} mit der Torse Θ ergibt sich, wenn man mit der Substitution (4.16) in die Darstellung (4.9) eingeht. Man erhält damit zunächst das Weierstraßbild q von q , das sich als rationale Kurve 6. Ordnung erweist. Dementsprechend ist q selbst eine *rationale Raumkurve* 12. Ordnung.

Besonderes Interesse gebührt dem bisher ausgeschlossenen *Sonderfall* $p = 1$. Hier zerfällt die durch (4.12) gekennzeichnete Schar der Bildgeraden in zwei *Strahlbüschel*

$$\alpha \pm 2\beta = 0, \quad (4.21)$$

deren Scheitel die Brennpunkte $S_{1,2}(\pm 1/2, 0)$ der Kegelschnitte b (4.13) sind. Ihnen entsprechen auf der Fläche die Punkte $H_{1,2}(1/2, 0, \pm 1)$. Zum Strahlbüschel S_1 etwa gehört die Gesamtheit aller Flächenparabeln durch H_1 . Mit diesen Parabeln wird die ganze Römerfläche Ψ_{II} erfaßt; die Zonengrenze ist jetzt auf den Punkt H_1 zusammengekrumpft. Die von den Parabelebenen umhüllte Torse Θ zerfällt für $p = 1$ in die beiden *Berührungskegel* 4. Ordnung und 3. Klasse, die sich der Fläche Ψ_{II} aus H_1 bzw. H_2 umschreiben lassen; ihre gemeinsame Basiskurve in der xy -Ebene wird durch (4.18) mit $p = 1$ beschrieben. Die *Berührungslinien* q_1 und q_2 sind zwei rationale Raumkurven 6. Ordnung, die in H_1 bzw. H_2 einen Doppelpunkt aufweisen. Ihre Weierstraßbilder sind zwei Kurven 3. Ordnung (Strophoiden). — Auf der Römerfläche Ψ_{II} existiert übrigens noch eine *dritte Schar* von Parabeln derselben Größe, die durch $p = -1$ charakterisiert ist; im Hinblick auf (4.13) ist diese Schar allerdings nicht reell.

Die konstruktive Behandlung der Fläche kann sich auf keine reellen Plattekegelschnitte stützen und verlangt daher ein eigenes Konzept. Hierauf soll vielleicht bei anderer Gelegenheit eingegangen werden.

Abschließend soll nur noch auf eine *eingliedrige Affinitätsgruppe* hingewiesen werden, der gegenüber die Römerflächen Ψ_I und Ψ_{II} *invariant* sind. Sie entspricht der Gruppe zentrischer Streckungen

$$u' = \rho u, \quad v' = \rho v \quad (4.22)$$

der Weierstraßkarte und wird gemäß (3.2) bzw. (4.3) beschrieben durch

$$x' = \rho^2 x, \quad y' = \rho^2 y, \quad z' = \rho z. \quad (4.23)$$

Ihre *Bahnkurven* im Sinne von F. Klein und S. Lie sind *Parabeln* mit dem gemeinsamen Scheitelelement (O, z) , zu welchen die Meridianschnitte $y/x = \text{const}$ der Flächen Ψ_I und Ψ_{II} gehören (unter ihnen auch die beiden Plattparabeln b_1 und b_2). Es gilt demnach

Satz V: Die *Schieb-Römerflächen* mit zwei *Plattkegelschnitten* gestatten eine *eingliedrige kontinuierliche Gruppe von Affinitäten* mit *parabolischen, das eigentliche Zwickелеlement* enthaltenden *Bahnkurven*.

Einer solchen Fläche läßt sich längs jeder auf ihr verlaufenden Bahnparabel (Meridianparabel) ein berührender parabolischer Zylinder anschreiben, was beispielsweise zur Umrißkonstruktion ausgenutzt werden kann.

5. Schieb-Römerflächen mit einem einzigen Plattkegelschnitt

Ausständig ist jetzt noch der in Abschnitt 3 zurückgestellte Fall, daß die Ebenen der beiden, die Schiebfläche erzeugenden Parabeln aus Satz I eine Schnittgerade besitzen, die zur Achsenrichtung der einen Parabel parallel ist. Die Achsenrichtung der zweiten Parabel ist als davon verschieden vorauszusetzen, um das Paraboloid auszuschließen². Unter diesen Umständen kann man die beiden Parabeln durch

$$x_1 = u, \quad y_1 = \frac{1}{2} u^2, \quad z_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 0, \quad y_2 = v, \quad z_2 = \frac{1}{2} v^2 \quad (5.1)$$

annehmen. Für die erzeugte *Römerfläche* hat man dann gemäß (2.2) die Darstellung

$$x = u, \quad y = \frac{1}{2} u^2 + v, \quad z = \frac{1}{2} v^2. \quad (5.2)$$

Als *Normalform* gelte jene Fläche Ψ_{III} , die sich ergibt, wenn x, y, z wieder als kartesische Normalkoordinaten gedeutet werden. Profil- und Leitparabel haben dann den gemeinsamen Parameter $p = 1$. Die parameterfreie Flächengleichung lautet

$$(x^2 - 2y)^2 = 8z. \quad (5.3)$$

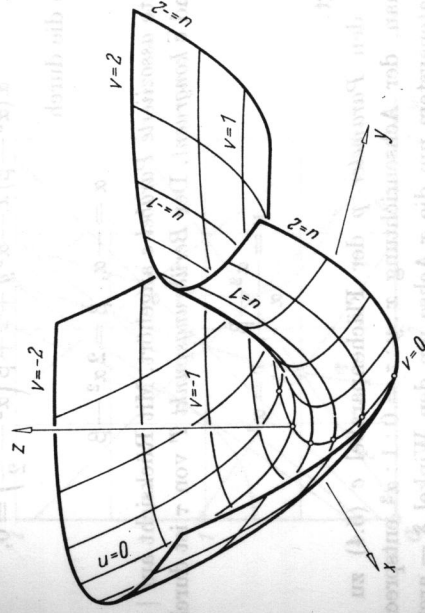


Abb. 6. Axonometrische Darstellung der Fläche Ψ_{III} .

Der eigentliche Zwickpunkt von Ψ_I ist bei Ψ_{III} ins Unendliche gerückt, und mit ihm auch die Doppelgerade a_1 . Alle drei Doppelgeraden der Römerfläche sind jetzt in der Ferngeraden der yz -Ebene vereinigt; längs dieser Geraden werden zwei einander oskulierend durchsetzende Flächenmängel von der Fernebene berührt. Das *Tripelzentrum* M ist im Fernpunkt der z -Achse zu suchen. Die Leitparabel $v = 0$, die vom Scheitel der Profilparabel $u = 0$ durchlaufen wird, stellt den einzigen *Plattkegelschnitt* b dieser Grenzform der Römerfläche dar; dieselbe wird längs b von der xy -Ebene berührt. — Abb. 6 zeigt eine anschauliche Ansicht der Fläche Ψ_{III} für den Bereich $-2 \leq u \leq 2$, $-2 \leq v \leq 2$.

Die durch (1.2) definierte *Flächenparabel* c wird beschrieben durch

$$x = u, \quad u = \frac{1}{2} u^2 + \alpha u + \beta, \quad z = \frac{1}{2} (\alpha u + \beta)^2. \quad (5.4)$$

Man erkennt, daß alle ∞^2 Flächenparabeln, soweit sie nicht zur Schieb-
schar $u = \text{const}$ gehören, im Grundriß als Parabeln gleicher Größe
(mit dem Parameter $p = 1$) erscheinen, was geometrisch durch die
Anordnung der Doppelgeraden bedingt ist. Die Parabel c (5.4) verläuft
in der Tangentialebene τ

$$\alpha(\alpha^2 - \beta)x - \alpha^2 y + z + \beta\left(\alpha^2 - \frac{\beta}{2}\right) = 0, \quad (5.5)$$

der auch die durch

$$\bar{\alpha} = -\alpha, \quad \bar{\beta} = 2\alpha^2 - \beta \quad (5.6)$$

bestimmte assoziierte Parabel $\bar{c}$ angehört. Mit Rücksicht auf $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$
sind c und $\bar{c}$ kongruent. Der Berührungspunkt T von τ ist durch

$$u = \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha}, \quad v = \alpha^2 \quad (5.7)$$

festgelegt.

Um den Parameter p der Flächenparabel c (5.4) zu ermitteln,
drehe man, der Achsenrichtung $x : y : z = 0 : 1 : \alpha^2$ entsprechend, das
Koordinatensystem um die x -Achse um den Winkel $\delta = \arctg \alpha^2$. Aus

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y \cos \delta + z \sin \delta = \sqrt{\alpha^4 + 1} \cdot \frac{u^2}{2} + \dots, \\ \bar{z} &= -y \sin \delta + z \cos \delta = \frac{\alpha(\beta - \alpha^2)}{\sqrt{\alpha^4 + 1}} \cdot u + \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

liest man zunächst den Aufrißparameter

$$\bar{p} = \frac{\alpha^2(\beta - \alpha^2)^2}{(\alpha^4 + 1)^{3/2}} \quad (5.9)$$

ab, und erhält dann mittels des Neigungswinkels γ der Parabelebene τ
(5.5) gegen die yz -Ebene den gesuchten Wert

$$p = \frac{\alpha^2(\alpha^2 - \beta)^2 + \alpha^4 + 1}{(\alpha^4 + 1)^{3/2}}. \quad (5.10)$$

Die durch $p = \text{const}$ gekennzeichneten, untereinander kongruenten
Flächenparabeln erfüllen eine Beweigsschar und werden aus der Fläche

Ψ_{III} von den Tangentialebenen τ einer ihr berührend umschriebenen
Torse Θ ausgeschnitten. Hierbei ist zu beachten, daß — im Gegensatz
zu den Verhältnissen bei Ψ_I und Ψ_{II} — beide Schnittparabeln den
gleichen Parameter p aufweisen. Die Berührungslinie q von Θ und Ψ_{III}

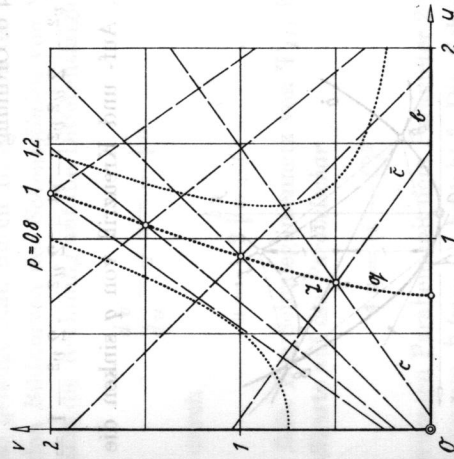


Abb. 7. Weierstraßkarte von Ψ_{III} .

hat mit Rücksicht auf (5.7) und (5.10) für $|p| \neq 1$ als Weierstraßbild q
eine Kurve 8. Ordnung (Abb. 7)

$$(u^2 v^2 + v^2 + 1)^2 = p^2 (v^2 + 1)^3. \quad (5.11)$$

Die Berührungslinie q selbst ist daher eine Raumkurve 16. Ordnung.
Ihr Grundriß ist eine Kurve 12. Ordnung

$$[x^2(x^2 - 2y)^2 + (x^2 - 2y)^2 + 4]^2 = \frac{p^2}{4} [(x^2 - 2y)^2 + 4]^3, \quad (5.12)$$

ihr Aufriß ist eine (aus Symmetriegründen) doppelt überdeckte Kurve
8. Ordnung

$$(4yz + 2z + 1 - 4\sqrt{2z})^2 = p^2(2z + 1)^3, \quad (5.13)$$

und ihr Kreuzriß eine doppelt überdeckte Kurve 6. Ordnung

$$(2x^2z + 2z + 1)^2 = p^2(2z + 1)^3, \quad (5.14)$$

mit parabolischen Bahnkurven. Demgemäß verträgt die Römerfläche Ψ_{III} die (5.20) entsprechende *affine Grenzdehnung*

$$x' = x + \sigma, \quad y' = y + \sigma x + \frac{1}{2} \sigma^2, \quad z' = z + \sigma x \quad (5.22)$$

mit den Schiebparabeln $v = \text{const}$ als Bahnkurven, ferner die (5.21) entsprechende *Affinitätsgruppe*

$$x' = \rho x, \quad y' = \rho^2 y, \quad z' = \rho^4 z \quad (5.23)$$

mit Bahnkurven von im allgemeinen 4. Ordnung. Unter diesen finden sich die Schmieglinie $C = 0$ und (als Grenzformen) die Plattparabel $b(v = 0)$ in der xy -Ebene sowie die Profilparabel $u = 0$ in der yz -Ebene.

Durch Zusammensetzung gelangt man zu einer *zweigliedrigen Gruppe von affinen Automorphismen* der Fläche Ψ_{III} :

$$\begin{aligned} x' &= \rho(x + \sigma), \\ y' &= \rho^2 \left(y + \sigma x + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \\ z' &= \rho^4 z. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die ∞^1 in ihr enthaltenen eingliedrigen Untergruppen gehen aus der Untergruppe (5.23) durch Transformation mittels der Grenzdehnung (5.22) hervor. Unter ihren Bahnkurven findet sich jeweils eine Schmieglinie, die Plattparabel und eine Profilparabel. Zusammenfassend gilt also

Satz VI: Die Schieb-Römerfläche mit einem einzigen Plattkegelschnitt gestattet eine zweigliedrige kontinuierliche Gruppe von Affinitäten. Unter den Bahnkurven 4. Ordnung der eingliedrigen Untergruppen ist jeweils eine Schmieglinie der Fläche.

Literatur

- [1] Steiner, J., Gesammelte Werke, II (Berlin 1882), 723–724 und 741–742.
- [2] Meyer, W. F., Spezielle algebraische Flächen. Enzykl. math. Wiss. III C 10, 1483–1490 und 1647–1660.
- [3] Wunderlich, W., Römerflächen mit ebenen Fallinien. Ann. mat. pura appl. 57 (1962), 97–108.
- [4] Wunderlich, W., Betrag- und Potentialflächen mit ebenen Fallinien. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. 170 (1962), 105–120.
- [5] Wunderlich, W., Über zwei durch Zylinderrollung erzeugbare Modelle der Steinerschen Römerfläche. Archiv Math. 18 (1967), 325–336.
- [6] Wunderlich, W., Kubische Strahlflächen, die sich durch Bewegung einer starren Parabel erzeugen lassen. Monatsh. Math. 71 (1967), 344–353.
- [7] Dyck, W., Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (München 1892), 266 und 289.
- [8] Eckhart, L., Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 131 (1922), 417–427.