



Kinematisch erzeugbare Römerflächen

Von W. Wunderlich in Wien

1. Einleitung

Als seine „Römerfläche“ bezeichnete J. Steiner eine bemerkenswerte *algebraische Fläche 4. Ordnung und 3. Klasse*, mit der er sich 1844 während eines Aufenthaltes in Rom eingehend beschäftigt hatte [1]. Sie ist durch das Vorhandensein von *drei Doppelgeraden* d_1, d_2, d_3 gekennzeichnet, die in einem *dreifachen Punkt* M zusammenlaufen („Tripelzentrum“). Hieraus folgt, daß sämtliche Tangentialschnitte der Fläche — als ebene Kurven 4. Ordnung mit vier Doppelpunkten — in zwei Kegelschnitte zerfallen. Unter den Tangentialebenen gibt es vier singuläre, welche die Fläche nicht bloß in einem Punkt, sondern jeweils längs eines Kegelschnittes berühren. Diese *vier Plattkegelschnitte* c_i berühren einander paarweise in insgesamt *sechs Zwickpunkten* (uniplanaren Doppelpunkten), von denen je zwei einer der Doppelgeraden d_j angehören. Die genannten Singularitäten können in verschiedener Weise zusammenrücken.

Beim allgemeinen Typus der Fläche bilden die vier singulären Tangentialebenen π_i ($i = 0, 1, 2, 3$) ein nicht ausgeartetes Tetraeder. Durch dieses *Fundamentaltetraeder* und das (noch beliebig wählbare) Tripelzentrum $M \notin \pi_i$ ist die Römerfläche vollständig bestimmt. Macht man das Tetraeder zum Basistetraeder und M zum Einheitspunkt eines Systems homogener projektiver Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$, so läßt sich die Flächen-
gleichung in der Form

$$(1.1) \quad \sqrt{x_0} + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = 0$$

anschreiben [2]. Hieraus folgt, daß irgendzwei Römerflächen des allgemeinen Typs zu einander *kollinear* sind, und daß jede solche Fläche jene 24 Kollineationen gestattet, die M festlassen und die Tetraederecken permutieren¹⁾. Vom reellen Standpunkt aus sind zwei Spielarten des allgemeinen Typs zu unterscheiden, je nachdem ob alle drei Doppelgeraden reell und verschieden sind, oder ob nur eine reell und zwei konjugiert-

¹⁾ Zur konstruktiven Erfassung der Fläche ermittle man zunächst die drei Doppelgeraden d_j als die Treffgeraden aus M an die Gegenkantenpaare des Fundamentaltetraeders. Irgendeine Ebene ε durch eine der Doppelgeraden, etwa d_3 , schneidet dann die Fläche neben der zweifach zu zählenden Geraden noch nach einem Kegelschnitt, von dem sich unmittelbar fünf Tangenten angeben lassen: Es sind dies die Schnittgeraden von ε mit den Tetraederebenen sowie mit der von d_1 und d_2 aufgespannten Ebene; der Berührungspunkt der letztgenannten Tangente muß überdies mit M zusammenfallen. — Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Schnitte der Fläche mit Ebenen durch eine Tetraederkante (Zwicktangente) zu konstruieren: Jeder solche Schnitt besteht aus zwei das Zwickelement enthaltenden Kegelschnitten, von denen sich sofort zwei weitere Tangenten (in den nicht durch die verwendete Kante gehenden Tetraederebenen) und zwei weitere Punkte (auf den zu der verwendeten Kante windschiefen Doppelgeraden) angeben lassen.

imaginär sind. — Für jene Grenzform der Römerfläche, bei der zwei der Doppelgeraden zusammengerückt sind, existiert eine eingliedrige Gruppe von automorphen Kollineationen (mit Kegelschnittsbahnen). Sind alle drei Doppelgeraden vereinigt, so verträgt die Fläche sogar eine zweigliedrige Kollineationsgruppe [3].

Grundlegend für die analytische Behandlung der Römerfläche ist die von K. Th. Weierstraß eingeführte *Parameterdarstellung*

$$(1.2) \quad x_i = Q_i(u, v), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

bei welcher die homogenen Punktkoordinaten x_i eines beliebigen Systems durch quadratische Polynome der (inhomogenen) Flächenparameter u, v ausgedrückt erscheinen [1, 2]. Die für die Fläche charakteristischen ∞^2 Kegelschnitte werden dann einfach durch lineare Relationen zwischen u und v erfaßt. In der durch (1.2) erklärten eindeutigen Abbildung der Römerfläche auf die uv -Ebene entsprechen demnach den Geraden der Bildebene die Flächenkegelschnitte, und man erkennt, daß je zwei solche Kegelschnitte einen Punkt gemeinsam haben und daß sich je zwei Flächenpunkte durch einen Kegelschnitt verbinden lassen.

2. Durch Zylinderrollung erzeugbare Römerflächen

Im Zusammenhang mit gewissen metrisch speziellen Römerflächen, die sich als Beispiele für Flächen mit Parabeln als Falllinien ergeben hatten [4, 5], fand der Verfasser zwei andere Römerflächen, die sich durch eine besonders einfache kinematische Erzeugbarkeit auszeichnen. Sie entstehen nämlich in der Weise, daß ein Drehzylinder vom Radius 2 um einen festen Drehzylinder vom Radius 1 oder in einem festen Drehzylinder vom Radius 3 rollt und dabei eine starre, koaxial angeordnete Parabel mitnimmt [6]. In komplexer Schreibweise lautet die kartesische Darstellung dieser Flächen, wenn der Parabelparameter mit 1 normiert wird (was durch eine affine Streckung in Achsenrichtung stets zu erreichen ist):

$$(2.1) \quad x + iy = e^{\pm 2i\varphi} + r \cdot e^{i\varphi}, \quad z = \frac{1}{2} r^2.$$

Die Veränderliche φ bedeutet dabei den Rollwinkel, r den Abstand des laufenden Parabelpunktes von der Achse des Rollzylinders. Die r -Linien ($\varphi = \text{const}$) stellen demnach die einzelnen Lagen der Profilparabel dar, die φ -Linien ($r = \text{const}$) hingegen die Rollbahnen der einzelnen Profilpunkte; bei lotrecht gedachter z -Achse sind diese Bahnen als die Schichtenlinien ($z = \text{const}$) der Fläche anzusehen. Im ersten Fall (oberes Vorzeichen) handelt es sich dabei um Pascalschnecken, im zweiten Fall (unteres Vorzeichen) um dreifach symmetrische Hypotrochoiden. Beidemale liegen Römerflächen des allgemeinen Typs vor, also mit drei verschiedenen Doppelgeraden. Im ersten Fall ist eine Doppelgerade reell, während die beiden anderen konjugiert-imaginär und unendlich fern sind; das Tripelzentrum liegt im Fernpunkt der z -Achse. Im zweiten Fall sind alle drei Doppelgeraden reell; das Tripelzentrum ist der Punkt $M(0, 0, 1/2)$.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun die durch den verallgemeinerten Ansatz

$$(2.2) \quad x + iy = a \cdot e^{2i\varphi} + b \cdot e^{-2i\varphi} + r \cdot e^{i\varphi}, \quad z = \frac{1}{2} r^2$$

mit beliebigen komplexen Konstanten a, b erklärten Flächen untersucht werden. Daß es sich auch hierbei um *Römerflächen* handelt, lehrt der Übergang zu den homogenen Koordinaten

$$(2.3) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : (x + iy) : (x - iy) : z,$$

denn die Einführung der neuen (komplexen) Parameter

$$(2.4) \quad u = e^{2i\varphi}, \quad v = r \cdot e^{i\varphi}$$

liefert die Darstellung vom Weierstraßschen Typ (1. 2)

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x_0 &= u, \\ x_1 &= uv + au^2 + b, \\ x_2 &= v + \bar{a} + \bar{b}u^2, \\ x_3 &= \frac{1}{2}v^2, \end{aligned}$$

wobei \bar{a} , \bar{b} die zu a , b konjugiert-komplexen Größen bedeuten. Die beiden eingangs erwähnten Modelle (2. 1) ordnen sich mit $a \neq 0$, $b = 0$ bzw. $a = 0$, $b \neq 0$ ein.

Die *Parameterlinien* $\varphi = \text{const}$ sind in jedem Fall untereinander *kongruente Parabeln* vom Parameter 1, deren Vorhandensein die *kinematische Erzeugbarkeit* jeder Fläche (2. 2) bedingt. Da alle Parabelachsen zur xy -Ebene normal sind und die Parabelscheitel ($r = 0$) in dieser Ebene liegen, so ist die erzeugende Bewegung eine *Zylinderrollung*.

Aus der Darstellung (2. 2) ist ersichtlich, daß es sich bei der betreffenden (ebenen) Bewegung um eine sogenannte *Planetenbewegung 3. Stufe* handelt [7], sofern $ab \neq 0$. Die *Bahnkurven* $r = \text{const}$ der Parabelpunkte sind mithin *Radlinien 3. Stufe* der Sippe 2:—2:1, welche bei lotrechter z -Achse die *Schichtenlinien* der Fläche abgeben. Es sind durchwegs rationale Kurven 4. Ordnung, mit Ausnahme der *Scheitelbahn* $r = 0$, die im allgemeinen eine doppelt zu zählende *Ellipse* c_0

$$(2.6) \quad x + iy = a \cdot e^{2i\varphi} + b \cdot e^{-2i\varphi}, \quad z = 0$$

ist, sofern $|a| \neq |b|$; c_0 ist der in der xy -Ebene π_0 verlaufende Plattkegelschnitt.

Um die *Polkurven* der Planetenbewegung zu ermitteln, stelle man dieselbe gemäß (2. 2) in komplexer Form dar:

$$(2.7) \quad x + iy = a \cdot e^{2i\varphi} + b \cdot e^{-2i\varphi} + (\xi + i\eta)e^{i\varphi}.$$

Hierdurch wird die Lagenfolge der bewegten Ebene (ξ , η) gegenüber der ruhenden Ebene (x , y) in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ beschrieben. Jener Punkt $\xi + i\eta$ des bewegten Systems, dessen Bahngeschwindigkeit

$$(2.8) \quad \dot{x} + i\dot{y} = 2ia \cdot e^{2i\varphi} - 2ib \cdot e^{-2i\varphi} + i(\xi + i\eta)e^{i\varphi}$$

verschwindet, gibt den *Drehpol* P (das Momentanzentrum) an. Sein Ort im bewegten System ist die *Gangpolkurve*

$$(2.9) \quad \xi + i\eta = -2a \cdot e^{i\varphi} + 2b \cdot e^{-3i\varphi},$$

das ist eine *Hypotrochoide* mit vierzähliger Symmetrie. Der Ort von P im ruhenden System ist die *Rastpolkurve*

$$(2.10) \quad x + iy = -a \cdot e^{2i\varphi} + 3b \cdot e^{-2i\varphi},$$

also eine *Ellipse*, sofern $|a| \neq 3|b|$. Wie man weiß, rollt die Gangpolkurve im Verlauf der Bewegung auf der Rastpolkurve entlang, ohne zu gleiten. Demnach gilt:

Satz 1. Bei der kinematischen Erzeugung der Römerfläche (2. 2) rollt im allgemeinen ein *Hypotrochoidenzylinder* mit vierzähliger Symmetrie auf einem *elliptischen Zylinder*, wobei er eine *starre, koaxial angeordnete Parabel* mitnimmt.

Im Sonderfall $|a| = 3|b|$ wird der elliptische Zylinder (2. 10) zu einer Ebene, auf der ein Zylinder mit Astroidenbasis (2. 9) rollt (Abb. 5). In den Fällen $a \neq 0, b = 0$ (1. Modell) und $a = 0, b \neq 0$ (2. Modell) reduzieren sich die beiden Zylinder (2. 9) und (2. 10) auf Drehzylinder mit den Radienverhältnissen 2 : 1 bzw. 2 : 3.

Von Interesse ist noch der *Hüllzylinder Δ der Parabelebene*. Seine Basis in der Grundebene π_0 ist die Hüllbahn der ξ -Achse. Berührungspunkt ist jeweils jener Punkt $\xi = r, \eta = 0$, dessen Bahngeschwindigkeit (2. 8) in die ξ -Achse fällt, also deren Richtungsfaktor $e^{i\varphi}$ hat. Der Quotient $(\dot{x} + i\dot{y}) : e^{i\varphi}$ muß mithin reell, d. h. zu sich selbst konjugiert sein. Dies führt auf die Bedingung

$$(2. 11) \quad r = -a \cdot e^{i\varphi} - \bar{a} \cdot e^{-i\varphi} + b \cdot e^{-3i\varphi} + \bar{b} \cdot e^{3i\varphi}.$$

Die Hüllbahn wird dann gemäß (2. 2) dargestellt durch

$$(2. 12) \quad x + iy = -\bar{a} + 2b \cdot e^{-2i\varphi} + \bar{b} \cdot e^{4i\varphi}$$

und ist somit eine *dreispitzige Hypozykloide* (Steiner-Zykloide) mit dem Zentrum $-\bar{a}$ und dem Scheitelkreisradius $|b|$. Der über dieser Basis errichtete Zylinder Δ soll in der Folge als „Leitzylinder“ bezeichnet werden, weil er zur Steuerung der die Römerfläche erzeugenden Bewegung dienen kann: Die Profilparabel ist unter Erhaltung ihrer Achsenrichtung so zu führen, daß ihre Ebene an dem Leitzylinder Δ entlanggleitet, während ihr Scheitel A auf der Plattellipse c_0 (2. 6) wandert. Da die Parabelebene stets Tangentialebene der Römerfläche ist, so ist Δ als deren Berührungszylinder in Achsenrichtung anzusehen²⁾.

Zu einem vorgegebenen Wert $r \neq 0$ gehören sechs der Bedingung (2. 11) genügende Winkelwerte φ (Gleichung 6. Grades für $e^{i\varphi}$). Dies bedeutet, daß die betreffende Schichtenlinie $r = \text{const}$ den Leitzylinder Δ (2. 12) sechsmal berührt, was natürlich nicht immer in reeller Weise geschehen muß (vgl. Abb. 1 und 3). Für die Annahme $r = 0$ sind die sechs Lösungen der Gleichung (2. 11) für $e^{i\varphi}$ paarweise gegengleich, so daß der Plattkegelschnitt c_0 (2. 6) den Leitzylinder Δ nur dreimal berührt. Die zugehörigen Parameterwerte $u = e^{2i\varphi}$ berechnen sich aus der kubischen Gleichung

$$(2. 13) \quad \bar{b}u^3 - au^2 - \bar{a}u + b = 0.$$

Satz 2. Bei der kinematischen Erzeugung der Römerfläche (2. 2) wird eine Parabel unter Erhaltung ihrer Achsenrichtung im allgemeinen so geführt, daß ihre Ebene an einem Zylinder Δ (2. 12) gleitet, der eine dreispitzige Hypozykloide zur Basis hat, während der Parabelscheitel auf einer diese Basiszykloide dreifach berührenden Ellipse c_0 (2. 6) weiterrückt.

Die drei durch (2. 13) bestimmten Berührungspunkte sind *Zwickpunkte* der Fläche (vgl. Abb. 1—4). Die drei *Doppelgeraden* der Fläche enthalten die Zwickpunkte und berühren den Leitzylinder Δ , weil die durch sie legbaren z -parallelen Ebenen auch Tangentialebenen der Fläche sind. Die Doppelgeraden bilden sich daher im Grundriß (Normalriß auf die Grundebene π_0) auf die von den genannten Zwickpunkten ausgehenden Resttangente der Steinerzykloide $\Delta\pi_0$ ab. Der diesen Tangenten gemeinsame Punkt ist demnach der Grundriß des *Tripelzentrums* M der Römerfläche, ihre Restschnittpunkte mit der Zykloide sind die Grundrisse der übrigen drei Zwickpunkte.

Zwecks Ermittlung des Tripelzentrums M sei zunächst die parameterfreie Darstellung der zum Richtungswinkel φ gehörigen Zykloidentangente aufgestellt. Man

²⁾ Für $b = 0$ (1. Modell) reduziert sich der Leitzylinder Δ (2. 12) auf eine Doppelgerade d_1 , zu der noch die beiden uneigentlichen und imaginären Doppelgeraden d_2 und d_3 in den Ebenen $x \pm iy = 0$ treten.

erhält sie durch Elimination des Parameters r aus der Gleichung (2. 2) und der dazu konjugierten in der Form

$$(2. 14) \quad \bar{b}u^3 - (x - iy + a)u^2 + (x + iy + \bar{a})u - b = 0,$$

wenn man die in (2. 4) eingeführte Abkürzung $e^{2i\varphi} = u$ benützt. Für die drei durch einen vorgelegten Punkt (x, y) gehenden Zykloidentangenten ergeben sich die drei Richtzahlen u_1, u_2, u_3 durch Auflösung der kubischen Gleichung (2. 14). Dieselben genügen unter der Voraussetzung $b \neq 0$ der Relation

$$(2. 15) \quad u_1 u_2 u_3 = \frac{b}{\bar{b}}.$$

Dies ist auch eine hinreichende Bedingung für das Zusammenlaufen dreier Zykloidentangenten; für die Richtungswinkel selbst bedeutet das in Übereinstimmung mit einem Satz von E. Laguerre:

$$(2. 16) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv \arg b \pmod{\pi}.$$

Für einen Zwickpunkt fallen zwei Tangenten zusammen, deren gemeinsame Richtzahl $u_1 = u_2 = u$ die Gleichung (2. 13) befriedigt. Die Richtzahl $u_3 = u'$ der Resttangente hängt gemäß (2. 15) mit u durch

$$(2. 17) \quad u^2 u' = \frac{b}{\bar{b}}$$

zusammen und genügt daher der Gleichung

$$(2. 18) \quad \bar{b}u'^3 - \left(2a + \frac{\bar{a}^2}{b}\right)u'^2 + \left(2\bar{a} + \frac{a^2}{\bar{b}}\right)u' - b = 0.$$

Ihre mit (2. 14) übereinstimmende Bauart bestätigt nicht nur das erwartete Zusammenlaufen der drei von den Zwickpunkten ausgehenden Resttangente, sondern gestattet auch durch bloßen Koeffizientenvergleich die Koordinaten des Treffpunktes mit

$$(2. 19) \quad x_M + iy_M = \bar{a} + \frac{a^2}{\bar{b}} = m$$

abzulesen.

Um nun für das Tripelzentrum M die noch fehlende Höhenkote $z_M = \frac{1}{2} r_M^2$ zu berechnen, hat man mit den Lösungen der zu (2. 18) äquivalenten Gleichung

$$(2. 20) \quad \bar{b}u'^3 - (a + \bar{m})u'^2 + (\bar{a} + m)u' - b = 0$$

und gestützt auf (2. 2) und (2. 4) die Größe r_M^2 aus

$$(2. 21) \quad r_M^2 u' = (m - a u' - b u'^{-1})^2$$

zu berechnen. Diese Formel gilt für alle drei Wurzelwerte u'_1, u'_2, u'_3 von (2. 20); bei Summierung der drei gleichberechtigten Formeln treten symmetrische Wurzelfunktionen auf, deren Werte sich durch die Koeffizienten der Gleichung (2. 20) ausdrücken lassen:

$$(2. 22) \quad \begin{aligned} \sum u'_i &= \frac{a + \bar{m}}{\bar{b}}, & \sum u_i^{-1} &= \frac{\bar{a} + m}{b}; \\ \sum u_i'^2 &= \left(\frac{a + \bar{m}}{\bar{b}}\right)^2 - 2\frac{\bar{a} + m}{\bar{b}}, & \sum u_i'^{-2} &= \left(\frac{\bar{a} + m}{b}\right)^2 - 2\frac{a + \bar{m}}{b}. \end{aligned}$$

Nach einiger Rechnung erhält man schließlich

$$(2.23) \quad z_M = \frac{1}{2} r_M^2 = \frac{(a\bar{a} - b\bar{b})^2}{2b\bar{b}}.$$

Der Typ der Römerfläche (2.2) hängt von den Realitätsverhältnissen der drei Zwickpunkte auf c_0 ab, d. h. von der Diskriminante D der kubischen Gleichung (2.13):

$$(2.24) \quad D = a^2\bar{a}^2 + 18a\bar{a}b\bar{b} - 27b^2\bar{b}^2 + 4(a^3b + \bar{a}^3\bar{b}).$$

Je nach dem Vorzeichen dieser reellen Größe sind unter der Voraussetzung $|a| \neq |b|$ ($z_M > 0$) folgende Fälle zu unterscheiden:

$D < 0$. Die drei Zwickpunkte auf der Plattellipse c_0 sind reell und getrennt, ebenso die drei Doppelgeraden der Fläche. Das Tripelzentrum M liegt im Inneren des Leitzyinders Δ . Eine hinreichende (jedoch nicht notwendige) Bedingung für diesen Fall ist auch $|a| < |b|$, denn dann wird mit wachsendem φ die Ellipse c_0 (2.6) im negativen Sinn durchlaufen, und es kommt daher dreimal in reeller Weise vor, daß ihre Tangente den Richtungswinkel φ annimmt. — Abb. 1 und 2 illustrieren das einschlägige Beispiel $a = 1, b = 2i$. Hier ist $x_M + iy_M = 1 + i/2, z_M = 9/8$. Abb. 1 enthält die kinematisch interessanten Dinge, während Abb. 2 eine Ansicht (von oben) der Römerfläche bis zur Kote $z = 8$ mit Schichtenlinien und Einzellagen der Profilparabel zeigt. Man beachte die Rolle der Steinerzykloide (2.12) als Umriß der Fläche.

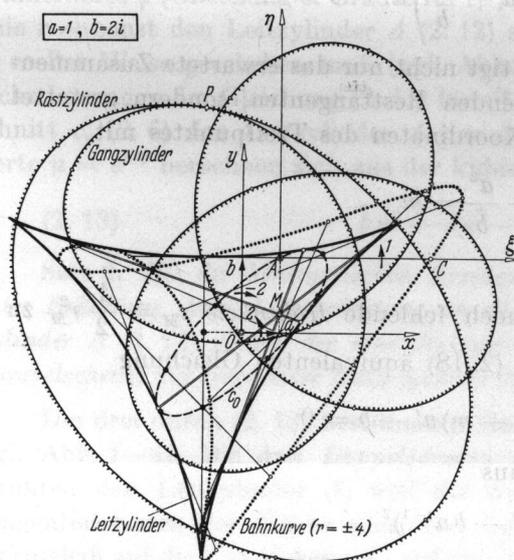


Abb. 1. Kinematische Erzeugung einer Römerfläche mit drei reellen und getrennten Doppelgeraden

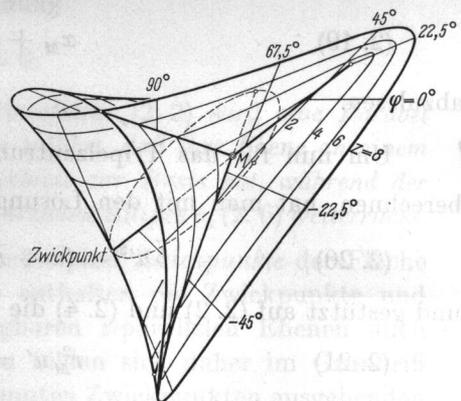


Abb. 2. Grundriß der gemäß Abb. 1 erzeugten Römerfläche

$D > 0$. Von den drei Zwickpunkten auf der Plattellipse c_0 ist einer reell, die beiden anderen sind konjugiert-imaginär. Gleiches gilt für die drei Doppelgeraden. Das Tripelzentrum M liegt außerhalb des Leitzyinders Δ . Nach dem vorhin Gesagten ist jetzt $|a| > |b|$ eine notwendige (jedoch nicht hinreichende) Bedingung für diesen Fall. —

Abb. 3 und 4 illustrieren das einschlägige Beispiel $a = 2, b = i$; hier ist $x_M + iy_M = 2 + 4i, z_M = 9/2$.

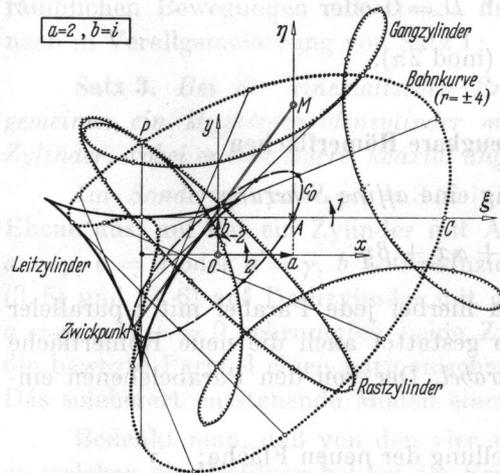


Abb. 3. Kinematische Erzeugung einer Römerfläche mit einer reellen und zwei konjugiert-imaginären Doppelgeraden

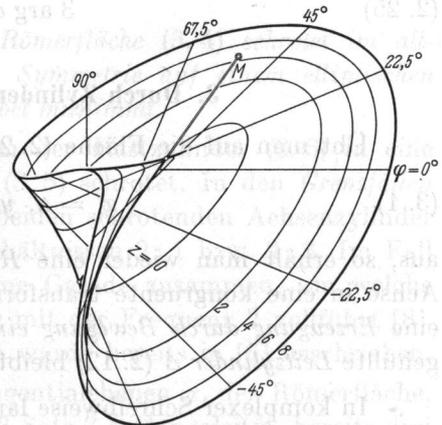


Abb. 4. Grundriß der gemäß Abb. 3 erzeugten Römerfläche

$D = 0$. Von den Doppelgeraden der Fläche sind zwei oder alle drei zusammengerückt. Letzteres tritt dann ein, wenn — dem Verschwinden der zweiten Ableitung von (2.13) entsprechend — außerdem $|a| = 3|b|$. Das Tripelzentrum M liegt auf dem Leitzyylinder Δ , im Falle von drei vereinigten Doppelgeraden auf einer Rückkehrerzeugenden desselben. — Abb. 5 und 6 illustrieren das einschlägige Beispiel $a = 3, b = -1$ ($x_M + iy_M = -6, z_M = 32$).

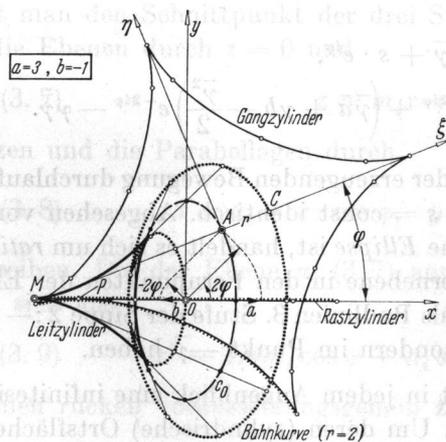


Abb. 5. Kinematische Erzeugung einer Römerfläche mit drei vereinigten Doppelgeraden

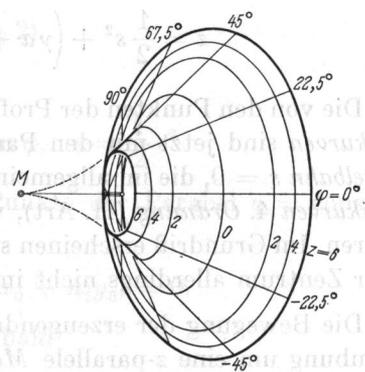


Abb. 6. Grundriß der gemäß Abb. 5 erzeugten Römerfläche

Nun ist noch der *Sonderfall* $|a| = |b|$ zu besprechen. Hier artet die Plattellipse c_0 (2.6) in eine *Tangentenstrecke* der Basiszykloide (2.12) des Leitzyinders Δ aus. Die beiden Streckenenden sind Zwickpunkte, der dritte liegt an der Berührungsstelle und ist mit dem Tripelzentrum M identisch; dementsprechend ist $D \leq 0$. Da die Fläche von der Grundebene π_0 längs der genannten Tangente berührt wird, so sind in derselben im

allgemeinen zwei *vereinigte Doppelgeraden* anzunehmen. Befindet sich das Tripelzentrum in einer Spitze der Steinerzykloide, so liegt der Typ mit drei zusammengerückten Doppelgeraden vor. Dieser Fall ist gekennzeichnet durch $D = 0$ oder

$$(2. 25) \quad 3 \arg a + \arg b \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

3. Durch Zylinderschrotung erzeugbare Römerflächen

Übt man auf die Fläche (2. 2) in z -Richtung eine *affine Scherung*

$$(3. 1) \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + \alpha x + \beta y$$

aus, so erhält man wieder eine *Römerfläche*. Da hierbei jede Parabel mit z -paralleler Achse in eine kongruente transformiert wird, so gestattet auch die neue Römerfläche eine *Erzeugung durch Bewegung einer starren Parabel*. Der von den Parabelebenen eingehüllte *Leitzylinder* Δ (2. 12) bleibt unverändert.

In komplexer Schreibweise lautet die Darstellung der neuen Fläche:

$$(3. 2) \quad \begin{aligned} x' + iy' &= a \cdot e^{2i\varphi} + b \cdot e^{-2i\varphi} + r \cdot e^{i\varphi}, \\ z' &= \frac{1}{2}r^2 + \gamma(a \cdot e^{2i\varphi} + b \cdot e^{-2i\varphi} + r \cdot e^{i\varphi}) + \bar{\gamma}(\bar{a} \cdot e^{-2i\varphi} + \bar{b} \cdot e^{2i\varphi} + r \cdot e^{-i\varphi}), \end{aligned}$$

wobei $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)$. Entsprechende Stellen der Parabeln $\varphi = \text{const}$ sind durch gleichen Anstieg $\partial z'/\partial r = s = \text{const}$ gekennzeichnet, also durch

$$(3. 3) \quad r + \gamma \cdot e^{i\varphi} + \bar{\gamma} \cdot e^{-i\varphi} = s.$$

Führt man statt r diesen Parameter s ein, so nimmt die Darstellung der Fläche (bei Weglassung der Akzente) folgende Form an:

$$(3. 4) \quad \begin{aligned} x + iy &= (a - \gamma)e^{2i\varphi} + b \cdot e^{-2i\varphi} - \bar{\gamma} + s \cdot e^{i\varphi}, \\ z &= \frac{1}{2}s^2 + \left(\gamma a + \bar{\gamma} \bar{b} - \frac{\gamma^2}{2}\right)e^{2i\varphi} + \left(\bar{\gamma} \bar{a} + \gamma b - \frac{\bar{\gamma}^2}{2}\right)e^{-2i\varphi} - \gamma \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Die von den Punkten der Profilparabel bei der erzeugenden Bewegung durchlaufenen *Bahnkurven* sind jetzt mit den Parameterlinien $s = \text{const}$ identisch. Abgesehen von der *Scheitelbahn* $s = 0$, die im allgemeinen wieder eine *Ellipse* ist, handelt es sich um *rationale Raumkurven* 4. Ordnung (II. Art), welche die Fernebene in den Fernpunkten der Ellipse berühren. Im Grundriß erscheinen sie wiederum als Radlinien 3. Stufe der Sippe 2:— 2:1, die ihr Zentrum allerdings nicht im Ursprung, sondern im Punkt $-\bar{\gamma}$ haben.

Die Bewegung der erzeugenden Parabel ist in jedem Augenblick eine infinitesimale Schraubung um eine z -parallele *Momentanachse*. Um deren (zylindrische) Ortsflächen zu ermitteln, ersetze man in der ersten Gleichung (3. 4) nach dem Muster von (2. 7) s durch $\xi + i\eta$ und suche zu der so erklärten Grundrißbewegung die Polkurven auf. Man findet so den *Gangzylinder*

$$(3. 5) \quad \xi + i\eta = 2(\gamma - a)e^{i\varphi} + 2b \cdot e^{-3i\varphi}$$

mit einer vierzähligen Hypotrochoide als Basis, und anschließend den elliptischen *Rastzylinder*

$$(3. 6) \quad x + iy = (\gamma - a)e^{2i\varphi} + 3b \cdot e^{-2i\varphi}.$$

Der Rollung des Gangzylinders auf dem Rastzylinder ist die durch die zweite Gleichung (3.4) definierte *harmonische Schwingung* in Achsenrichtung überlagert, was die bei räumlichen Bewegungen auftretende *Schrotung* der Achsenflächen ergibt. Es gilt demnach in Verallgemeinerung von Satz 1:

Satz 3. *Bei der kinematischen Erzeugung der Römerfläche (3.4) schrotet im allgemeinen ein Hypotrochoidenzylinder mit vierzähliger Symmetrie auf einem elliptischen Zylinder, wobei er eine starre, koaxial angeordnete Parabel mitnimmt.*

Im Sonderfall $|a - \gamma| = 3|b|$ artet wiederum der Rastzylinder (3.6) in eine Ebene aus, auf der ein Zylinder mit Astroidenbasis (3.5) schrotet. In den Grenzfällen $a \neq \gamma, b = 0$ oder $a = \gamma, b \neq 0$ reduzieren sich die beiden schrotenden Achsenzylinder (3.5) und (3.6) auf Drehzylinder mit den Radienverhältnissen 2:1 bzw. 2:3. Im Fall $a = \gamma \neq 0, b = 0$ schrumpfen beide Zylinder auf eine Gerade zusammen, um welche die bewegte Parabel einen harmonischen Umschwung mit der Frequenz 2 vollführt [8]. Das solcherart entstehende Modell einer Römerfläche wurde bereits in [6] beschrieben.

Bedenkt man, daß von den vier singulären Tangentialebenen π_i der Römerfläche, an welchen die Profilparabel bei der Erzeugung gemäß Satz 3 entlanggleitet, bereits drei zur zwangläufigen Führung der Parabel ausreichen, so erhält man die folgende bemerkenswerte Aussage:

Satz 4. *Gleitet eine starre Parabel unter Erhaltung ihrer Achsenrichtung an drei festen Ebenen, die einen eigentlichen Schnittpunkt besitzen, so gleitet sie noch an einer vierten Ebene entlang und erzeugt eine Römerfläche. Die vier Berührungspunkte und der Parabelscheitel wandern dabei im allgemeinen auf Ellipsen, und die Parabelebene hüllt einen Zylinder ein, der eine dreispitzige Hypozykloide zum Querschnitt hat.*

Zum Beweis übe man vorerst eine affine *Scherung* in Achsenrichtung aus, die eine der drei gegebenen Stützebenen zu dieser Richtung normal macht. Da hierbei die Parabeln ihre Größe beibehalten, so genügt es, den Satz für diese besondere Annahme zu beweisen. Wählt man den Schnittpunkt der drei Stützebenen als Koordinatenursprung, so lassen sich die Ebenen durch $z = 0$ und

$$(3.7) \quad z = m_i x + n_i y \quad (i = 1, 2)$$

ansetzen und die Parabellagen durch

$$(3.8) \quad x = x_0 + r \cdot \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \cdot \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2} r^2$$

beschreiben. Die der Ebene π_i (3.7) angehörenden Punkte der Parabel $\varphi = \text{const}$ ergeben sich aus

$$(3.9) \quad r^2 - 2r(m_i \cos \varphi + n_i \sin \varphi) - 2(m_i x_0 + n_i y_0) = 0.$$

Dieselben rücken voraussetzungsgemäß zusammen, sobald

$$(3.10) \quad (m_i \cos \varphi + n_i \sin \varphi)^2 + 2(m_i x_0 + n_i y_0) = 0.$$

Für die Koordinaten x_0, y_0 des Parabelschilds folgen daraus die Bedingungen

$$(3.11) \quad m_i x_0 + n_i y_0 = \frac{n_i^2 - m_i^2}{4} \cos 2\varphi - \frac{m_i n_i}{2} \sin 2\varphi - \frac{m_i^2 + n_i^2}{4} \quad (i = 1, 2).$$

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems, dessen Determinante nicht verschwindet, gelangt man zu einer Darstellung der Bauart

$$(3.12) \quad x_0 = A_1 \cos 2\varphi + B_1 \sin 2\varphi + C_1, \quad y_0 = A_2 \cos 2\varphi + B_2 \sin 2\varphi + C_2.$$

Sie führt zusammen mit (3. 8), von unwesentlichen additiven Konstanten abgesehen, auf eine Darstellung der von der Parabel überstrichenen Fläche nach dem Muster (2. 2), womit dieselbe als *Römerfläche* nachgewiesen ist.

4. Durch Bewegung einer starren Parabel erzeugbare Römerflächen

Die Frage nach allen kinematisch erzeugbaren Römerflächen liegt jetzt nahe, erscheint aber in ihrer allgemeinen Fassung unangreifbar. Schränkt man sie jedoch im Hinblick auf die hier erörterten Beispiele auf solche Römerflächen ein, die durch Bewegung einer starren *Parabel* entstehen können, so läßt sie sich fast vollständig beantworten. In der Folge werden also Römerflächen betrachtet, auf welchen eine Schar kongruenter Parabeln als existent angenommen wird.

Hinsichtlich des Verhaltens der *Achsenrichtung* und der *Ebenenstellung* der die Schar durchlaufenden Parabel, gekennzeichnet durch deren Fernpunkt Q und die Ferntangente q , sind *drei Hauptfälle* zu unterscheiden.

I. Achsenrichtung veränderlich.

Nimmt man an, daß der Fernpunkt Q der bewegten Parabel auf einer Linie l der Fernebene variiert, so muß sich auch die Ferntangente q verändern. Denn wäre q fest, so müßte l mit q zusammenfallen und die Gerade $l = q$ wäre eine Doppelgerade der Fläche; die Parabeln wären dann Flächenkegelschnitte, welche eine Doppelgerade in verschiedenen Punkten berühren, was den Eigenschaften der Römerflächen widerspricht.

Die Linienelemente (Q, q) gehören daher nicht einer einzigen Geraden an. Im allgemeinen werden sie von den Elementen der Linie l verschieden sein. Dies bedeutet, daß die Fläche von der Fernebene längs l berührt wird: l ist demnach ein (uneigentlicher) *Plattkegelschnitt* der Römerfläche oder die gerade Grenzform eines solchen. Unter diesen Umständen sind aber sämtliche Flächenkegelschnitte *Parabeln*, weil sie die Fernebene jeweils in einem Punkt von l berühren. Je ∞^1 kongruente unter diesen ∞^2 Parabeln führen dann auf eine kinematische Erzeugungsmöglichkeit der Fläche.

Satz 5. *Besitzt eine Römerfläche einen uneigentlichen Plattkegelschnitt oder zwei in der Fernebene zusammengerückte Doppelgeraden, so sind ihre sämtlichen Kegelschnitte Parabeln und sie ist auf ∞^1 Arten durch Bewegung einer starren Parabel erzeugbar.*

Spezielle Beispiele solcher Römerflächen sind bekannt [3, 5], doch ist die erzeugende Bewegung im allgemeinen sehr kompliziert.

Stimmen hingegen die Linienelemente (Q, q) durchwegs mit den Elementen der Linie l überein, so kann l kein Kegelschnitt sein, weil zwei Flächenkegelschnitte einander nur dann berühren, wenn sie ein Zwickel-element gemeinsam haben. Die Fernkurve l ist mithin eine *rationale Quartik*; wie jeder ebene Schnitt der Römerfläche bildet sie sich in der Weierstraßschen Parameterebene (Abschn. 1) auf einen nichtausgearteten Kegelschnitt ab. Dessen Tangenten sind die Bilder von ∞^1 Flächenparabeln. Ob letztere kongruent ausfallen können, ist eine schwierige, vermutlich zu verneinende Frage, die bis auf weiteres offen bleibt.

II. Achsenrichtung fest, Ebenenstellung veränderlich.

Haben alle Parabeln der Bewegschar gemeinsamen Fernpunkt Q , jedoch verschiedene Ferntangente q , so ist Q ein regulärer Punkt der Römerfläche, die dort von der Fernebene berührt wird. Läßt man eine der Parabeln um ihre Achse rotieren, so entsteht ein *Drehparaboloid*, das von allen übrigen der voraussetzungsgemäß kongruenten Parabeln

im Fernsichel Q oskuliert wird. Es handelt sich mithin um ein die Fläche in Q oskulierendes Paraboloid. Seine beiden Fernerzeugenden i und j , die konjugiert-imaginär sind und den absoluten Kegelschnitt berühren, stellen die beiden zu Q gehörigen Schmiegtangenten (Haupttangente) dar³⁾. Der der Fläche aus Q umschriebene Berührzylinder 3. Klasse Δ besitzt die Fernebene zur Doppeltangentialebene und berührt dieselbe längs i und j ⁴⁾. Der Querschnitt des Zylinders Δ mit einer zu Q normalen Ebene ist demzufolge eine Kurve 3. Klasse, welche die Ferngerade in den absoluten Punkten berührt; nach einem Satz von L. Cremona handelt es sich dann um eine dreispitzige Hypozykloide. Der Zylinder Δ enthält alle Zwickelmente der Fläche und wird daher von jedem Plattkegelschnitt an drei (eventuell zusammengerückten) Stellen berührt.

Mindestens ein Plattkegelschnitt ist auf jedem Römerflächentyp sicher vorhanden, und im vorliegenden Fall geht er gewiß nicht durch Q , weil Q ein elliptischer Flächenpunkt ist. Übt man nun eine affine Scherung in Richtung Q aus, bis die Ebene des erwähnten Plattkegelschnittes zu Q normal wird, so bleibt der Zylinder Δ erhalten und die ∞^1 durch Q gehenden Parabeln werden in kongruente transformiert. Damit sind aber genau die Verhältnisse von Satz 2 erreicht: Eine Parabel wird unter Erhaltung ihrer Achsenrichtung so geführt, daß ihre Ebene einen Zylinder 3. Klasse Δ umhüllt und ihr Scheitel auf einem die dreispitzige Basiszykloide von Δ dreifach berührendem Kegelschnitt wandert. Nach Rückgängigmachen der affinen Scherung hat man die Verhältnisse von Abschnitt 3.

Satz 6. *Berührt eine Römerfläche die Fernebene in einem Punkt mit isotropen Schmiegtangenten, oskuliert sie also ein Drehparaboloid in dessen uneigentlichem Scheitel, so gestattet sie eine kinematische Erzeugung gemäß Satz 1 oder 3.*

Ein anderer Beweis könnte sich für Römerflächen mit drei verschiedenen Doppelgeraden auf Satz 4 stützen.

III. Achsenrichtung und Ebenenstellung fest.

Haben alle Parabeln der Bewegechar denselben Fernpunkt Q und dieselbe Ferntangente q , so ist ihr gemeinsames Element (Q, q) ein Zwickelment. Die Schar der gleichgestellten Parabeln kann im Zuge einer krummen Schiebung durchlaufen werden, und die betreffende Römerfläche ist eine Schiebfläche. Längs jeder Parabel der Schiebschar läßt sich der Fläche ein (parabolischer) Zylinder Π umschreiben, dessen (uneigentliche) Spitze einer zweiten Zwickeltangente p angehört, denn nur aus einem solchen Punkt geht ein zerfallender Tangentialkegel 3. Klasse an die Römerfläche. Hier besteht derselbe aus Π und dem Ebenenbüschel mit der uneigentlichen Achse p . Das zweite Zwickelment (P, p) ist ebenfalls ein uneigentliches. Die zur Parabelschar konjugierte Schar der Schieb bahnen besteht aus Flächenkurven, deren Tangenten die Ferngerade p treffen. Es sind mithin Kurven, die in den Ebenen durch p verlaufen, also wiederum Parabeln, die jetzt das Zwickelment (P, p) gemeinsam haben. Man könnte sie auch als die Berührungslinien der der Fläche aus den Punkten von q umschreibbaren Zylinder erhalten.

Man überzeugt sich leicht, daß durch Verschiebung einer Parabel längs einer anderen tatsächlich stets eine Römerfläche entsteht, sofern die Achsenrichtungen verschieden sind ($P \neq Q$). Diese in einer eigenen Abhandlung [3] genauer untersuchten Schieb r ö m e r f l ä c h e n besitzen zwei oder drei im Unendlichen vereinigte Doppelgeraden, wie schon daraus her-

³⁾ Einen solchen Punkt könnte man mit einiger Berechtigung als „uneigentlichen Nabelpunkt“ ansprechen.

⁴⁾ Diese Aussage ist dual zu der bekannten Tatsache, daß die Schnittkurve einer Fläche mit der Tangentialebene eines regulären Punktes an der Berührungsstelle einen Doppelpunkt aufweist, dessen Tangenten mit den Schmiegtangenten der Fläche zusammenfallen.

vorgeht, daß die beiden Zwickelmente (P, p) und (Q, q) nicht windschief sind⁵⁾. Längs der in PQ zusammengerückten Doppelgeraden wird die Fläche von der Fernebene berührt. Hieraus folgt, daß sämtliche ∞^2 Flächenkegelschnitte Parabeln sind, was wie in I ∞^1 Möglichkeiten der Flächenerzeugung durch Bewegung einer starren Parabel bedingt. Die neben der Schiebung vorhandenen kinematischen Erzeugungsweisen sind jedoch sehr kompliziert [3].

Da alle Römerflächen mit zwei uneigentlichen Zwickelmenten untereinander affin sind (wobei die durch Fußnote 5 gekennzeichneten eine eigene Klasse bilden), so gilt auch die Umkehrung:

Satz 7. *Besitzt eine Römerfläche zwei uneigentliche Zwickelmente, berührt sie also die Fernebene längs zwei oder drei zusammengerückten Doppelgeraden, so ist sie eine Schiebfläche, die durch Verschiebung einer Parabel längs einer anderen entsteht. Daneben ist sie noch auf ∞^1 weitere Arten durch Bewegung einer starren Parabel erzeugbar.*

⁵⁾ In der Ferngeraden PQ sind alle drei Doppelgeraden vereinigt, wenn $P \in q$ oder $Q \in p$, andernfalls nur zwei.

Literatur

- [1] J. Steiner, Gesammelte Werke, II (Berlin 1882), 723—724, 741—742.
- [2] W. F. Meyer, Spezielle algebraische Flächen. Enzykl. Math. Wiss. III C 10, 1483—1490, 1647—1660.
- [3] W. Wunderlich, Durch Schiebung erzeugbare Römerflächen. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. (im Druck).
- [4] W. Wunderlich, Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien. J. f. reine u. angew. Math. **208** (1961), 204—220.
- [5] W. Wunderlich, Römerflächen mit ebenen Fallinien. Annali mat. pura appl. **57** (1962), 97—108.
- [6] W. Wunderlich, Über zwei durch Zylinderrollung erzeugbare Modelle der Steinerschen Römerfläche. Archiv Math. **18** (1967), 325—336.
- [7] W. Wunderlich, Höhere Radlinien. Österr. Ing. Archiv **1** (1947), 277—296.
- [8] W. Kautny, Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. **60** (1956), 66—82.

Technische Hochschule, 1040 Wien IV, Karlsplatz 13

Eingegangen 25. Oktober 1967