Superficie con linee di pendio piane

Walter Wunderlich

È ben nota la rappresentazione grafica di una superficie qualunque mediante le sue *linee di livello*, cioè le sue sezioni con piani orizzontali. In certi casi, per es. nelle carte topografiche o per le superficie utilizzate come diagramma spaziale di una funzione analitica di una variabile complessa, si considerano anche le *linee di pendio*, cioè le traiettorie ortogonali del sistema delle linee di livello.

Mentre le linee di livello sono curve piane per definizione, le linee di pendio sono in generale curve sghembe. Si può porre la questione, se esistono superficie in cui tutte le linee di pendio sono *curve piane*.

Una risposta affermativa ma banale è fornita dal piano (ove le linee di pendio sono rette), dai cilindri con generatrici orizzontali, dalle superficie rotonde con asse verticale, e più generalmente dalle *superficie modanate*, generate da un profilo piano, il cui piano si fa rotolare su un cilindro verticale: i punti del profilo descrivono le linee di livello e l'insieme delle posizioni del profilo costituisce il sistema delle linee di pendio.

Se escludiamo questi casi banali, rimane ancora la questione concernente quelle superficie, per cui le linee di pendio sono situate in piani non verticali. Un primo esempio fu menzionato dal E. Müller nel 1911 [1]. Si tratta di una *superficie elicoidale* con asse verticale, generata da una *parabola* appartenente al complesso quadratico delle tangenti del movimento. Un secondo esempio fu segnalato da L. Eckhart nel 1922 [2]. Egli ha scoperto una *superficie algebrica* del 4º ordine, per cui le linee di livello sono iperboli, mentre tutte le linee di pendio sono *cerchi*.

Non è difficile dare una costruzione geometrica che fornisca tutte le superficie con linee di pendio piane. Sia T un punto generico di una superficie V qualsiasi, t_1 la tangente orizzontale in T, e t_2 la tangente ortogonale a t_1, detta *tangente di pendio* (o di massima pendenza). Il sistema delle ∞^2 tangenti t_2 costituisce una *congruenza di rette*, per la quale la superficie V rappresenta una falda della *superficie focale*. Per trovarne la seconda falda, consideriamo tutti i piani tangenti a V con pendenza fissa α; essi inviluppano una superficie sviluppabile Λ_α a pendenza costante. Le generatrici di questa sviluppabile sono tangenti di pendio della superficie V e toccano una certa curva sghemba l_α, lo spigolo di regresso di Λ_α. Facendo variare la pendenza α, otteniamo ∞^1 curve l_α che formano una superficie W; essa è la seconda falda focale della congruenza di pendio della superficie data V. Le tangenti di ogni linea di pendio di V costituiscono una sviluppabile che è circoscritta alla superficie W.

Ora, se le linee di pendio di V sono *piane*, le sviluppabili menzionate sono piani. Ne segue che la falda focale W, come inviluppo di questi piani, dev'essere una *superficie sviluppabile* oppure ridursi — nel caso limite — ad una *retta*.

Invertendo il procedimento, si arriva alla *costruzione* seguente: Si assegna ad arbitrio una *sviluppabile* W e si tracciano su essa ∞^1 *linee* l_α *di pendenza costante* (con valori diversi di pendenza α). Le ∞^1 superficie sviluppabili Λ_α, determinate dagli spigoli di regresso l_α, inviluppano allora la superficie cercata V, dotata di linee di pendio piane che si trovano nei piani tangenti della sviluppabile W [3].

Per dare un esempio, scegliamo come W un *elicoide sviluppabile* con asse verticale e consideriamo su questo elicoide il sistema delle *eliche* l_α. Arriviamo così alla superficie del Müller che possiede *parabole* come linee di pendio.

Nel caso limite abbiamo in generale una *retta propria* W — da considerare come cilindro infinitamente sottile — e le linee l_α ridotte ai *punti* di questa retta. Le sviluppabili Λ_α di pendenza costante sono allora *coni rotondi* con assi verticali ed aperture arbitrarie, aventi i vertici sulla retta W. Se, per es., la retta W è orizzontale e i coni Λ_α toccano un cilindro rotondo fisso con asse orizzontale e ortogonale a W, la superficie V inviluppo dei coni Λ_α è la superficie dell'Eckhart, per cui le linee di pendio sono *cerchi* concentrici, situati nei piani del fascio W [4].

Se invece W è una *retta impropria*, i coni rotondi Λ_α degenerano in *piani*, e la superficie V diviene una *sviluppabile*. Si mostra senza difficoltà che le superficie sviluppabili con linee di pendio piane sono completamente caratterizzate dal fatto che il *cono direttore* è sempre un cono particolare del 2º ordine, un cosiddetto cono di Reye [3]. Un tale cono ha per base una parabola in un piano orizzontale ed il suo vertice si trova sopra il fuoco della parabola. Questo cono è esso stesso una superficie con linee di pendio piane, cioè parabole.

Supponiamo, nel caso generale, che ogni linea di pendio possieda una *tangente orizzontale*. Poi nel punto di contatto il piano tangente alla superficie è anche orizzontale. Se questi punti non coincidono, il loro luogo sarà una *linea orizzontale* lungo cui la superficie è tangente ad un piano di livello (linea di valle o di cresta).

Supponiamo d'altra parte, per una superficie analitica, che ogni linea di pendio possieda un piano tangente *verticale e isotropo* τ. Se la tangente di pendio appartenente non è orizzontale — condizione soddisfatta in generale per linee di pendio piane — si trova che la tangente di livello nel punto di contatto è isotropa e perciò appartiene al piano τ. Ne segue che τ è piano tangente alla superficie. Integrando questi elementi superficiali, si conclude che per una superficie analitica con linee di pendio piane, in una proiezione ortogonale su un piano orizzontale, le linee di livello e le linee di pendio sono rappresentate da due *sistemi confocali*.

Queste osservazioni possono servire alla determinazione delle superficie per cui le linee di pendio sono *coniche*. Consideriamo il caso di coniche con *centro proprio*. Nella proiezione ortogonale su un piano orizzontale le linee di pendio sono allora rappresentate in generale da un sistema confocale d'ellissi o iperboli. Poiché le traiettorie ortogonali di questo sistema sono anch'esse coniche, le linee di livello delle superficie cercate sono pure iperboli o ellissi. Alcune di esse saranno linee di valle o di cresta. Un breve calcolo prova l'esistenza di tali superficie [3]. Si tratta in generale di *superficie algebriche* dell'8º ordine. Le loro coniche di pendio sono concentriche e situate nei piani tangenti ad un cono di classe 4 [5]. In casi particolari l'ordine della superficie può ridursi a 4 (superficie dell'Eckhart).

Il caso di *parabole* di pendio è più complicato, perché il sistema delle parabole monofocali nella proiezione non è determinato per sé. Ho indicato due *trasformazioni* puntuali algebriche nello spazio, che forniscono le superficie cercate, se sono applicate ad una sviluppabile arbitraria di pendenza costante [5]. Si trovano fra queste superficie oltre l'elicoide del Müller ed il cono di Reye alcune forme particolari della superficie romana di Steiner [6].

Ho determinato anche fra le superficie utilizzate nella teoria delle funzioni complesse $w = f(z)$ — quota $|w|$ oppure $\mathrm{Re}\, w$ sopra il piano della variabile complessa z — quelle, per cui le linee di pendio (rappresentando i luoghi $\arg w = \text{cost.}$ risp. $\mathrm{Im}\, w = \text{cost.}$) sono piane [7].

J. Krames ha provato che il conoide del 4º ordine, costituito dalle normali ad un cilindro rotondo verticale nei punti di una sezione piana ellittica, rappresenta l'unica *rigata sghemba* con linee di pendio piane, cioè ellissi [8].

Sarebbe interessante trovare tutte le superficie algebriche con linee di pendio piane.

Bibliografia.

[1] E. Müller, *Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwendung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen*, « Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien », **120**, 1763-1810 (1911).

[2] L. Eckhart, *Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind*, « Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien », **131**, 417-427 (1922).

[3] W. Wunderlich, *Flächen mit ebenen Fallinien*, « Monatsh. Math. », **65**, 291-300 (1961).

[4] W. Wunderlich, *Axiale Ebenenverwandtschaften*, « Monatsh. Math. », **67**, 145-162 (1963).

[5] W. Wunderlich, *Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien*, « J. reine angew. Math. », **208**, 204-220 (1961).

[6] W. Wunderlich, *Römerflächen mit ebenen Fallinien*, « Annali di Mat. », **57**, 97-108 (1962).

[7] W. Wunderlich, *Betrag- und Potentialflächen mit ebenen Fallinien*, « Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. », **170**, 105-120 (1962).

[8] J. Krames, *Die windschiefen Flächen mit ebenen Fallinien*, « Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. », **172**, 159-172 (1963).