

Angenäherte Herstellung von Ellipsen

Von W. WUNDERLICH

Ein einfacher, zur Bearbeitung von elliptischen Profilen geeigneter Mechanismus erzeugt bei Verwendung eines rotierenden Fräsers als Werkzeug Toroiden (Parallelkurven von Ellipsen). Für die geringe Abweichung einer Toroiden von der Ellipsenform werden Formeln und Nomogramme entwickelt.

A simple mechanism is described which generates toroids by means of a rotating milling tool. The mechanism may be used for machining elliptical profiles. For the small deviation of a toroid from the elliptic form formulas and nomograms are given.

Простой механизм, пригодный для обработки эллиптических профилей, производит при пременении вращающейся фрезы в качестве инструмента тороиды (параллельные к эллипсу кривые). Выводятся формулы и строятся диаграммы для малых отклонений тороида от эллиптической формы.

I. Vorrichtung zur Erzeugung von Ellipsen

Wird ein Gelenkparallelogramm $OMCN$ in O fest gelagert, während die von dort ausgehenden Seiten der Längen $OM = m$ und $ON = n < m$ mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten $+1$ und -1 angetrieben werden, so beschreibt das Gelenk C bekanntlich eine in O zentrierte Ellipse c mit den Halbachsen

$$a = m + n, \quad b = m - n. \quad (1)$$

Für einen Beobachter im System OM erscheint dasselbe in Ruhe befindlich, wogegen sich für ihn die Ellipse c mit der Relativgeschwindigkeit -1 um O dreht und das Glied MC mit der Geschwindigkeit -2 um M rotiert (Bild 1). Einem Beobachter im System ON hingegen scheint dieses stillzustehen, während sich die Ellipse mit

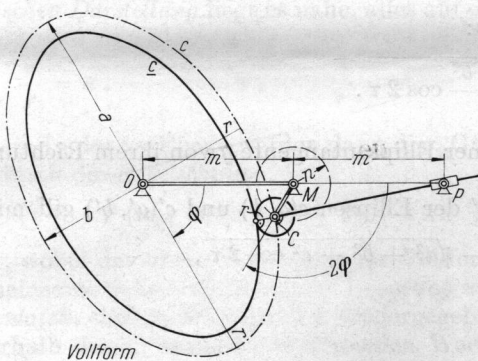


Bild 1

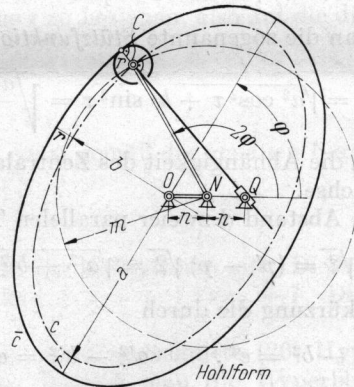


Bild 2

der Geschwindigkeit $+1$ um O dreht und das Glied NC mit der Geschwindigkeit $+2$ um N rotiert (Bild 2). Damit eröffnen sich zwei einfache, im wesentlichen gleichartige Möglichkeiten zur *Bearbeitung von elliptischen Profilen*: Das Werkstück dreht sich um seinen Mittelpunkt O , während ein exzentrisch angeordnetes Werkzeug C mit doppelter Geschwindigkeit um eine in M bzw. N vorzusehende Achse kreist. Die Gliederabmessungen m und n für gewünschte Halbachsenwerte a und b sind aus (1) sofort zu bestimmen. Entsprechende Verstellbarkeit der Vorrichtung wäre leicht zu realisieren.

Ein in C vorzustellendes *punktförmiges Werkzeug* — etwa ein Diamant oder ein Schneidbrenner — würde dabei exakt eine Ellipse c erzeugen, soweit man von unvermeidlichen technischen Abweichungen absieht. Ein Sägeblatt würde noch einer *Steuerung* bedürfen, die seine Schneidrichtung stets tangential hält. Dies könnte unschwer mit Benützung der Ellipsennormale CP (CQ) geschehen, die dauernd durch den zu O bezüglich $M(N)$ spiegelbildlich angeordneten, festen Pol $P(Q)$ zu führen wäre (Bild 1 und 2).

Wird hingegen in C die Achse eines rotierenden *Fräsers* vom Radius r angenommen, so erzeugt derselbe die *Parallelkurven* der von C durchlaufenen Ellipse c im Abschnitt $\pm r$, und zwar bei der Bearbeitung einer Vollform die innere Parallelkurve \underline{c} (Bild 1), bei der Bearbeitung einer Hohlform die äußere Parallelkurve \bar{c} (Bild 2). Solche Kurven sind unter dem Namen *Toroiden* wohlbekannt, weil sie in der darstellenden Geometrie als Umrißkurven der Torusfläche (Ringfläche) für Normalprojektion auf eine Ebene auftreten. Es handelt sich um algebraische Kurven 8. Ordnung. Während die äußeren Parallelkurven \bar{c} stets konvex sind, ist dies für die inneren Parallelkurven \underline{c} nur dann der Fall, wenn der Abstand r hinreichend klein ist ($r \leq b^2/a$). — Um mit

dem Fräser die Ellipse c herzustellen, müßte seine Achse auf dem vorhin erwähnten Steuerungsglied CP (Bild 1) bzw. CQ (Bild 2) um den Betrag r nach außen bzw. innen abgerückt werden, wie dies von Vorrichtungen zur Bearbeitung von beliebigen Radlinien mit Fräsern oder Schleifscheiben bekannt ist¹⁾.

II. Annäherung von Ellipsen durch Toroiden

Kommt es nicht auf die genaue Ellipsengestalt an, sondern lediglich auf die Herstellung oder Bearbeitung eines ellipsenartigen *Ovals*, so kann die Ellipse mit guter Näherung durch eine Toroide ersetzt werden, was den Vorteil des Fortfalls von Steuergliedern bietet. Gegenstand der vorliegenden Note ist es nun, die *Abweichung* eines Toroidenovals mit den Halbachsen a und b von der Ellipse c mit denselben Halbachsen zu untersuchen, wenn es mit einem Fräser vom Halbmesser r erzeugt wurde. Falls es als Vollform entstand (Bild 1), so ist es eine innere Parallelkurve der Ellipse c' mit den Halbachsen $a' = a + r$ und $b' = b + r$; es verläuft ganz im Inneren der Ellipse c und die Maximalabweichung h ist der Unterschied zwischen r und dem Normalabstand d_0 zwischen c und c' . Entstand das Toroidenoval hingegen als Hohlform (Bild 2), so ist es eine äußere Parallelkurve der Ellipse c' mit den Halbachsen $a' = a - r$ und $b' = b - r$; es verläuft ganz im Außengebiet von c und die Maximalabweichung h ist wiederum der Unterschied zwischen r und dem Normalabstand d_0 der Ellipsen c und c' .

Die Berechnung von h erfordert zunächst einmal die Ermittlung des Normalabstandes d_0 zweier *koaxialen Ellipsen* c und c' . Eine durch ihre HESSESCHE Normalform

$$x \cos \tau + y \sin \tau = p \quad (2)$$

angesetzte Gerade g berührt die Ellipse c

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \quad (3)$$

wenn sie ihren Pol G mit den Koordinaten

$$x_0 = \frac{a^2 \cos \tau}{p}, \quad y_0 = \frac{b^2 \sin \tau}{p} \quad (4)$$

enthält. Dies liefert die Bedingung

$$a^2 \cos^2 \tau + b^2 \sin^2 \tau = p^2. \quad (5)$$

Damit hat man die sogenannte *Stützfunktion* der Ellipse c :

$$p = \sqrt{a^2 \cos^2 \tau + b^2 \sin^2 \tau} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cos 2\tau}. \quad (6)$$

Sie beschreibt die Abhängigkeit des Zentralabstandes p einer Ellipsentangente g von ihrem Richtungswinkel τ gegen die y -Achse.

Für den Abstand d zweier parallelen Tangenten g, g' der Ellipsen $c(a, b)$ und $c'(a', b')$ gilt mithin

$$d \sqrt{2} = (p' - p) \sqrt{2} = \sqrt{a'^2 + b'^2 + e'^2 \cos 2\tau} - \sqrt{a^2 + b^2 + e^2 \cos 2\tau}, \quad (7)$$

wobei zur Abkürzung die durch

$$a^2 - b^2 = e^2, \quad a'^2 - b'^2 = e'^2 \quad (8)$$

definierten linearen Exzentrizitäten e und e' eingeführt wurden. Für den *Maximalabstand* d_0 muß die Ableitung von (7) nach τ verschwinden:

$$\frac{e'^2 \sin 2\tau}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + e'^2 \cos 2\tau}} = \frac{e^2 \sin 2\tau}{\sqrt{a^2 + b^2 + e^2 \cos 2\tau}}. \quad (9)$$

Nach Ausschaltung der durch die parallelen Scheiteltangentenpaare gelieferten trivialen Lösungen $\sin 2\tau = 0$ ergibt sich aus (9) für den Richtungswinkel τ_0 des interessierenden Abstandes d_0 :

$$\cos 2\tau_0 = \frac{e^4 (a'^2 + b'^2) - e'^4 (a^2 + b^2)}{e^2 e'^2 (e'^2 - e^2)}. \quad (10)$$

Hierzu gehören gemäß (6) die Zentralabstände

$$p_0 = \frac{e}{e'} \sqrt{\frac{a^2 b'^2 - a'^2 b^2}{e'^2 - e^2}}, \quad p'_0 = \frac{e'}{e} \sqrt{\frac{a^2 b'^2 - a'^2 b^2}{e'^2 - e^2}}. \quad (11)$$

Für den gesuchten Normalabstand $d_0 = p'_0 - p_0$ erhält man so:

$$d_0 = \frac{1}{e'} \sqrt{(e'^2 - e^2) (a^2 b'^2 - a'^2 b^2)}. \quad (12)$$

¹⁾ Vgl. R. MUSYL: Das K-Profil, eine zyklische Kurve. Österr. Ing. Archiv 1 (1946), 59–63. Siehe auch F. HOHENBERG: Konstruktive Geometrie in der Technik (Wien, 2. Aufl. 1961), S. 270.

Nun ist es an der Zeit, auf Grund der für *Vollformen* bestehenden Festsetzungen

$$a' = a + r, \quad b' = b + r, \quad e'^2 = (a - b)(a + b + 2r) \quad (13)$$

weiterzuentwickeln. Man gelangt so über

$$d_0 = r \sqrt{\frac{4ab + 2(a+b)r}{(a+b)(a+b+2r)}} \quad (14)$$

zu der gesuchten *Abweichung*

$$h = r - d_0. \quad (15)$$

Quadriert man die Formel (14), nachdem man $d_0 = r - h$ gesetzt hat, so kann man wegen der Kleinheit von h das Glied h^2 vernachlässigen. Auf diese Weise gewinnt man die brauchbare *Näherungsformel*

$$h \approx \frac{(a-b)^2 r}{2(a+b)(a+b+2r)}. \quad (16)$$

Zur Beurteilung betrachte man das schon recht extreme numerische Beispiel $a = 4, b = 2, r = 1$. Die genaue Rechnung über (14) und (15) liefert die Abweichung $h = 1/(12 + 2\sqrt{33}) = 0,0426, \dots$, während die Näherungsformel (16) auf $h \approx 1/24 = 0,0417 \dots$ führt.

Bei der Behandlung von *Hohlformen* ist in (13) r durch $-r$ zu ersetzen. Dementsprechend ergeben sich dann mit Unterdrückung des negativen Vorzeichens bei d_0 und h die Formeln

$$h = r - d_0 \quad \text{mit} \quad d_0 = r \sqrt{\frac{4ab - 2(a+b)r}{(a+b)(a+b-2r)}} \quad (17)$$

und

$$h \approx \frac{(a-b)^2 r}{2(a+b)(a+b-2r)}. \quad (18)$$

Als numerisches Beispiel diene $a = 5, b = 3, r = 1$; die Werte für h sind die gleichen wie vorhin.

III. Nomogramme

Zur *graphischen Darstellung* liegt es nahe, alles auf den Fräserradius r zu beziehen, also auf die dimensionslosen Größen

$$\frac{a}{r} = u, \quad \frac{b}{r} = v, \quad \frac{h}{r} = w \quad (19)$$

überzugehen. In der uv -Ebene werden dann die „Gütelinien“ $w = \text{const}$ gemäß der genauen Formeln (14), (15) bzw. (17) durch die *Kegelschnitte*

$$(1-w)^2(u+v)(u+v \pm 2) = 4uv \pm 2(u+v) \quad (20)$$

dargestellt, wobei das obere Vorzeichen für *Vollformen*, das untere für *Hohlformen* gilt. Diese Kegelschnitte haben gemeinsame Scheitelelemente im Ursprung $u = v = 0$ und in $u = v = -1$ bzw. $+1$. Die entsprechenden *Kurventafeln* sind in Bild 3 und 4 wiedergegeben.

Innerhalb des in Betracht kommenden Wertebereiches sind die Kegelschnitte (20) Hyperbeln, deren Asymptotenwinkel 2ω durch $\tan^2 \omega = w(2-w)$ bestimmt ist. Ersetzt man die Hyperbeln durch ihre Asymptoten und vernachlässigt man den Beitrag von w^2 , so entspricht dies der neuen *Näherungsformel*

$$h \approx \frac{r}{2} \left(\frac{a-b}{a+b \pm r} \right)^2, \quad (21)$$

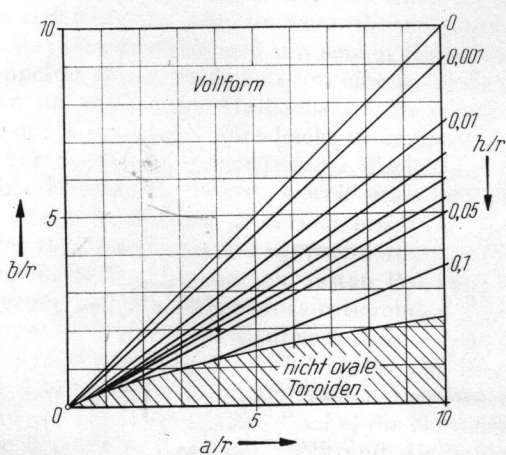


Bild 3

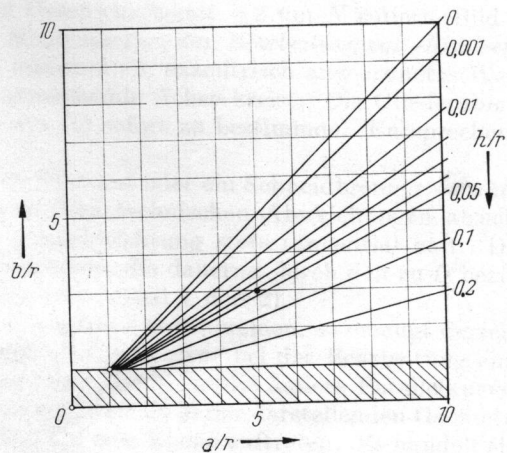


Bild 4

wobei das obere Vorzeichen wieder für Vollformen, das untere für Hohlformen maßgebend ist. Die Formel (21) ist etwas schlechter als (16) bzw. (18), aber immer noch brauchbar. Für die beiden oben betrachteten numerischen Beispiele ergibt sich $h \approx 2/49 = 0,0408 \dots$ (statt $h = 0,0426 \dots$). — Die Substitution (19) führt von (21) auf

$$(1 - \sqrt{2w})u - (1 + \sqrt{2w})v = \pm \sqrt{2w}. \tag{22}$$

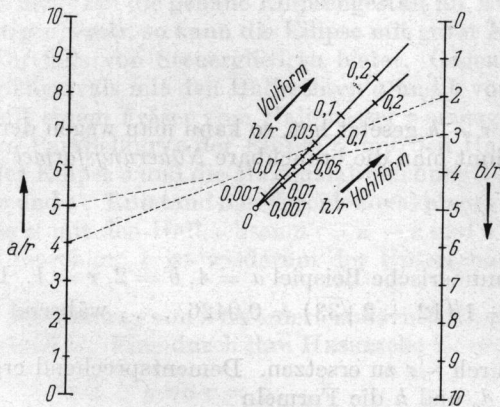


Bild 5

Die in u und v lineare Bauart dieser Beziehung gestattet jetzt die Anlage einer *Leitertafel* mit geradlinigen Skalen. Für das in Bild 5 wiedergegebene Nomogramm werden die Skalen durch die nachstehenden kartesischen Darstellungen beschrieben:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = u; \quad x_2 = 10, \quad y_2 = 10 - v; \quad x_3 = 5(1 + \sqrt{2w}), \quad y_3 = x_3 \pm \sqrt{2w}. \tag{23}$$

Die in den Nomogrammen eingetragenen Ablesepunkte bzw. -geraden beziehen sich auf die im Text erwähnten numerischen Beispiele.

Manuskripteingang: 13. 5. 1969

Anschrift: Prof. Dr. W. WUNDERLICH, II. Institut für Geometrie, Technische Hochschule, Karlsplatz 13, A-1040 Wien

