



fährlichen Standpunkte  $O$  für ein festes Dreieck  $ABC$ . — Man wird schon die Nähe dieses Ortes bei der Aufnahme zu vermeiden haben, um die Verwechslung der richtigen Lösung mit einer benachbarten mit Sicherheit auszuschließen.

Befindet sich in Fig. 1  $O$  in einer gefährlichen Lage, so weist das Sehstrahldreikant gegenüber dem Dreieck  $ABC$  eine infinitesimale (jedoch zwangläufige) Beweglichkeit auf. Die Bahnnormalebene  $\alpha, \beta, \gamma$  der Punkte  $A, B, C$  (als Punkte des Dreikants aufgefaßt) stehen auf den Sehstrahlen senkrecht und müssen durch einen Punkt  $P$  der Ebene  $\pi$  gehen. Dies ist eine Folge des mit der Bewegung verknüpften *linearen Nullsystems*  $\mathfrak{N}$ , das den Raumpunkten ihre Bahnnormalebene zuordnet.

Denken wir uns das Aufnahmezentrum  $O$  senkrecht auf die Dreiecksebene  $\pi$  projiziert ( $O'$  in Fig. 1 und 2), so erscheinen die Spuren  $a_1, b_1, c_1$  der genannten Normalebene als Lote auf die Kantenrisse  $O'A, O'B, O'C$ ; sie gehen wie gesagt durch den Nullpol  $P$  von  $\pi$ . Schlagen wir nun über  $O'P$  als Durchmesser einen Kreis, so muß dieser infolge der vorhandenen Rechtwinkel auch durch  $A, B, C$  gehen und wir sehen<sup>1)</sup>:

*Satz 1: Der gefährliche Ort für den räumlichen Rückwärtseinschnitt ist jener Drehzylinder  $\Omega$ , der den Umkreis des Dreieckes  $ABC$  als Normalschnitt besitzt.*

Ausständig ist allerdings noch der Nachweis, daß die als notwendig erkannte Bedingung auch hinreicht. Nun, liegt  $O$  auf  $\Omega$ , so schneiden einander die drei Normalebene  $\alpha, \beta, \gamma$  in einem Punkt  $P$  von  $\pi$ . Die drei Null-elemente  $A\alpha, B\beta, C\gamma$  bestimmen auch wirklich ein Nullsystem  $\mathfrak{N}$ ; denken wir uns dasselbe in üblicher Weise etwa festgelegt durch das Paar reziproker Polaren  $a = [BC]$  und  $\bar{a} = [\beta\gamma]$ <sup>4)</sup>, sowie einen Gewindestrahl  $s \mp [AP]$  des Büschels ( $A\alpha$ ), so werden den Punkten  $A, B, C$  tatsächlich die Nullebene  $\alpha, \beta, \gamma$  zugewiesen.

Nicht unwichtig ist folgende Feststellung: Aus der Theorie der Schraubung ist bekannt, daß der Ort aller Punkte, deren Bahntangenten durch einen festen Punkt  $O$  gehen, ein „gerader kubischer Kreis“ ist.<sup>5)</sup> Da diese Raumkurve 3. Ordnung die Dreiecksebene nur in drei Punkten schneidet, kann es außer  $A, B, C$  keinen weiteren Punkt geben, der seine Tangente durch  $O$  sendet. Mithin gilt

*Satz 2: Jegliche infinitesimale Unbestimmtheit beim räumlichen Rückwärtseinschnitt hört auf, wenn noch ein vierter Geländepunkt zur Verfügung steht.*

**II. Die Unsicherheitsrichtung des Aufnahmezentrums.** Für die Lage des Aufnahmezentrums  $O$  ergibt sich, wie eingangs betont, im Falle des gefährlichen Rückwärtseinschnittes ein gewisses *Spiel* in der Richtung seiner Bahntangente  $t$ ; diese kann als Normale auf die Nullebene  $\nu$  von  $O$  gefunden werden. Um  $\nu$  jedoch zweckmäßig zu ermitteln, wollen wir uns etwas näher mit dem Nullsystem  $\mathfrak{N}$  befassen.

4) Bezeichnungsweise von E. Müller.  $[xy]$  bedeutet das Schnitt- bzw. Verbindungselement der Elemente  $x$  und  $y$ .

5) Siehe etwa A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig 1886, S. 116, 117.



Die gesuchte *Bahnnormalebene*  $\nu$  von  $O$  wird nun von  $O$  und  $\bar{z}$  aufgespannt, so daß sich sofort ihre 2. Spur  $n_2 \parallel \bar{z}$  und damit auch die durch  $D$  gehende 1. Spur eintragen läßt (Fig. 2).

Das hierzu senkrechte Lot  $t = [O \perp \nu]$  gibt dann das Verschiebungselement der infinitesimalen Unbestimmtheit von  $O$ , kurz „*Unsicherheitsrichtung*“ genannt.

**III. Gesamtheit der Unsicherheitsrichtungen längs einer Zylindererzeugenden.** Zum Zwecke der Übersicht über die Normalebenen  $\nu$ , die den Punkten der Erzeugenden  $z$  nach II. zugeordnet werden, üben wir auf eine Ausgangslage von  $O$  eine beliebige *Streckung*  $\mathfrak{S}$  senkrecht zu  $\pi$  aus ( $\beta^* = \lambda \cdot \beta$ ). Die der neuen Lage  $\mathfrak{S} \cdot O$  entsprechenden Normalebenen in  $A, B, C$  hängen mit den früheren jedoch durch die inverse Streckung  $\mathfrak{S}^{-1}$  ( $\beta^* = 1/\lambda \cdot \beta$ ) zusammen. Das durch diese bestimmte neue Nullsystem ist  $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{N} \mathfrak{S}$ .

Festgeblieben bei der Anwendung von  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}^{-1}$  sind die Elemente  $P, \pi$  und  $Z, \zeta$ ; das durch sie bestimmte Netz von Gewindestrahlen mit den Brennlinsen  $w$  und  $\bar{w}$  ist allen Gewinden  $\mathfrak{N}^*$  gemeinsam; diese bilden somit ein *Büschel*. — Weitere Festelemente sind  $D, \delta$  und  $z$ .

$\bar{z}$  hingegen geht über in  $\mathfrak{S}^{-1} \cdot \bar{z}$  und spannt mit  $\mathfrak{S} \cdot O$  die Null- und Normalebene  $\nu^*$  des neuen Aufnahmezentrums auf. Zwischen den Punkten  $O$  von  $z$  und den Strahlen  $\bar{z}$  des Büschels ( $D, \zeta$ ) besteht demnach eine *Projektivität*, die als Hüllgebilde aller Normalebenen im allgemeinen einen *Kegel 2. Klasse*  $\Delta$  erzeugt.

$\Delta$  hat  $D$  zur Spitze, liegt symmetrisch zu  $\pi$  und berührt daselbst die Ebenen  $\delta$  und  $\zeta$ . Die Aufrißebene  $\pi_2 = [z \parallel \zeta]$  schneidet  $\Delta$  nach einer *Parabel*  $k$ , die als Hüllkurve der 2. Spuren  $n_2$  aufgefaßt werden kann und  $z$  als Scheiteltangente besitzt (Fig. 2).

Nun sind wir auch so weit, eine Aussage über die Verschiebungsrichtungen  $t$  längs  $z$  machen zu können. Fassen wir  $t$  auf als Verbindung von  $O$  mit dem Fernpunkt  $T$  der zu  $\nu$  normalen Richtung, und bedenken wir, daß  $T$  bei Veränderung von  $O$  auf  $z$  längs des Fernkegelschnittes des Polarkegels von  $\Delta$  wandert, wobei die Beziehung zwischen  $O$  und  $T$  *projektiv* ist, so ergibt sich im Erzeugnis als Ort für  $t$  eine *Regelfläche 3. Grades*  $\Theta$ .

$\Theta$  liegt symmetrisch zu  $\pi$  und besitzt  $z$  als einfache Leitgerade; die doppelte Leitgerade  $q$  liegt in  $\pi$ , senkrecht zu  $\zeta$ , und erscheint im Aufriß als Brennpunkt der Spurparabel  $k$ : In der Tat gehen alle Aufrisse  $t'' = [O'' \perp n_2]$  durch  $q''$  (Fig. 2). — Die Bahntangente des Geländepunktes  $O_0 = O'$  berührt den Umkreis und ist die eine Torsalerzeugende; die andere ist unendlich fern.

Ist  $q$  erst einmal ermittelt, dann findet man  $t$  auch einfach mittels des 1. Spurpunktes, der auf  $q$  von jener Ebene ausgeschnitten wird, die durch  $O$  geht und auf  $OD$  senkrecht steht.

Wir fassen zusammen:

**Satz 4:** Die zu allen Lagen des Aufnahmezentrums  $O$  auf einer Erzeugenden  $z$  des gefährlichen Drehzylinders  $\Omega$  gehörigen Unsicherheitsrichtungen  $t$  erfüllen im allgemeinen eine zur Dreiecksebene  $\pi$  symmetrische Regelfläche 3. Grades  $\Theta$ , die  $z$  zur einfachen Leitgeraden besitzt und deren doppelte Leitgerade  $q$  in  $\pi$  parallel zur Wallacegeraden von  $O'$  liegt.

7) Siehe unten Satz 7.

Die zu  $t$  normalen Ebenen  $v$  durch  $O$  umhüllen im allgemeinen einen zu  $\pi$  symmetrischen Kegel 2. Klasse  $\Delta$ , der die durch  $z$  gehende Durchmesser-ebene  $\delta$  von  $\Omega$  sowie die Wallaceebene  $\zeta$  der Gegenerzeugenden von  $z$  berührt.

Bemerkungen über Sonderfälle sowie über scheinbare Umrissse von  $\Theta$  finden sich im letzten Abschnitt.

**IV. Einschaltung aus der Dreiecksgeometrie.** Um den Zusammenhang zwischen den Scheiteltangentialebenen  $\delta$  und  $\zeta$  des für uns wichtigen Kegels  $\Delta$  zu überblicken, benötigen wir gewisse Beziehungen über die Wallacegeraden eines Dreiecks, die rasch abgeleitet werden sollen.

Wir beweisen zunächst als Hilfssatz den

**Satz 5:** *Spiegelt man an den Seiten  $a, b, c$  eines Dreiecks  $ABC$  einen Punkt  $P$  des Umkreises, so liegen die drei so erhaltenen „Gegenpunkte“ auf einer Geraden  $v$  durch den Höhenschnittpunkt.<sup>8)</sup>*

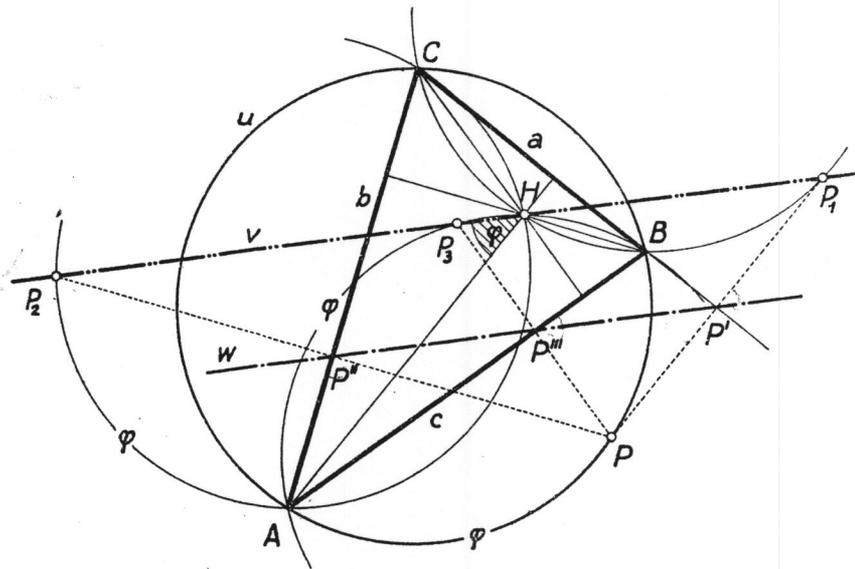


Fig. 3.

Dieser Satz sagt offenbar mehr aus als Satz 1. — Zum Beweise spiegeln wir mit  $P$  gleichzeitig den Umkreis  $u$  an  $a, b, c$  (Fig. 3): Wir erhalten so drei kongruente Hilfskreise, die die Gegenpunkte  $P_1, P_2, P_3$  tragen und überdies durch den Höhenschnittpunkt  $H$  gehen, da der Winkel zweier Höhen stets mit einem Dreieckswinkel übereinstimmt. Aus der Gleichheit der Bögen  $AP = AP_2 = AP_3$  folgt die Gleichheit der Umfangswinkel

$$\sphericalangle AHP_2 = \sphericalangle AHP_3 = \varphi$$

und  $H, P_2, P_3$  müssen auf einem Schenkel  $v$  liegen, der aus Gründen der Gleichberechtigung auch  $P_1$  enthält.

Durch die zentrische Verkleinerung  $1 : 2$  von  $P$  aus gehen die Gegenpunkte  $P_1, P_2, P_3$  in die Fußpunkte  $P', P'', P'''$  der Seitenlote über und aus  $v$  wird die Wallacegerade  $w$  (Satz 1).

8) Vgl. J. Steiner, „Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques“, Nr. 19 (Ann. de Math., t. XIX).

Im folgenden wird untersucht, wie sich die Wallacegerade  $w$  eines Punktes  $P$  ändert, wenn dieser den Umkreis  $u$  des Dreiecks  $ABC$  durchläuft.

Man erkennt nebenbei bemerkt von vornherein, daß  $w$  hierbei eine *Kurve 3. Klasse* einhüllt. Denn wählen wir etwa  $P''$  auf  $b$  beliebig (Fig. 3), so gehören dazu zwei Möglichkeiten für  $P$  auf  $u$  und damit zwei Lagen von  $P'''$  auf  $c$ . Zwischen den Punktreihen  $b(P'')$  und  $c(P''')$  herrscht mithin eine (2,2)-Korrespondenz, und da der Schnittpunkt  $A$  sich selbst entspricht,

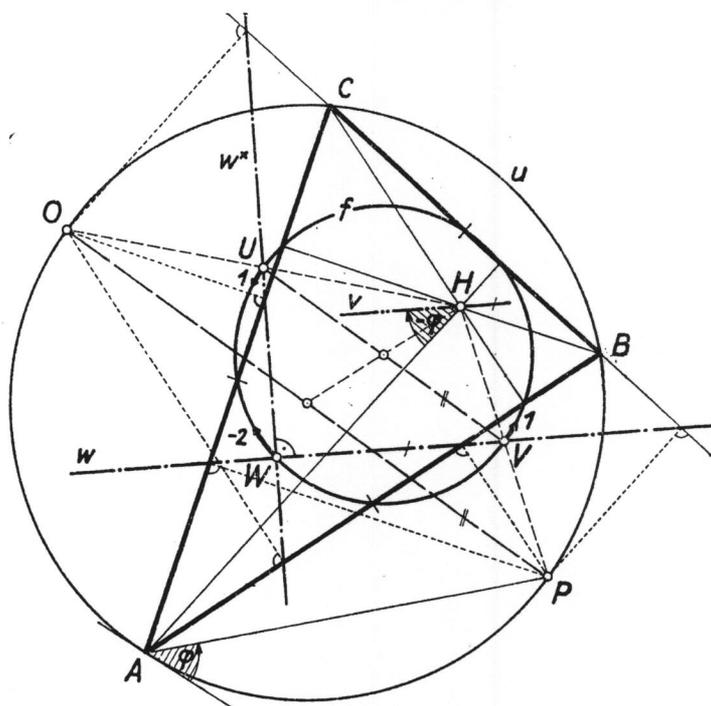


Fig. 4.

verbleibt nach Abspaltung des Strahlbüschels  $A$  für das Erzeugnis der Punktreihen eine *Kurve 3. Klasse*. Diese berührt die Dreieckshöhen und -seiten (als Wallacegeraden der Eckpunkte bzw. derer Gegenpunkte) und besitzt die Ferngerade als Doppeltangente (als Wallacegerade der absoluten Kreispunkte); da die Berührung in den Kreispunkten stattfindet, handelt es sich nach Cremona<sup>9)</sup> um die *dreispitziige Hypozykloide*.

Um elementar vorzugehen, vollziehen wir in Fig. 4 vom Höhenschnittpunkt  $H$  aus die zentrische Verkleinerung  $1:2$ .

Dabei entsteht aus dem Umkreis  $u$  der *Feuerbachsche Kreis*  $f$ , der also die von den Ecken ausgehenden Höhenabschnitte hälftet. Dem Punkt  $P$  entspricht auf  $f$  ein Punkt  $V$  der Wallacegeraden  $w$  (Fig. 3). Durchläuft nun  $P$  den Umkreis mit konstanter Geschwindigkeit, so dreht sich  $w$  zufolge der in Fig. 3 nachgewiesenen Winkelgleichheit gegengleich zum Strahl  $AP$ . Bewegt sich aber ein Punkt  $V$  gleichförmig auf einem Kreis  $f$  und nimmt er dabei eine sich ebenfalls gleichförmig um ihn drehende Gerade  $w$  mit, so umhüllt diese eine *Zykloide*; speziell eine Hypozykloide, wenn die Drehungen gegensinnig erfolgen. — Auch der zweite Schnittpunkt  $W$  von  $w$  und  $f$  durchläuft den Feuerbachkreis mit konstanter Geschwindigkeit, und zwar entgegengesetzt und doppelt so rasch wie  $V$ . Nun ist kargestellt, daß es sich bei der gesuchten Hüllkurve der Wallacegeraden um die *dreispitziige Steinersche Hypozykloide* 4. Ordnung 3. Klasse handelt, die als Bahn eines Umfangspunktes eines Kreises erzeugt werden kann, der in einem dreimal so großen Kreis rollt. — Damit ist der bekannte Satz von Steiner<sup>2)</sup> über die Wallacegeraden eines Dreiecks elementar nachgewiesen<sup>10)</sup>:

9) „Sur l'hypercycloïde à trois rebroussements.“ Crelle J. 64, S. 105.

10) Vgl. damit z. B. den analytischen Beweis in H. Dörrie, Triumph der Mathematik, S. 229—234.

Satz 6: Die Wallacegeraden eines Dreiecks umhüllen eine dem Feuerbachschen Kreis umschriebene dreispitzige Hypozykloide.<sup>11)</sup>

Hat  $P$  gerade den halben Umfang bis  $O$  durchlaufen, dann hat sich die Wallacegerade  $w$  um einen rechten Winkel gedreht. Da ihre Endlage  $w^\times$  durch den Gegenpunkt  $U$  von  $V$  geht (Fig. 4), liegt der Schnittpunkt  $W = [ww^\times]$  auf  $f$ :

Satz 7: Die Wallacegeraden zweier Gegenpunkte des Umkreises stehen aufeinander senkrecht. Ihr Schnittpunkt liegt auf dem Feuerbachkreis.<sup>2)</sup>

Dieses Korollar kennzeichnet den Feuerbachkreis als „orthoptische Kurve“ der Steinerzykloide und daraus erhellen seine fehlenden Eigenschaften:  $f$  geht bekanntlich auch durch die Höhenfußpunkte und die Seitenmitten von  $ABC$  (man verlege  $P$  bloß in die Eckpunkte bzw. in die Seitensymmetralen).

Unter Beachtung des Geschwindigkeitsverhältnisses von  $V$  und  $W$  ergibt sich der Berührungspunkt der Wallacegeraden mit der Steinerschen Zykloide durch Spiegelung von  $W$  an  $V$ .

Die Stellen des Zusammenfallens von  $V$  und  $W$  können durch Winkel-dreiteilung ermittelt werden und bilden auf  $f$  ein gleichseitiges Dreieck. Sie stellen die Scheitel der Zykloide dar, während die zugehörigen Durchmesser  $w^\times$  die Spitzentangenten abgeben.

**V. Besonderheiten.**

1. Das Aufnahmezentrum liege senkrecht über einem Eckpunkt, etwa  $A$ .

Dann fallen  $w$  und  $\bar{z}$  mit  $a$  zusammen und das Gewinde  $\mathfrak{N}$  artet in das Gebüsch mit der Achse  $a$  aus. Das Sehstrahldreikant gestattet eine infinitesimale Drehung um die Achse  $a$ . Alle Normalebene  $\nu$  gehen durch  $a$  und die Gesamtheit aller Unsicherheitsrichtungen  $t$  ist die Tangentenschar einer Parabel mit der Scheiteltangente  $z$  und dem Höhenfußpunkt auf  $a$  als Brennpunkt.

2. Das Aufnahmezentrum liege senkrecht über dem Gegenpunkt eines Eckpunktes, etwa  $A$ .

Dann fällt  $P$  nach  $A$  und das Gewinde  $\mathfrak{N}$  artet in das Gebüsch mit der Achse  $\bar{a} = [\beta\gamma]$  aus. Das Dreikant gestattet eine infinitesimale Drehung um  $\bar{a}$ , doch zerfällt im allgemeinen weder  $\Delta$  noch  $\Theta$ ; als Besonderheit ist bloß zu erwähnen, daß  $a$  die Doppelgerade für  $\Theta$  abgibt.

2\*. Das Dreieck  $ABC$  sei überdies gleichschenkelig ( $AB = AC$ ).

Unter diesen Umständen fallen alle Normalebene  $\nu$  mit der Durchmesserenebene  $\delta = \zeta$  zusammen und  $\Theta$  artet in das Parallelenbüschel der die Erzeugende  $z$  senkrecht schneidenden Zylindertangenten aus.

3. Wir stellen nun allgemein die Frage, wann die Unsicherheitsrichtung den gefährlichen Zylinder  $\Omega$  berührt — von der trivialen Lage  $O$  in  $\pi$  abgesehen.

In diesem Fall muß die Normalebene  $\nu$  offenbar parallel zum Durchmesser  $O'P$  verlaufen, d. h.  $D$  muß im Unendlichen liegen (Fig. 2). Daß

11) Läßt man hingegen  $P$  fest und dreht das Dreieck in seinem Umkreis, so umhüllen die Wallacegeraden eine Kardioid.

*Handwritten notes:*  
 Punctum  
 f  
 z

jedoch  $O'P$  parallel zur Wallacegeraden  $w$  verläuft, trifft nach dem Schlußsatz von Abschnitt IV und Fig. 4 nur dann ein, wenn  $w$  eine Spitzentangente der Steinerzykloide ist. Wir sehen mithin:

Satz 8: *Es gibt auf dem gefährlichen Zylinder  $\Omega$  drei Erzeugende  $z$ , die ein regelmäßiges Prisma bilden und für deren Punkte die Unsicherheitsrichtungen  $t$  in die zugehörigen Tangentialebenen von  $\Omega$  fallen.*

Für eine solche Erzeugende geht der Kegel  $\Delta$  in einen Zylinder 2. Klasse über.

Da alle Unsicherheitsrichtungen  $t$  längs einer dieser Erzeugenden komplanar sind, besitzen sie (außer im Fall 2\* s. o.) eine ebene Hüllkurve  $h$ . Bezeichnet  $k$  den  $z$  berührenden Normalschnitt von  $\Delta$ , so entsteht  $h$  auf folgende Weise:  $h$  wird von einem Schenkel eines rechten Winkels eingehüllt, dessen anderer längs des Kegelschnittes  $k$  gleitet, während sein Scheitel  $O$  längs der Scheiteltangente  $z$  von  $k$  geführt wird. — Anders ausgedrückt:  $h$  und  $k$  hängen durch jene involutorische quadratische Geradenverwandtschaft zusammen, bei welcher entsprechende Strahlen einander auf einer festen Achse  $z$  rechtwinklig schneiden.

Die Parameterdarstellung von  $h$  in kartesischen Koordinaten  $\xi, \eta$  lautet

$$\xi = \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{(\lambda^2 \mp 1)^2}{\lambda^2 \pm 1}, \quad \eta = 2b \cdot \frac{\lambda^3}{\lambda^2 \pm 1}.$$

$a$  und  $b$  bedeuten darin die Halbachsen von  $k$ ; das obere Vorzeichen gilt für den Fall der Ellipse, das untere für den Fall der Hyperbel. Wie man sieht, sind alle Kurven  $h$  einer Gruppe untereinander *affin*. Sie sind von 4. Ordnung und 3. Klasse und besitzen je drei Rückkehrpunkte ( $\lambda = 0, \pm i\sqrt{3}$  [Ell.] bzw.  $\pm\sqrt{3}$  [Hyp.]), eine Doppeltangente ( $\lambda = \pm 1$  bzw.  $\pm i$ )<sup>12)</sup>, zwei Asymptoten ( $\lambda = \pm i$  bzw.  $\pm 1$ ) und die Ferngerade als Tangente ( $\lambda = \infty$ ); die Realitätsverhältnisse sind ersichtlich.

Die Kurven  $h$  wurden etwas ausführlicher behandelt, weil sie auch als *scheinbare Umriss* der allgemeinen Regelfläche  $\Theta$  bei Normalprojektion auf Bildebenen  $\pi_3$  durch  $z$  auftreten. Als Kegelschnitt  $k$  ist hier die Spurkurve  $[\Delta\pi_3]$  des Kegels  $\Delta$  heranzuziehen; sie wird ja von den 3. Spuren  $n_3$  der Normalebene  $\nu$  berührt und der Riß  $t'''$  steht senkrecht auf  $n_3$ . Da  $\Theta$  vom 3. Grad und 4. Rang ist, können wir Klasse und Ordnung von  $h$  bestätigen. — Die Umriskurve reduziert sich auf eine Parabel bei Projektion auf  $\pi_3 = \delta$  bzw. auf das Strahlbüschel  $q''$  für eine Bildebene parallel  $\zeta$  (Fig. 2).

Wir haben also festgestellt:

Satz 9: *Die Unsicherheitsrichtungen  $t$  längs einer der drei ausgezeichneten Erzeugenden  $z$  aus Satz 8 besitzen im allgemeinen eine Hüllkurve  $h$  4. Ordnung und 3. Klasse. Gleichartige Kurven treten auch als scheinbare Umriss der Regelflächen  $\Theta$  aus Satz 4 im Normalriß auf allgemeine zum Gelände  $\pi$  senkrechte Ebenen auf.*

(Eingegangen am 13. 7. 1942.)

12) Es gibt mithin im allgemeinen auf jeder der drei ausgezeichneten Erzeugenden  $z$  zwei Lagen von  $O$ , für welche die Unsicherheitsrichtung mit  $z$  zusammenfällt, also senkrecht zum Gelände  $\pi$  verläuft.