

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse
vom 11. Februar 1971

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der
Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1971, Nr. 3

(Seite 52 bis 60)

Das korr. Mitglied W. Wunderlich übersendet eine kurze,
von ihm selbst verfaßte Mitteilung, und zwar:

„Über die Raumkurve 3. Ordnung mit konstanter
Hauptnormalenneigung.“

(1) § 1. In seiner Mitteilung [1] hat K. Meirer die *geodätischen Linien* auf der unter 60° ansteigenden *kubischen Böschungstorse* betrachtet und hiebei festgestellt, daß sich unter diesen ∞^2 im allgemeinen transzendenten Kurven ∞^1 algebraische finden. Es handelt sich dabei, wie ergänzend vermerkt sei, um rationale Raumkurven 8. Ordnung. Vor allem wurde aber die überraschende Tatsache entdeckt, daß es unter diesen algebraischen Geodätischen eine ausgezeichnete gibt, die sich (unter Abspaltung zweier Torsenerzeugenden) auf eine doppelt überdeckte *Raumkurve 3. Ordnung* reduziert, und zwar eine gewisse *parabolische Hyperbel*.

Da bei geodätischen Linien auf einer Fläche die Hauptnormale stets mit der Flächennormale übereinstimmt, so sind die Geodätischen von Böschungstorsen durch *konstante Hauptnormalenneigung* ausgezeichnet und auch gekennzeichnet. Sie bilden eine interessante Kurvenfamilie, der E. Salkowski besonderes Augenmerk zugewandt hat [2]. Die vorliegende Note will nun zeigen, daß die Meirersche parabolische Hyperbel die *einzige Raumkurve 3. Ordnung mit konstanter, nichtverschwindender Hauptnormalenneigung* ist. Im Anschluß daran werden einige Eigenschaften der von den Hauptnormalen gebildeten Strahlfläche mitgeteilt.

§ 2. Wie aus der Betrachtung des begleitenden Dreibeins einer beliebigen Raumkurve hervorgeht, bilden deren sphärisches

Tangenten- und Binormalenbild auf der Einheitskugel ein Paar von sphärischen Parallelkurven im Abstand $\pi/2$, deren gemeinsame sphärische Evolute polar zum sphärischen Hauptnormalenbild ist. Ist also umgekehrt das sphärische Hauptnormalenbild bekannt, so läßt sich das sphärische Tangentenbild als sphärische Evolute der Polarkurve des Hauptnormalenbildes ermitteln.

Dennach ist im Falle einer Raumkurve mit konstanter (nichtverschwindender) Hauptnormalenneigung das sphärische Tangentenbild eine *sphärische Kreisevolvente*, also eine Böschungslinie auf der Einheitskugel¹. Die sphärischen Böschungslinien sind aber wohlbekannt und lassen sich am einfachsten als Gratinen von *Umschlingungstorsen* gewinnen, d. h. von Torsen, die von einer Ebene eingehüllt werden, die sich gleichförmig um eine feste Achse dreht, während sie gleichzeitig einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse unterworfen wird [4]. In kartesischen Koordinaten wird die Lagenschar einer solchen umschlingenden Ebene mit Benützung des Drehwinkels φ als Parameter durch

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + cz = ca \cdot \sin n \varphi \quad (1)$$

beschrieben, wobei $c = \text{ctg } \gamma$ die unveränderliche Steigung der Ebene gegen die horizontal gedachte Grundebene $z = 0$ festlegt, $n > 0$ die Frequenz und $a > 0$ die Amplitude der Schwingung bezeichnet. Unter Heranziehung der ersten beiden Ableitungen nach φ gelangt man dann über

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = nca \cdot \cos n \varphi, \quad (2)$$

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = n^2 ca \cdot \sin n \varphi$$

zur nachstehenden Parameterdarstellung der *Gratinen* der Umschlingungstorse:

$$x = nca (n \sin n \varphi \cos \varphi - \cos n \varphi \sin \varphi),$$

$$y = nca (n \sin n \varphi \sin \varphi + \cos n \varphi \cos \varphi), \quad (3)$$

$$z = (1 - n^2) a \cdot \sin n \varphi.$$

¹ Für verschwindende Hauptnormalenneigung ist das sphärische Hauptnormalenbild ein Großkreis, dessen Polarkurve auf einen Punkt zusammenfällt, sodaß als sphärisches Tangentenbild ein *Kreis* auftritt: Die zugehörigen Raumkurven sind daher, wie bekannt, die *Böschungslinien*, die hinfür außer Betracht bleiben. Speziell mit den kubischen Böschungslinien hat sich J. Krames befaßt [3].

Diese unter dem Winkel γ ansteigende Böschungslinie verläuft auf der *Rotationsquadrant*

$$\frac{x^2 + y^2}{n^2 c^2} + \frac{z^2}{1 - n^2} = a^2, \quad (4)$$

also auf einem Drehellipsoid für $n^2 < 1$, und speziell auf der *Einheitskugel*, falls

$$c^2 = \frac{1 - n^2}{n^2}, \quad a = \frac{1}{cn}. \quad (5)$$

Im Grundriß (Normalriß auf die xy -Ebene) erscheint diese Böschungslinie bekanntlich als *Epizykloide* (gespitzte Aufwindlinie).

§ 3. Für rationales n ist die Böschungslinie (3) eine *algebraische Kurve*, und nur eine solche kommt ja als sphärisches Tangentenbild einer Kubik in Frage. Schreibt man die Frequenz als gekürzten Bruch $n = \lambda/\mu$, so findet man nach Übergang zum komplexen Parameter $w = \exp(i\varphi/\mu)$ für die *Ordnung* der Böschungslinie (3) den Wert

$$N = 2(\lambda + \mu). \quad (6)$$

Da die Tangenten einer Raumkurve eine Fläche 4. Ordnung bilden, so ist deren Schnitt mit der Fernebene eine irreduzible oder zerfallende Quartik, und das sphärische Tangentenbild kann daher höchstens die Ordnung 8 haben. Für λ und μ kommen mithin gemäß (6) nur die Werte 1 und 2 oder 1 und 3 in Betracht. Die zweite Annahme scheidet aus, denn sie führt zwar auf eine sphärische Böschungslinie 8. Ordnung (die sich im Grundriß auf eine doppelt überdeckte Kardioidenabbildung), diese wird jedoch aus dem Kugelmittelpunkt durch einen Kegel 8. Ordnung projiziert, was die zulässige Schranke 4 übersteigt.

Die andere Annahme $\lambda = 1, \mu = 2$ ($n = 1/2$) führt auf eine sphärische Böschungslinie 6. Ordnung (die im Grundriß als zweispitzige „Nephroide“ erscheint). Weil sie bezüglich des Kugelmittelpunkts symmetrisch ist, wird sie aus demselben durch einen doppelt zählenden Kegel 3. Ordnung projiziert, was eine zulässige Möglichkeit darstellt, die nun weiter zu verfolgen ist.

§ 4. Zu der einzigen als möglich erkannten Annahme $n = 1/2$ gehören zufolge (5) die Werte $c = \sqrt{3}$ und $a = 2/\sqrt{3}$. Damit lautet die Darstellung (3) des *sphärischen Tangentenbildes*:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi = \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{3}{2} \right), \\
 y &= \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \varphi = \cos^3 \frac{\varphi}{2}, \\
 z &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{2}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Für den die Kurve (7) aus dem Ursprung projizierenden *Tangentenrichtkegel* der gesuchten Kubik l ergibt sich dann mit Benützung des neuen Parameters $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ die Darstellung

$$x:y:z = -t(t^2 + 3):2:\sqrt{3}t(t^2 + 1). \quad (8)$$

Sie beschreibt, wenn man x, y, z als homogene Punktkoordinaten in der Fernebene auffaßt, gleichzeitig die *Fernkurve* k der Tangentenfläche von l und bestätigt, daß k eine rationale Kubik ist. Dieselbe besitzt den zu $t = 0$ gehörigen Punkt $V(0:1:0)$ als *Wendepunkt* mit der Tangente $x + \sqrt{3}z = 0$, ferner den zu $t = \infty$ gehörigen Punkt $W(-1:0:\sqrt{3})$ als *Spitze* mit der Tangente $y = 0$.

§ 5. Zur Erleichterung der weiteren Entwicklungen empfiehlt es sich, mittels der linearen Transformation

$$X = \sqrt{3}x + z, \quad Y = y, \quad Z = x + \sqrt{3}z \quad (9)$$

von den Normalkoordinaten x, y, z zu affinen Koordinaten X, Y, Z überzugehen. Die *Fernkubik* k (8) wird dann durch

$$X:Y:Z = -\sqrt{3}t:1:t^3 \quad \text{oder} \quad X^3 + 3\sqrt{3}Y^2Z = 0 \quad (10 \text{ a, b})$$

dargestellt. Sie hat ihren Wendepunkt $V(0:1:0)$ im Fernpunkt der Y -Achse und ihre Spitze $W(0:0:1)$ im Fernpunkt der Z -Achse. Wendetangente $Z = 0$ und Spitzentangente $Y = 0$ schneiden einander im Fernpunkt $U(1:0:0)$ der X -Achse.

Aus der Tatsache, daß die Fernkurve k der von den Tangenten der gesuchten Raumkubik l gebildeten Torse 4. Ordnung bloß die Ordnung 3 aufweist, ist zu erkennen, daß neben k noch eine *Erzeugende* der Torse der Fernebene angehören muß, wofür nur die Wendetangente UV von k in Betracht kommt. Die gesuchte Kubik l wird daher die Fernebene in V berühren, in W hingegen schneiden; es handelt sich demnach um eine *parabolische Hyperbel*.

Denkt man sich den Koordinatenursprung O in den Schnittpunkt der zu W gehörigen Tangente (Asymptote) von l mit der zu V gehörigen Schmiegeebene verlegt — was durch bloße Parallelverschiebung stets erreichbar ist —, dann hat man im Koordinatensystem $OUVW$ das mit den Kurvenpunkten V und W verbundene *Schmiegetetraeder* der Kubik l zur Verfügung: die Kanten VU und WO sind Tangenten von l , die Ebenen VUO und WOU die zugehörigen Schmiegeebenen.

Die gesuchte Raumkubik l wird nun aus ihrem Punkt V durch einen *hyperbolischen Zylinder* projiziert, der die Schmiegeebene VUO längs VU und die Ebene VWO längs VW berührt, also durch $XZ = \text{const}$ angesetzt werden kann. Aus dem Punkt W hingegen wird l durch einen *parabolischen Zylinder* projiziert, der die Ebene WOU längs WO und die Fernebene WVU längs WV berührt, also durch $X^2/Y = \text{const}$ erfaßt wird. Dem entsprechend gestattet die *Raumkubik* l den Ansatz

$$X = u, \quad Y = \alpha u^2, \quad Z = \beta u^{-1}, \quad (11)$$

wobei die Konstanten α und β so abzustimmen sind, daß der Tangentenrichtkegel mit (10) übereinstimmt. Die betreffende Bedingung, die sich durch Einsetzen der Ableitungen $X' = 1$, $Y' = 2\alpha u$, $Z' = -\beta u^{-2}$ in (10 b) ergibt, lautet

$$12\sqrt{3} \alpha^2 \beta = 1. \quad (12)$$

§ 6. Die so gewonnenen ∞^1 Kubiken

$$X = u, \quad Y = \alpha u^2, \quad Z = \frac{1}{12\sqrt{3} \alpha^2 u} \quad (13)$$

sind untereinander *ähnlich*, denn sie hängen mit dem durch $\alpha = 1$ definierten Prototyp

$$X_1 = u, \quad Y_1 = u^2, \quad Z_1 = \frac{1}{12\sqrt{3} u} \quad (14)$$

vermöge der zentrischen Streckung $X_1 = \alpha X$, $Y_1 = \alpha Y$, $Z_1 = \alpha Z$ zusammen, wie man erkennt, wenn man in (14) den Parameter u durch αu ersetzt.

Damit ist bereits im Prinzip die Behauptung bewiesen, daß die parabolische Hyperbel von K. Meirer die *einzige Raumkubik mit konstanter, nichtverschwindender Hauptnormalenneigung* ist. Der Neigungswinkel beträgt wegen $c = \sqrt{3}$ (§ 4) $\gamma = 30^\circ$.

Um noch den Zusammenhang mit der Meirerschen Darstellung (12) in [1] herzustellen, setze man dort $\varphi = v$ und $k = 1$. Es ergibt sich dabei, daß die betreffende Kubik im wesentlichen (nämlich bis auf einen Koordinaten- und Vorzeichenwechsel) mit jener Kurve (13) des vorliegenden Beitrages übereinstimmt, die sich für $\alpha = 1/6$ einstellt. Nach Rückkehr zu kartesischen Koordinaten mittels der Umkehrtransformation von (9) und Vornahme der Substitution $u = v/\sqrt{3}$ lautet die Darstellung:

$$x = \frac{3v}{2} - \frac{1}{2v}, \quad y = \frac{v^2}{2}, \quad z = -\frac{\sqrt{3}v}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2v}. \quad (15)$$

§ 7. Zum Schluß erscheint es angezeigt, etwas auf die *Hauptnormalenfläche* Φ der Kubik l (15) einzugehen. Durch geeignete Linearkombination aus den ersten beiden Ableitungen des Ortsvektors (15) findet man für die Hauptnormalenrichtung:

$$x^*: y^*: z^* = (1 - v^2) : 2v : \frac{v^2 + 1}{\sqrt{3}}. \quad (16)$$

Die Relation $x^{*2} + y^{*2} = 3z^{*2}$ bestätigt die gemeinsame Hauptnormalenrichtung von 30° . — Berechnet man nun in bekannter Weise aus (15) und (16) die *Plücker-Koordinaten* der Hauptnormale, so erhält man, von einem gemeinsamen Faktor abgesehen, die Werte

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\sqrt{3}v(1 - v^2), & p_4 &= v(v^4 + 7v^2 - 6), \\ p_2 &= 4\sqrt{3}v, & p_5 &= 4(1 - 2v^2), \\ p_3 &= 2v(v^2 + 1), & p_6 &= \sqrt{3}v(v^4 + 5v^2 - 2). \end{aligned} \quad (17)$$

Hieraus ist zu ersichen, daß es sich bei der von den Hauptnormalen der Kubik l gebildeten Fläche Φ um eine *rationale Strahlfläche 5. Grades* handelt. Wie man leicht nachprüft, gehört sie — ebenso wie die Tangentenfläche von l — dem *Gewinde* (linearen Strahlkomplex)

$$3p_1 + \sqrt{3}p_3 + 2\sqrt{3}p_4 - 2p_6 = 0 \quad (18)$$

an.

§ 8. Zur näheren Untersuchung der Hauptnormalenfläche Φ empfiehlt es sich, mittels der Transformation (9) wieder

zu den affinen Koordinaten X, Y, Z überzugehen. Die Darstellung der parabolischen Hyperbel (15) vereinfacht sich dann zu

$$X = \sqrt{3}v, \quad Y = \frac{1}{2}v^2, \quad Z = \frac{1}{2}, \quad (19)$$

jene der Hauptnormalenrichtung (16) auf

$$X^*: Y^*: Z^* = (2 - v^2) : \sqrt{3}v : \sqrt{3}. \quad (20)$$

Die davon abgeleiteten Plücker-Koordinaten der Hauptnormale lauten dann

$$\begin{aligned} P_1 &= 2v(2 - v^2), & P_4 &= \sqrt{3}v(v^2 - 2), \\ P_2 &= 2\sqrt{3}v^2, & P_5 &= 4(1 - 2v^2), \\ P_3 &= 2\sqrt{3}v, & P_6 &= v^3(v^2 + 4), \end{aligned} \quad (21)$$

und die Gleichung des Gewindes (18) reduziert sich auf

$$\sqrt{3}P_1 + 2P_4 = 0. \quad (22)$$

Eine auf (19) und (20) gestützte *Parameterdarstellung der Fläche* Φ schreibt sich in „homogener“ Weise:

$$1 : X : Y : Z = 2v : 2\sqrt{3}v^2 + (2 - v^2)u : v^3 + \sqrt{3}vu : 2 + \sqrt{3}u. \quad (23)$$

Als v -Linien ($u = \text{const}$) fungieren dabei die Erzeugenden.

Mit Unterdrückung der zum Teil etwas aufwendigen Rechnungen seien einige bemerkenswerte Eigenschaften der Fläche Φ angeführt. Sie enthält ∞^2 *Kubiken* $u = av + b$, darunter die *Schichtenlinien* $Z = \text{const}$. Als Grenzform kann der durch (20) beschriebene *Böschungsfernkreis* c für $u = \infty$ hinzugezählt werden. Als Restschnitt der Fläche 5. Ordnung Φ mit der Fernebene treten neben c zwei *Fernerzeugende* auf: Für $v = 0$ die einfache Erzeugende UW ($Y = 0$), für $v = \infty$ hingegen die Doppelerzeugende UV ($Z = 0$), längs der die Fläche den Charakter einer verwundenen Rückkehrkante aufweist.

In der mit dem Gewinde (22) verknüpften *Nullkorrelation* entspricht dem Fernkreis c ein *parabolischer Berührungszylinder* von Φ , der seine Spitze im Nullpunkt U der Fernebene hat und

diese längs UV berührt. Seine Gleichung lautet $Z^2 + 2Y + 2 = 0$, seine Berührungslinie h mit Φ wird durch $u\sqrt{3} = -2(\varphi^2 + 1)$ bestimmt und ist eine rationale *Quartik* mit einem Doppelpunkt in U .

(61) Als Gewindefläche besitzt Φ nach S. Lie zwei *ausgezeichnete Schmiegelinien*, die gleichfalls dem Gewinde (22) angehören. Eine der beiden ist natürlich die parabolische Hyperbel l ($u = 0$), für die andere findet man wieder eine *Quartik*, festgelegt durch $u\sqrt{3} = -4(\varphi^2 + 1)$. Daß die vorhin erwähnte Berührungslinie h genau in der Mitte zwischen den Lieschen Schmiegelinien verläuft, ist kein Zufall.

Auch für die *Striktionslinie*, die wegen der festen Neigung der Erzeugenden von Φ als Berührungslinie eines zur z -Achse parallelen Zylinders ermittelt werden kann, stellt sich eine *Quartik* ein, die mit den Lieschen Schmiegelinien ein konstantes Teilverhältnis bestimmt; sie wird durch $u\sqrt{3} = 2(\varphi^2 + 1)$ beschrieben.

Als *Doppelkurve* der Fläche Φ tritt eine *rationale Quintik* auf, die sich am besten als Ort des Doppelpunktes der kubischen Schichtenlinie bei Veränderung der Schichtenkote $Z = s$ ermitteln läßt. In homogener Schreibweise lautet die Darstellung:

$$1 : X : Y : Z = (s^2 + 2) : -\frac{s}{\sqrt{3}}(4s^4 + 14s^2 + 13) : -\left(s^2 + \frac{3}{2}\right) : (24)$$

Literatur:

- [1] K. Meirer: *Zur Vererbung kubischer Böschungstorsoren*. Anz. Österr. Akad. d. Wiss. Wien, Nr. 3/1968, 37—48.
- [2] E. Salkowski: *Zur Transformation von Raumkurven*. Math. Ann. 66 (1909), 517—557. *Beiträge zur Kenntnis der Bertrand'schen Kurven*. Ebenda 69 (1910), 560—579.
- [3] J. Krames: *Über kubische Schraubenlinien und Cayleysche Strahlflächen dritten Grades*. Sitzungsber. Österr. Akad. d. Wiss. Wien, 168 (1959), 239—248.
- [4] W. Kautny: *Zur Geometrie des harmonischen Umschwrungs*. Monatsh. Math. 60 (1956), 66—82.