

## Kurven mit isoptischem Kreis

WALTER WUNDERLICH (Wien, Österreich und Pullman, Washington, U.S.A.)

1. Im Zusammenhang mit gewissen Nockentrieben, bei welchen eine einzige rotierende Kurvenscheibe die beiden Schenkel eines starren, drehbar gelagerten Winkelhebels betätigt und diesem solcherart eine schwingende Bewegung mit zwangsläufig gesteuertem Hin- und Rückgang erteilt, tauchte die Frage nach *ebenen Kurven* auf, die einen *Kreis als isoptische Kurve* besitzen [4, 5]. Unter einer isoptischen Kurve  $o$  einer gegebenen Kurve  $c$  versteht man bekanntlich eine Kurve, aus deren Punkten die Kurve  $c$  unter einem *konstanten Gesichtswinkel*  $\pi - \omega$  erscheint, mit anderen Worten den Ort jener Punkte, aus welchen sich an  $c$  Tangentenpaare legen lassen, welche die Winkel  $\pi - \omega$  und  $\omega$  bilden. Kinematisch lässt sich die isoptische Kurve  $o$  als die Bahn des Scheitels eines starren Winkels auffassen, dessen Schenkel an der festen Kurve  $c$  entlanggleiten. Im Falle eines rechten Winkels  $\omega = \pi - \omega = \pi/2$  wird  $o$  als die orthoptische Kurve von  $c$  bezeichnet.

Bekanntlich ist die orthoptische Kurve einer *Ellipse* ein Kreis, der gelegentlich etwas irreführend „Direktorkreis“ genannt wird (Ph. De La Hire, 1685). Die Verwendung elliptischer Profile für Nockentriebe der erwähnten Art wurde von M. Goldberg [1] vorgeschlagen; der betätigte Winkelhebel ist hierbei ein rechter. Die Kinematik eines solchen Getriebes wurde vom Verfasser in [4] studiert. Die Frage nach (konvexen) Profilen mit einem isoptischen Kreis für beliebiges  $\omega$  wurde von J. W. Green [2] behandelt, allerdings in einer nicht endgültig befriedigenden Art; das dort angeführte Beispiel ist – im Gegensatz zur Ellipse – von stark transzendenter Charakter. Die vorliegende Untersuchung deckt nun einerseits die Existenz von zwei grundsätzlich verschiedenen Arten von Kurven mit einem isoptischen Kreis auf und liefert andererseits für beide Arten beliebig viele Beispiele algebraischer Kurven.

2. Wir denken uns – wie es auch J. W. Green tut – die Kurve  $c$  durch ihre *Stützfunktion*  $u = u(\tau)$  beschrieben, welche den Zentralabstand  $u$  der veränderlichen *Tangente*  $p$  von  $c$  in Abhängigkeit von deren Richtungswinkel  $\tau$  festlegt (Fig. 1). Die Gleichung von  $p$  in kartesischen Koordinaten  $x, y$  lautet dann:

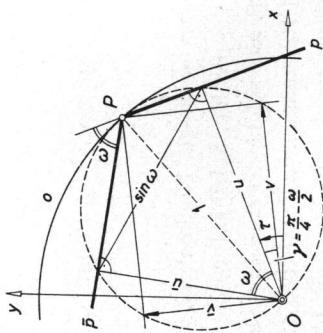
$$x \cos \tau + y \sin \tau = u(\tau). \quad (2.1)$$

Die durch partielle Ableitung nach  $\tau$  gewonnene Gleichung

$$-x \sin \tau + y \cos \tau = \dot{u}(\tau) \quad (2.2)$$

stellt eine durch den Berührungspunkt von  $p$  mit  $c$  gehende, zu  $p$  normale Gerade  $\dot{p}$  dar, also die *Normale* von  $c$ ; sie hat den Ursprungsabstand  $\dot{u} = du/d\tau$ .

Die Auflösung des Gleichungspaares (2.1), (2.2) nach  $x$  und  $y$  liefert dann eine



Figur 1  
Festlegung der Tangentenpaare

Parameterdarstellung von c:

$$x = u \cos \tau - \dot{u} \sin \tau, \quad y = u \sin \tau + \dot{u} \cos \tau. \tag{2.3}$$

Die Vermehrung des Parameters  $\tau$  um den Wert  $\omega = \text{const}$  führt auf eine Tangente  $\bar{p}$  von  $c$ , welche mit  $p$  die Winkel  $\omega$  und  $\pi - \omega$  bildet (Fig. 1):

$$x \cos(\tau + \omega) + y \sin(\tau + \omega) = u(\tau + \omega) = \bar{u}(\tau). \tag{2.4}$$

Für den Schnittpunkt  $P$  von  $p$  und  $\bar{p}$  findet man aus (2.1) und (2.4) die Koordinaten

$$X = \frac{u \sin(\tau + \omega) - \bar{u} \sin \tau}{\sin \omega}, \quad Y = \frac{\bar{u} \cos \tau - u \cos(\tau + \omega)}{\sin \omega}, \tag{2.5}$$

wobei die Koordinaten mit Grossbuchstaben geschrieben wurden, um Verwechslungen mit (2.3) zu vermeiden. Soll dieser Punkt nun auf einem Kreis  $c$  um den Ursprung  $O$  liegen, dann muss, wenn wir den Radius der Einfachheit halber mit 1 normieren, wegen  $X^2 + Y^2 = 1$  die Beziehung

$$u^2 + \bar{u}^2 - 2u\bar{u} \cos \omega = \sin^2 \omega \tag{2.6}$$

bestehen. Diese *Funktionalgleichung* für  $u(\tau)$  ist die Schlüsselgleichung des Problems.<sup>1)</sup>

3. Gehen wir nochmals um  $\omega$  weiter und setzen wir der Kürze zuliebe  $\tau + \omega = \bar{\tau}$ ,  $\tau + 2\omega = \bar{\tau}$  und  $u(\tau + 2\omega) = \bar{u}(\bar{\tau})$ , so erhalten wir aus (2.4) die Gleichung der nächsten

<sup>1)</sup> J. W. Green benützt in [2] die dazu äquivalente, aus Fig. 1 unmittelbar abzulesende transzendente Gleichung  $\arccos u + \arccos \bar{u} = \omega$ . Auch die Gleichung (2.6) gestattet eine einfache geometrische Deutung: Sie drückt in Form des Kosinussatzes aus, dass in dem von den Loten  $u$  und  $\bar{u}$  aufgespannten Dreieck die dem eingeschlossenen Winkel  $\omega$  gegenüberliegende Seite die konstante Länge  $\sin \omega$  hat; dies wiederum ist eine Folge des Umstandes, dass das genannte Dreieck dem Thaleskreis über dem Durchmesser  $OP = 1$  eingeschrieben ist (Fig. 1).

Tangente  $\bar{p}$

$$x \cos \bar{\tau} + y \sin \bar{\tau} = \bar{u}, \tag{3.1}$$

und aus (2.6):

$$\bar{u}^2 + u^2 - 2\bar{u}u \cos \omega = \sin^2 \omega. \tag{3.2}$$

Bilden wir nun die Differenz von (2.6) und (3.2), so gelangen wir zu der Bedingung

$$(\bar{u} - u)(\bar{u} + u - 2\bar{u} \cos \omega) = 0. \tag{3.3}$$

Diese Bedingung ist auf zwei wesentlich verschiedene Arten erfüllbar. Die erste Möglichkeit („Fall I“) lautet:

$$\bar{u} - u = 0 \quad \text{oder} \quad u(\tau + 2\omega) = u(\tau). \tag{3.4}$$

Sie besagt, dass  $u(\tau)$  eine *periodische Funktion* mit der Periode  $2\omega$  ist. Geometrisch bedeutet dies, dass die Tangentenfolge  $p, \bar{p}, \bar{\bar{p}}, \dots$  ein gleichwinkeliges, dem Einheitskreis  $o$  eingeschriebenes *Polygon* bildet, dessen Seiten abwechselnd die Zentralabstände  $u$  und  $\bar{u}$  besitzen (vgl. Fig. 2-4).

Die zweite Möglichkeit („Fall II“) besteht darin, dass

$$u + \bar{u} = 2\bar{u} \cos \omega \tag{3.5}$$

gilt. Geometrisch bedeutet dies, wie man durch Summenbildung von (2.1) und (3.1) erkennt, dass die Tangenten  $p, \bar{p}$  – und daher auch alle folgenden Tangenten – einem *Büschel* angehören, dessen Scheitel der Punkt  $P \in o$  (2.5) ist.<sup>2)</sup>

Die beiden Möglichkeiten sollen nun getrennt weiter verfolgt werden, wobei die triviale Lösung, dass die Kurve  $c$  ein *Kreis* ist (Radius  $u = \bar{u} = \cos(\omega/2)$ ) ein für allemal ausgeschaltet werden darf.

4. Vorerst soll jedoch die Schlüsselgleichung (2.6) in eine einfachere Gestalt ohne gemischtes Glied umgeformt werden.

Ein Beobachter in dem beweglichen System, das von dem auf der festen Kurve  $c$  „reitenden“ starren Winkel  $pP\bar{p}$  repräsentiert wird, könnte die Grössen  $u, \bar{u}$  als von den Achsen  $p$  und  $\bar{p}$  aus gemessene Abstandskoordinaten für das (ihm als veränderlich erscheinende) Zentrum  $O$  deuten. Dementsprechend würde er die Relation (2.6) als die Gleichung des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt  $P$  auffassen, und es läge für ihn nahe, zu einem *rechtwinkligen Koordinatensystem*  $v, \bar{v}$  überzugehen, dessen Achsen mit  $p$  und  $\bar{p}$  die Winkel  $\gamma = (\pi/4) - (\omega/2)$  bilden (Fig. 1). Mit den ursprünglichen Koordinaten  $u, \bar{u}$  besteht dabei der Zusammenhang

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha v + \beta \bar{v}, & \text{wobei } \alpha &= \cos \gamma, & \beta &= \sin \gamma \\ \bar{u} &= \beta v + \alpha \bar{v}, & \text{mit } \gamma &= \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}. \end{aligned} \right\} \tag{4.1}$$

<sup>2)</sup> Hierzu wäre zunächst  $\cos \omega \neq 0$  vorauszusetzen. Für  $\cos \omega = 0$  fallen aber  $p$  und  $\bar{p}$  zusammen, was der Aussage nicht widerspricht;  $o$  ist dann orthoptischer Kreis für  $c$ .

Die neue Gleichung des genannten Kreises lautet dann einfach

$$v^2 + \bar{v}^2 = 1, \quad (4.2)$$

was rein formal durch die Substitution (4.1) in (2.6) zu bestätigen ist. Damit ist das Problem auf die einfachere Funktionalgleichung (4.2) zurückgeführt, in der  $v$  für  $v(\tau)$  und  $\bar{v}$  für  $v(\tau + \omega)$  steht.

Die durch Weiterrücken um  $\omega$  aus der ersten Gleichung (4.1) abgeleitete Beziehung  $\bar{u} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v} -$  mit  $\bar{v} = v(\tau + 2\omega)$  - lehrt bei Vergleich mit der zweiten Gleichung (4.1), dass unter der Voraussetzung  $\beta \neq 0$  wegen  $\bar{v} = v$  die Funktion  $v(\tau)$  die Periode  $2\omega$  haben muss, was offenbar dem „Fall I“ (3.4) entspricht.<sup>3)</sup> Die Transformation (4.1) erscheint damit nur für den Fall I sinnvoll und brauchbar, der anschliessend weiter untersucht wird.

5. Mit Rücksicht auf die bekannte Quadratsumme (4.2) von  $v$  und  $\bar{v}$  liegt es nahe, die Quadratdifferenz

$$v^2 - \bar{v}^2 = f(\tau) \quad (5.1)$$

vorzuschreiben, wobei  $f(\tau)$  im Prinzip eine *willkürliche Funktion* ist, die im Hinblick auf (2.3) jedoch wenigstens einmal stetig differenzierbar sein soll. Überdies muss sie aber wegen  $f(\tau + \omega) = \bar{v}^2 - v^2$  die Bedingung

$$f(\tau + \omega) = -f(\tau) \quad (5.2)$$

erfüllen und, wenigstens innerhalb eines nichtverschwindenden Bereiches, der Beschränkung

$$|f(\tau)| < 1 \quad (5.3)$$

genügen.

Nach entsprechender Wahl einer solchen Funktion  $f(\tau)$  erhalten wir aus (4.2) und (5.1) zunächst die Hilfsfunktionen

$$v(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 + f(\tau)]}, \quad \bar{v}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2}[1 - f(\tau)]} = v(\tau + \omega), \quad (5.4)$$

und anschliessend über (4.1) die gesuchte *Stützfunktion*

$$u(\tau) = \alpha v(\tau) + \beta \bar{v}(\tau) \quad (5.5)$$

einer glatten Kurve  $c$ , die den Einheitskreis  $o$  als isoptische Kurve für den Gesichtswinkel  $\pi - \omega$  besitzt.

Die Koordinaten des *Winkelscheitels*  $P$  lassen sich gemäss (2.5) und (4.1) nach elementaren Umformungen darstellen durch

$$X = v \cos(\tau - \gamma) - \bar{v} \sin(\tau - \gamma), \quad Y = v \sin(\tau - \gamma) + \bar{v} \cos(\tau - \gamma), \quad (5.6)$$

was auch unmittelbar aus Fig. 1 abzulesen ist.

<sup>3)</sup> Für  $\beta = 0$  ( $\omega = \pi/2$ ,  $\alpha = 1$ ) gilt  $u = v$ ,  $\bar{u} = \bar{v}$  und die Transformation ist überflüssig.

6. Soll die Kurve  $c$  *geschlossen* sein, wie dies insbesondere bei algebraischen Kurven der Fall ist, dann müssen die Funktionen  $u(\tau)$ ,  $v(\tau)$  und  $f(\tau)$  neben der geforderten und schon durch (5.2) gewährleisteten Periode  $2\omega$  auch noch eine Periode haben, die ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Soll die Kurve  $c$  sogar *convex* sein, wie dies für ihre Anwendbarkeit als Nockenprofil verlangt werden müsste, dann hätte die letztgenannte Periode genau den Betrag  $2\pi$ .

Wäre nun das Verhältnis  $\omega/\pi$  irrational, so hätten die erwähnten Funktionen zwei inkommensurable Perioden und würden sich daher durchwegs auf Konstante reduzieren,  $f(\tau)$  speziell auf Null. Damit würden wir bloss zu der am Ende von Abschn. 3 ausgedehnten trivialen Lösung eines Kreisprofils gelangen.

Das Verhältnis  $\omega/\pi$  muss daher als *rational* vorausgesetzt werden, wobei negative Werte ausser Betracht bleiben können. Wir schreiben es als gekürzten Bruch an:

$$\frac{\omega}{\pi} = \frac{m}{n}; \quad m, n \text{ positiv, ganz, teilerfremd.} \quad (6.1)$$

Unter Beschränkung auf den Fall *konvexer Kurven*  $c$  gilt dann, dass mit den Perioden  $2\omega$  und  $2\pi$  auch jede ganzzahlige Linearkombination

$$\lambda \cdot 2\omega + \mu \cdot 2\pi = (\lambda m + \mu n) \frac{2\pi}{n} \quad (6.2)$$

eine Periode darstellt.<sup>4)</sup> Da  $m$  und  $n$  relativ prim sind, so existieren ganze Zahlen  $\lambda$  and  $\mu$ , so dass  $\lambda m + \mu n = 1$  wird. Demnach ist auch

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\omega}{m} \quad (6.3)$$

eine Periode der Stützfunktion  $u(\tau)$ . Wäre  $m$  gerade, so wäre auch  $\omega$  eine Periode, was  $u = \bar{u} = \text{const}$  bedingen und damit wiederum auf den ausgeschlossenen Trivialfall eines Kreises  $c$  führen würde.

$m$  muss mithin als *ungerade* vorausgesetzt werden [2]. Eine die Bedingung (5.2) erfüllende Funktion  $f(\tau)$ , welche die Periode (6.3) besitzt, kann dann etwa durch eine konvergente trigonometrische Reihe der Bauart

$$f(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos i n \tau + b_i \sin i n \tau), \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (6.4)$$

angesetzt werden. Auch bei eingehaltener Beschränkung (5.3) ist jedoch die Konvexität der Lösungskurve  $c$  nicht gewährleistet, sondern es wäre eigens zu überprüfen, ob der Krümmungsradius

$$\rho = u + \bar{u} \quad (6.5)$$

im Grundintervall  $0 \leq \tau \leq 2\pi/n$  sein Vorzeichen beibehält.

<sup>4)</sup> Der allgemeine Fall zweier kommensurabler Perioden  $2\omega$  und  $2k\pi$  ( $k$  ganz) wäre ganz ähnlich zu behandeln, indem man  $\omega/k\pi$  als gekürzten Bruch  $m/n$  schreibt.

7. Endliche Abschnitte der Reihe (6.4), also trigonometrische Polynome entsprechender Bauart für  $f(\tau)$ , liefern beliebig viele Beispiele *algebraischer Kurven*  $c$ . Als einfachste Annahme mag etwa die Funktion

$$f(\tau) = a \cdot \cos n\tau \tag{7.1}$$

gewählt werden. Die zugehörigen Kurven  $c$  – die natürlich noch von dem (ungeraden)  $m$  abhängen – sind zwar algebraisch, aber nicht notwendig konvex. Mit hinreichend kleinem  $a$  lässt sich jedoch die Konvexität wenigstens eines Zuges stets erreichen.

Das einfachste einschlägige Beispiel führt mit  $m/n = \frac{1}{2}$  ( $\omega = 90^\circ$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ) auf die Stützfunktion

$$u(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a \cos 2\tau)}. \tag{7.2}$$

Über (2.5) gelangt man schliesslich nach Elimination des Parameters  $\tau$  zur impliziten Darstellung

$$\frac{x^2}{1+a} + \frac{y^2}{1-a} = \frac{1}{2}, \tag{7.3}$$

welche die Kurve  $c$  als *Ellipse* erkennen lässt, sofern  $0 < |a| < 1$ . Damit sind wir auf die in Abschn. 1 erwähnte elliptische Nocke von M. Goldberg [1] gestossen, die den Anstoss zu der vorliegenden Untersuchung gab.

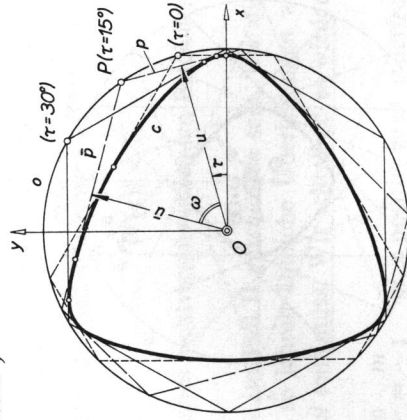
Als zweites Beispiel sei die Annahme  $m/n = \frac{1}{3}$  ( $\omega = 60^\circ$ ,  $\alpha = (\sqrt{3} + 1)/2\sqrt{2} = 0,9659$ ,  $\beta = (\sqrt{3} - 1)/2\sqrt{2} = 0,2588$ ) betrachtet. Hier liefert die Funktion (7.1) algebraische Kurven  $c$ , die den Einheitskreis als isoptische Kurve zum Gesichtswinkel von  $120^\circ$  besitzen. Ein konvexer, dem Wert  $a = \frac{1}{2}$  entsprechender Repräsentant ist in Fig. 2 zu sehen. Die Kurve wurde als Einhüllende der durch (2.1) gemäss (5.4) und (5.5) definierten *Geradenschar*

$$x \cos \tau + y \sin \tau = \alpha v + \beta \bar{v} \text{ mit } v = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a \cos 3\tau)}, \bar{v} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - a \cos 3\tau)} \tag{7.4}$$

konstruiert, wobei die Berührungspunkte mit Hilfe der Kurvennormalen (2.2) lokalisiert wurden.<sup>5)</sup> – Um die *Klasse* dieser algebraischen Kurve  $c$  zu ermitteln, das ist die unveränderliche Anzahl der durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehenden (reellen und imaginären) Tangenten von  $c$ , haben wir die Koordinaten  $x, y$  in (7.4) zu fixieren und die so gewonnene Gleichung für  $\tau$  nach  $\tau$  aufzulösen. Unter Einsatz der komplexen Substitution  $\exp i\tau = t$  gelangt man nach Fortschaffen der Quadratwurzeln (durch zweimaliges Quadrieren) zu einer algebraischen Gleichung 12. Grades in  $t$ : Dementsprechend ist  $c$  eine *Kurve 12. Klasse*. Die vollständige Kurve, die sich bei Berücksichtigung aller Wurzelvorzeichen in (7.4) einstellt, besteht aus vier Zweigen,

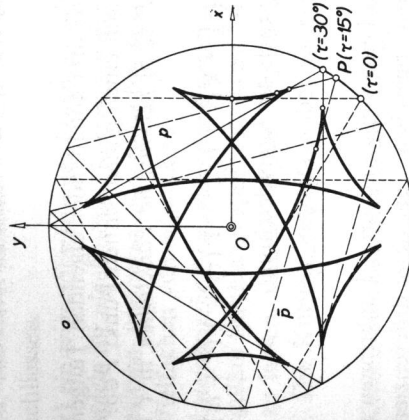
<sup>5)</sup> In Fig. 2 wurden einige der in Abschn. 3 erwähnten gleichwinkligen, dem isoptischen Kreis  $o$  eingeschriebenen Tangentenpolygone eingetragen. Im vorliegenden Falle sind es geschlossene, konvexe Sechsecke.

von denen in Fig. 2 nur einer dargestellt wurde. Fig. 3 zeigt zwei weitere Zweige, die sich bei Verwendung entgegengesetzter Vorzeichen der Quadratwurzeln für  $v$  und  $\bar{v}$  ergeben; der vierte Zweig wäre bezüglich des Ursprungs  $O$  zentrisch-symmetrisch zu dem in Fig. 2 dargestellten.<sup>6)</sup>



Figur 2

Konvexer Zug einer Kurve 12. Klasse mit isoptischem Kreis für  $120^\circ$



Figur 3

Zwei weitere Züge der Kurve 12. Klasse von Fig. 2

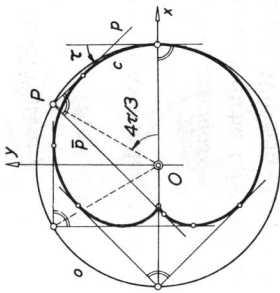
Allgemein findet man für die durch den Ansatz (7.1) zu gewinnenden Kurven  $c$  bei ungeradem  $n$  die Klasse  $4n$ , bei geradem  $n > 2$  die Klasse  $2n$ . Im Ausnahmefall  $n = 2$  der Ellipse (7.2) beträgt die Klasse 2, weil hier wegen  $\beta = 0$  nur eine einzige Quadratwurzel auftritt.

Als letztes Beispiel sei noch die Annahme  $m/n = \frac{1}{4}$  ( $\omega = 135^\circ$ ,  $\alpha = 0,9239$ ,

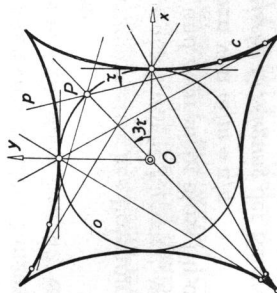
<sup>6)</sup> Für  $a = 1$  zerfällt die Kurve 12. Klasse in zwei kongruente sechsspitze Hypozykloiden (Kurven 6. Klasse).



Die isoptische Eigenschaft des Scheitelkreises bei Zykloiden ist im übrigen wohl bekannt. – Als spezielle Beispiele seien angeführt: Die Kardioiden ( $k = \frac{1}{2}$ ,  $\omega/m = \pi/2$ ; Fig. 5), die Nephroide ( $k = \frac{3}{2}$ ,  $\omega/m = \pi/3$ ), der Steinersche Dreispitz ( $k = 4$ ,  $\omega = \pi/2$ ) und die Astroide ( $k = 3$ ,  $\omega/m = \pi/3$ ; Fig. 6).



Figur 5  
Kardioiden mit orthoptischem Scheitelkreis



Figur 6  
Astroide mit isoptischem Scheitelkreis für  $60^\circ$  und  $120^\circ$

10. Der Grenzfall einer *isoptischen Geraden* spielte eine Rolle bei der Lösung der Aufgabe, ebene Spiegelprofile zu finden, die ein Parallelbüschel nach zweimaliger Reflexion wieder in ein Parallelbüschel verwandeln [3], wie es etwa die Parabel bei achsenparallelem Lichteinfall tut.

Es ist klar, dass sich das allgemeine Problem der Bestimmung von ebenen Kurven, die eine beliebig vorgegebene Kurve  $o$  als isoptische Linie für einen vorgeschriebenen Gesichtswinkel besitzen, unter Voraussetzung des Falles II ganz analog wie in Abschn. 8 behandeln und erledigen lässt. Anstelle der Kreisgleichung (8.2) hat bloss die Gleichung der gegebenen Kurve  $o$  zu treten. Auch die in Abschn. 9 erwähnte kinematische Deutung ist wieder möglich.

Die entsprechende Behandlung des Falles I scheint jedoch sehr schwierig zu sein,

und es ist durchaus die Frage, ob die isoptische Kurve  $o$  in diesem Falle überhaupt beliebig – beispielsweise als Ellipse – vorgegeben werden darf.<sup>7)</sup>

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] GOLDBERG, M.: *Rotors in Polygons and Polyhedra*, Math. Comp. 14, 229–239 (1960).
- [2] GREEN, J. W.: *Sets Subtending a Constant Angle on a Circle*, Duke Math. J. 17, 263–267 (1950).
- [3] WUNDERLICH, W.: *Ein Spiegelproblem*, Monatsh. Math. 53, 63–72 (1949). – Vgl. auch: *Ungelöste Probleme*, Elem. Math. 15, 37–39 (1960).
- [4] WUNDERLICH, W.: *Ebene Kinematik (Hochschultaschenbücher, Bd. 447/447a)*, Bibl. Inst. Mannheim (1970), 254–257.
- [5] WUNDERLICH, W.: *Contributions to the Geometry of Cam Mechanisms with Oscillating Followers*, J. Mechanisms (erscheint demnächst).

Technische Hochschule, Wien und  
Washington State University

<sup>7)</sup> Zusatz bei der Korrektur: Das Problem der Ermittlung von „Kurven mit isoptischer Ellipse“ konnte inzwischen gelöst werden; eine gleichnamige Arbeit wird in Monatsh. Math. erscheinen.