

Kurven mit isoptischer Ellipse

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 6 Abbildungen

(Eingegangen am 5. Oktober 1970)

Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag zu dem wesentlich schwierigeren *isoptischen Umkehrproblem* geben, das verlangt, zu einer vorgelegten analytischen Kurve o analytische Kurven c zu finden, welche o als (vollständige oder unvollständige) isoptische Linie besitzen. Die Untersuchung wurde durch eine Frage der praktischen Getriebelehre angeregt, die Gestalt rotierender Kurvenscheiben betreffend, welche gleichzeitig beide Schenkel eines starren, drehbar gelagerten Winkelhebels zu betätigen imstande sind [2, 9, 10]. Ein derartiges Nockenprofil c ist dadurch gekennzeichnet, daß es einen Kreis o als isoptische Linie besitzt¹. Die Frage nach solchen „Kurven mit isoptischem Kreis“ konnte über eine Funktionalgleichung vollständig beantwortet werden [3, 11]; die Lösungen hängen jeweils von einer innerhalb gewisser Grenzen willkürlich wählbaren Funktion ab. Bei der verwandten Frage nach „Kurven mit isoptischer Ellipse“ liegen zum Teil ähnliche, jedoch bedeutend schwierigere Verhältnisse vor, die den Einsatz der entsprechenden Funktionalgleichung aussichtslos erscheinen ließen. So wurde eine eigene, für die *Ellipse* spezifische Methode entwickelt, die zu einer weitgehenden Lösung führte. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse bieten trotzdem auch gewisse Hinweise für das allgemeine Umkehrproblem.

§ 2.

Sei also

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{mit } a > b > 0 \quad (2.1)$$

die kartesische Gleichung der vorgelegten *Ellipse* o . Aus jeder bekannten Tangente t einer Kurve c , die o zur isoptischen Linie für einen bestimmten Gesichtswinkel γ hat, lassen sich weitere Tangenten von c ableiten, indem man in einem oder in beiden Schnittpunkten von t mit o Geraden anbringt, die mit t den Winkel γ bilden, und diesen Prozeß fortsetzt.

Hierbei sind grundsätzlich zwei Möglichkeiten zu beachten:

Fall I. Die beiden Endpunkte einer Ellipse sind gleichberechnigt. Hier führt der Fortsetzungsprozeß jeweils zu einem der Ellipse o eingeschriebenen *gleichwinkligen Polygon*, dessen (notigenfalls zu verlängerten) Seiten die gesuchte Urkurve c berühren.

Fall II. Die beiden Endpunkte einer Ellipse sind nicht gleichberechnigt. Hier ist der Fortsetzungsprozeß stets im selben Punkt vorzuzuberechnen.

¹ Nach einer vorangegangenen Bemerkung kann beispielsweise eine um ihren Mittelpunkt rotierende *Ellipse* einen orthogonalen Winkelhebel betätigen, wie dies 1956 von M. GOLDBERG vorgeschlagen wurde [2, 9].

§ 1.

Unter einer *isoptischen Linie* einer ebenen Kurve c versteht man den Ort von Punkten der Kurvenebene, aus welchen c unter einem unänderlichen *Gesichtswinkel* γ gesehen wird [1, 4, 5], also die Menge der Schnittpunkte solcher Tangentenpaare von c , welche die Winkel γ und $\pi - \gamma$ bilden. Im Falle $\gamma = \pi/2$ spricht man von einer „orthoptischen Linie“.

Das Aufsuchen der zu einem bestimmten Gesichtswinkel gehörigen isoptischen Linie o einer vorgelegten Kurve c ist eine mehr oder weniger langwierige Routineaufgabe, die keinerlei Problematik enthält. Bekannte Beispiele sind die vielfach untersuchten isoptischen Linien der Kegelschnitte [1, 4, 5]. Für die *Parabel* ergibt sich dabei ein Berührungsbüschel von Hyperbeln mit einem gemeinsamen Brennpunkt, unter denen als ausgeartete Grenzform die doppelt zu zählende orthoptische Leitlinie auftritt. Zur *Ellipse* gehören als isoptische Linien gewisse bizirkulare Quartiken, die auch als ebene Schnitte einer Torusfläche („Spirische Linien“) bekannt sind, unter ihnen der doppelt zu zählende orthoptische Kreis. Für *Epi- und Hypozykloiden* (gespitzte Radlinien) findet man als isoptische Linien Epi- bzw. Hypotrochoiden (ungespitzte Radlinien), unter welchen für besondere Gesichtswinkelwerte auch der Scheitelkreis auftreten kann [1, 6].

Kinematisch läßt sich die isoptische Linie o einer Kurve c als Bahn des Scheitels eines starren Winkels deuten, dessen Schenkel an c gleiten. Hieraus leiten sich einfache Tangenten- und Krümmungskonstruktionen für o ab.

nehmen und man gelangt jeweils zu einem regulären „Stern“, d. h. zu einer einem Strahlbüschel angehörenden gleichwinkligen Strahlengruppe, die aus Tangenten von c besteht.

Die beiden Fälle verlangen natürlich eine getrennte Behandlung, wobei stets $0 < \gamma < \pi$ vorausgesetzt werden darf.

§ 3.

Zunächst soll der Fall I verfolgt werden.

Bezeichne $\omega = \pi - \gamma$ den (orientierten) Richtungsunterschied benachbarter (nicht orientierter) Seiten des in § 2 genannten *Sehnepolygons* der Ellipse o . Da bei entgegengesetzter Durchlaufung des Polygons der Richtungsunterschied ω auf $\pi - \omega$ wechselt, kann hinfort $0 < \omega \leq \pi/2$ vorausgesetzt werden.

Ist ω/π irrational, so kann sich das Polygon nicht schließen. Ob die abzählbar unendlich vielen Seiten eines solchen Sehnepolygons eine gemeinsame glatte Hüllkurve berühren können, erscheint zweifelhaft, doch muß diese Frage bis auf weiteres offen bleiben.

Fortan werden jedenfalls bloß *rationale Werte*

$$\frac{\omega}{\pi} = \frac{m}{n} \leq \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

mit positiven und teilerfremden ganzen Zahlen m, n betrachtet. Wie sich zeigen wird, kann sich ein derartiges Sehnepolygon der Ellipse o unter Umständen schließen.

Zum Nachweis transformieren wir die Ellipse o (2.1) mit Hilfe der *Affinität*

$$x = ax', \quad y = by' \quad (3.2)$$

in den *Einheitskreis* o'

$$x'^2 + y'^2 = 1. \quad (3.3)$$

Ferner gehen wir von den kartesischen Koordinaten x, y zu *Minimalkoordinaten* $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ über. Die Affinität (3.2) wird sodann durch

$$z = az' + \beta\bar{z}', \quad \bar{z} = \beta z' + a\bar{z}' \quad (3.4)$$

beschrieben, wobei

$$a = \frac{1}{2}(a+b), \quad \beta = \frac{1}{2}(a-b). \quad (3.5)$$

Die Umkehrformeln lauten:

$$abz' = az - \beta\bar{z}, \quad ab\bar{z}' = -\beta z + a\bar{z}. \quad (3.6)$$

Bedeutet φ den von der x -Achse aus gemessenen *Richtungswinkel* der Normale einer Polygonseite, so kann diese Richtung durch die komplexe Zahl

$$r = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (3.7)$$

gekennzeichnet werden. Die Polygonseite selbst hat dann den Richtungsvektor ir , während zu den folgenden Seiten die Richtungsvektoren $ie^{2i\varphi}, ie^{4i\varphi}, \dots$ gehören, wobei

$$\varepsilon = e^{i\omega}. \quad (3.8)$$

Dem Sehnepolygon der Ellipse o entspricht vermöge der Affinität (3.4) ein gewisses Sehnepolygon im Einheitskreis o' mit den gemäß (3.6) zu gewinnenden Seitenrichtungen $i(ar + \beta\bar{r}), i(aer + \beta\bar{e}r)$ usw. Die zugehörigen *Normalenrichtungen* lauten daher $ar + \beta\bar{r}, aer + \beta\bar{e}r$ usw. Im einzelnen erhält man über (3.7) und (3.5):

$$ar + \beta\bar{r} = a(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \beta(\cos \varphi - i \sin \varphi) = a \cos \varphi + ib \sin \varphi, \\ aer + \beta\bar{e}r = a \cos(\varphi + \omega) + ib \sin(\varphi + \omega) \text{ usw.} \quad (3.9)$$

Der Übergang zu *Einheitsvektoren* liefert schließlich:

$$s_1 = \frac{ar + \beta\bar{r}}{|ar + \beta\bar{r}|}, \quad s_2 = \frac{aer + \beta\bar{e}r}{|aer + \beta\bar{e}r|}, \quad \dots \quad (3.10)$$

Zeichnet man nun unter den Durchmessern des Kreises o' die zu den Richtungen s_1, s_2, \dots gehörigen aus, so lassen sich, ausgehend von einem beliebigen Anfangspunkt z'_1 auf o' , die folgenden Ecken z'_2, z'_3, \dots des affinen Sehnepolygons durch eine Kette von *Spiegelungen* an den genannten Durchmessern herleiten. Wie leicht einzusehen ist, wird etwa die Spiegelung $z'_1 \rightarrow z'_2$ am Durchmesser s_1 — auch für Punkte, die nicht dem Einheitskreis angehören — einfach durch

$$z'_2 = s_1^2 \bar{z}'_1 \quad (3.11)$$

beschrieben², wobei gemäß (3.10)

$$s_1^2 = \frac{ar + \beta\bar{r}}{\beta r + a\bar{r}}. \quad (3.12)$$

Analoge Formeln gelten für die Spiegelungen an s_2, s_3, \dots , so daß die erwähnte *Spiegelungskette* durch

² Übt man eine Drehung aus, welche den Durchmesser mit der Richtung s_1 in die x' -Achse überführt, so gelangt man von den (reellen) Punkten z'_1 und z'_2 zu Punkten, deren Koordinaten z'_1/s_1 und z'_2/s_1 konjugiert-komplex sind; mit Rücksicht auf $s_1 \bar{s}_1 = 1$ folgt daraus die Beziehung (3.11).

$$z'_1 \rightarrow z'_2 = s_1^2 z'_1 \rightarrow z'_3 = s_2^2 z'_2 = s_2^2 s_1^2 z'_1 \rightarrow z'_4 = s_3^2 s_2^2 s_1^2 z'_1 \rightarrow \dots \quad (3.13)$$

dargestellt wird.

§ 4.

Ist nun der in (3.1) erklärte Nenner n ungerade, so gelangt man nach n Schritten zu

$$z'_{n+1} = p^2 z'_1 \text{ mit } p = s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} s_n = 1/\bar{p}, \quad (4.1)$$

und nach weiteren n Schritten wegen $s_{n+k} = -s_k$ (als Folge von $\varepsilon^n = -1$) zu

$$z'_{2n+1} = p^2 z'_{n+1} = p^2 \bar{p} z'_1 = z'_2. \quad (4.2)$$

Das *Sehnenpolygon* im Einheitskreis o' schließt sich demnach bei beliebigem Ausgangspunkt z'_1 und beliebiger Anfangsrichtung s_1 stets nach spätestens $2n$ Schritten. Für die Ellipse o gilt dementsprechend:

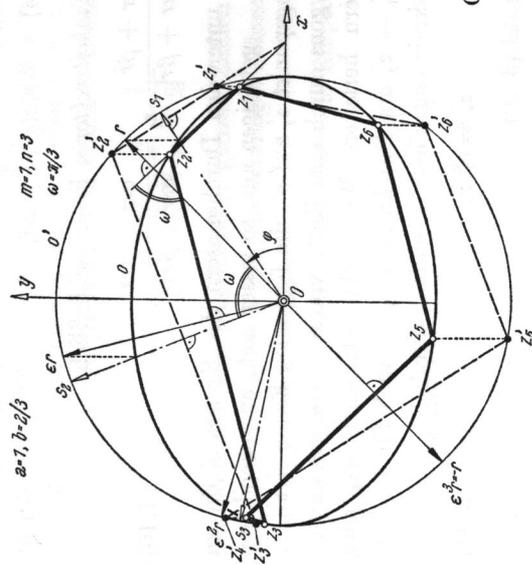


Abb. 1. Gleichwinkeliges Sehnen-sechseck einer Ellipse

Satz 1. Jedes einer Ellipse eingeschriebene gleichwinkelige Polygon mit dem Richtungsunterschied $\omega = \pi/n$ aufeinanderfolgender Seiten schließt sich nach spätestens $2n$ Schritten, falls n ungerade ist.

Abb. 1 zeigt für die Annahme $\omega = \pi/3$ ($m = 1, n = 3$) ein derartiges geschlossenes Sehnen-sechseck einer Ellipse mit dem Achsenverhältnis $a : b = 3 : 2$. Die Konstruktion verläuft mit Benützung der Einheit $a = 1$ und der affinen Beziehung zwischen der Ellipse o und ihrem

Hauptsechseck o' wie folgt: Nach Eintragung der zu den gewünschten Seitenrichtungen normalen Radiusvektoren $r, \varepsilon r, \varepsilon^2 r$ werden deren auf o' liegende (in die Ecken eines regulären Sechsecks fallende) Endpunkte gemäß (3.9) auf o zurücktransformiert³. Die zugehörigen Ellipsenhalbmesser ergeben dann nach Verlängerung bis zum Scheitelkreis o' die Einheitsvektoren s_1, s_2, s_3 (3.10) der Spiegelachsen. Fortlaufende Spiegelung eines beliebigen Ausgangspunktes $z'_1 \in o'$ liefert dann die weiteren Ecken z'_2, \dots, z'_6 des affinen Sechsecks in o' , das anschließend nur mehr in die Ellipse o zurückzustransformieren ist³.

§ 5.

Greift man jetzt aus der Menge der laut Satz 1 existierenden ∞^2 geschlossenen gleichwinkligen Sehnen- $2n$ -Ecke der Ellipse o eine passende *einparametrische Schar* von Polygonen heraus, deren Seiten eine *gemeinsame Hüllkurve* c besitzen, dann hat man eine Lösung des zur Behandlung gestellten Problems. Die Definition der genannten Schar könnte etwa dadurch erfolgen, daß man den Polygonecken eine gewisse symmetrische Bedingung auferlegt.

Es wird sich zeigen, daß man hierbei mit den linearen symmetrischen Funktionen der z_k und der \bar{z}_k auskommt, welche bekanntlich den *Eckenschwerpunkt* Z des Polygons bestimmen. Nach Aufstellung einer Liste gemäß (3.13) für die Werte $z'_1, z'_2 = s_1^2 z'_1$ bis $z'_n = s_1^2 s_2^2 s_3^2 \dots s_{n-1}^2 z'_1$ und weiterhin mit Beachtung von (4.1) für $z'_{n+1} = p^2 z'_1, z'_{n+2} = s_1^2 p^2 z'_1$ bis $z'_{2n} = s_1^2 s_2^2 s_3^2 \dots s_{n-1}^2 p^2 z'_1$ erhält man

$$2nZ' = \sum_{k=1}^{2n} z'_k = (Ap^2 + Bs_1^2) (\bar{p} z'_1 + \bar{z}'_1), \quad (5.1)$$

wobei abkürzend

$$A = 1 + \frac{s_2^2}{s_1^2} + \dots + \frac{s_2^2 s_3^2 \dots s_{n-1}^2}{s_1^2 s_3^2 \dots s_{n-2}^2}, \quad B = 1 + \frac{s_3^2}{s_2^2} + \dots + \frac{s_3^2 s_4^2 \dots s_{n-2}^2}{s_2^2 s_4^2 \dots s_{n-3}^2} \quad (5.2)$$

bedeutet. Analog ergibt sich mit den konjugierten Werten:

$$2n\bar{Z}' = \sum_{k=1}^{2n} \bar{z}'_k = (\bar{A} + \bar{B} p^2 \bar{s}_1^2) (\bar{p} z'_1 + \bar{z}'_1). \quad (5.3)$$

Gibt man nun den *Schwerpunkt* des Sehnenpolygons der Ellipse o durch seine Minimalkoordinaten $Z \neq 0, \bar{Z} \neq 0$ vor, so sind gemäß (3.6)

³ Hierzu wird man gemäß der bekannten Ellipsenkonstruktion nach DE LA HIRE mit Vorteil den Nebenseitelkreis von o heranziehen.

auch die Koordinaten Z', \bar{Z}' des Schwerpunktes für die Ecken des affinen, dem Kreis o' eingeschriebenen Polygons bekannt. Aus

$$\frac{Z'}{\bar{Z}'} = \frac{A\rho^2 + Bs_1^2}{A + \bar{B}\bar{\rho}^2 s_1^2} = \dots = \frac{c\rho^{2n} + \beta}{\alpha + \beta\rho^{2n}} \quad (5.4)$$

läßt sich dann die Richtungsgröße r (3.7) berechnen; die $2n$ Werte entsprechen den einzelnen Seitenrichtungen des Polygons. Zu jedem r -Wert gehört ein Ausgangspunkt, der sich unter Beachtung von $z_1 \bar{z}_1 = 1$ durch Auflösung von (5.1) oder (5.3) nach z_1 und \bar{z}_1 finden läßt. Die beiden Lösungen entsprechen Gegenecken, so daß letzten Endes das gesuchte Polygon durch seinen Schwerpunkt *eindeutig* bestimmt erscheint, vorausgesetzt daß derselbe vom Ellipsenzentrum verschieden ist⁴.

In dem angedeuteten Ausnahmefall ist $Z' = \bar{Z}' = 0$ und somit gemäß (5.1) und (5.3) $\bar{\rho}^2 z_1' + \bar{z}_1' = 0$, infolgedessen

$$z_1' = \pm i \rho = \pm i s_1^2 s_2^2 s_3^2 \dots s_{n-1}^2 s_n^2 \quad (5.5)$$

Hierdurch wird jetzt nicht ein einziges Polygon, sondern vermöge der Abhängigkeit $z_1(r)$ eine stetige *Schar* von ∞^1 Polygonen definiert, die allesamt ihren Schwerpunkt im Ursprung O haben und bezüglich desselben *zentrisch-symmetrisch* sind, weil zufolge (4.1) $z_1' = -\bar{z}_{n+1}'$. Aus diesem Grunde führen auch die beiden Vorzeichen in (5.5) zur selben Schar. Zusammenfassend gilt:

Satz 2. Die durch (5.5) erklärte Schar von gleichwinkligen Sehnenpolygonen einer Ellipse besteht aus zentrisch-symmetrischen $2n$ -Ecken mit ungeradem n , deren Seiten eine gemeinsame Hüllkurve erzeugen. Für diese ist die Ellipse isotrische Linie mit einem ganzzahligen Vielfachen von π/n als Gesichtswinkel.

Abb. 2 zeigt eine derartige Kurve c für die Annahme $m = 1, n = 3$ ($\gamma = \pi - \omega = 2\pi/3$). Die erzeugenden Sehnensechsecke wurden nach dem Vorgang in Abb. 1 konstruiert, wobei für jeden Richtungswinkel φ der Ausgangspunkt über (5.5) zu ermitteln war. Bezeichnet $\sigma_k = \arg s_k$ den Richtungswinkel von s_k — er berechnet sich gemäß (3.9) aus

⁴ Das Polygon fällt allerdings nur dann *reell* aus, wenn die Minimalkoordinaten z_1, \bar{z}_1 konjugiert-komplexe Werte haben. Dies tritt ein, sobald der (reell vorgegebene) Schwerpunkt Z nicht zu weit vom Ellipsenzentrum O entfernt ist. Die Realitätsgrenze, gekennzeichnet durch das Verschwinden der Diskriminante der quadratischen Bestimmungsgleichung für z_1 , ist mit der Schwerpunktesellipse (6.2) der n -Ecks-Schar aus Satz 5 identisch.

$a \cdot \operatorname{tg} \sigma_k = b \cdot \operatorname{tg} [\varphi + (k-1)\omega]$ —, so erhält man den Ausgangspunkt durch $\arg z_1' = (\pi/2) + \sigma_1 - \sigma_2 + \dots + \sigma_n$.

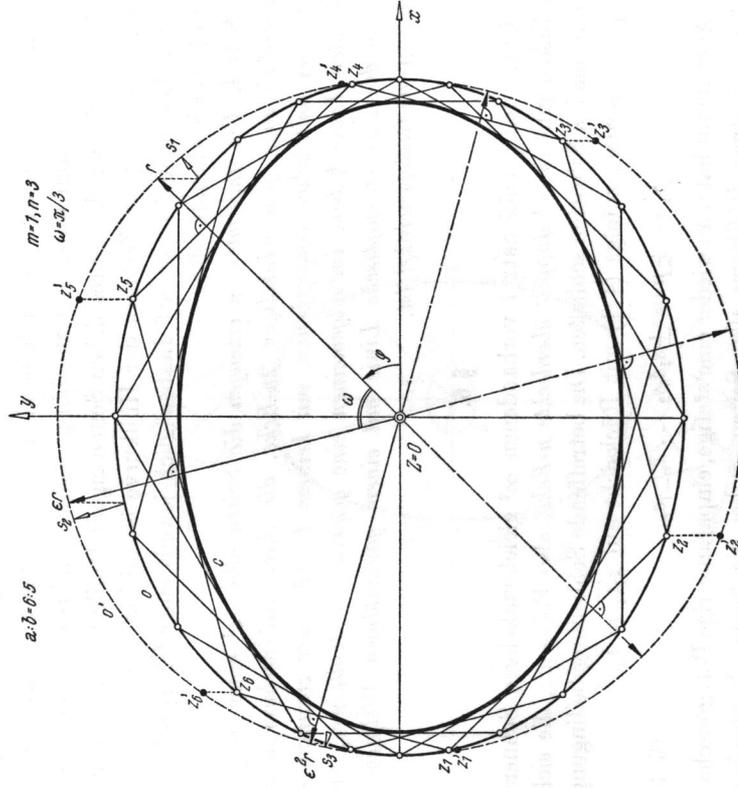


Abb. 2. Konvexe Kurve 6. Klasse mit isotrischer Ellipse zum Gesichtswinkel von 120°

Für alle Sehnenpolygone mit einem festen r -Wert bedingt (5.4) $Z'/\bar{Z}' = \text{const.}$ Dies bedeutet geometrisch:

Satz 3. Bei ungeradem n haben sämtliche ∞^1 einer Ellipse eingeschriebenen gleichwinkligen $2n$ -Ecke mit gleichen Seitenrichtungen ihren Eckenschwerpunkt auf einem bestimmten Durchmesser der Ellipse.

Diese Sehnenpolygone erzeugen wegen der parallelen Lage entsprechender Seiten keine Hüllkurve. Im Hinblick auf die Bestimmbarkeit eines gleichwinkligen Sehnens- $2n$ -Ecks der vorgelegten Ellipse durch die Vorgabe seines Eckenschwerpunktes Z kann man eine einparametrische Polygonschar durch Vorschreibung des Schwerpunktes l festlegen, was implizit durch eine Gleichung $F(Z, \bar{Z}) = 0$ oder in

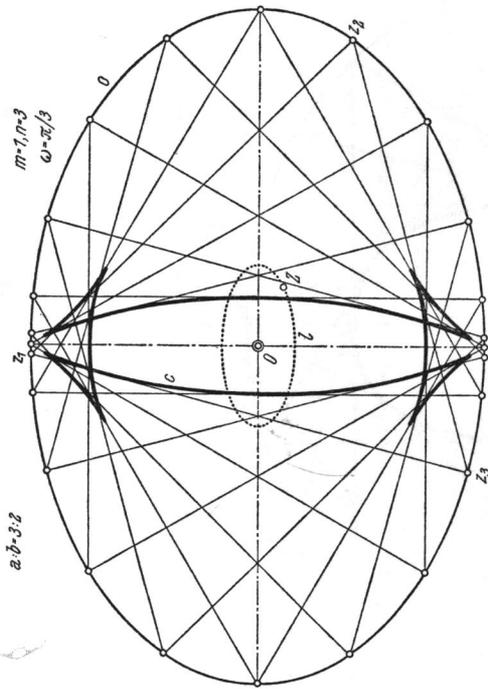


Abb. 4. Nichtkonvexe Kurve 6. Klasse mit isotrischer Ellipse zum Gesichtswinkel von 60°

Liegt als isotrische Linie ein von einer Ellipse verschiedenes *Oval* vor, dann lassen sich ebenfalls — wenn auch nicht in elementarer Weise — Scharen geschlossener gleichwinkliger Sehnenpolygone finden, die mit ihrer Hüllkurve Lösungen des isotrischen Umkehrproblems liefern. Es ist jedoch nicht zu erwarten, daß ein Satz von der Art des Satzes 2 gilt. Vermutlich ist die Existenz von ∞^2 geschlossenen gleichwinkligen Sehnenpolygonen sogar für die Ellipse kennzeichnend.

§ 7.

Die durch (5.5) und (6.1) definierten Polygonscharen sind als Spezialfälle der allgemeineren Annahme

$$z'_1 = \delta p \text{ mit } \delta = \text{const, } \bar{\delta}\delta = 1 \tag{7.1}$$

aufzufassen. Zufolge (4.1) ist $z'_{n+1} = \bar{\delta}p$ und demnach $z'_1/z'_{n+1} = \delta^2$. Die durch (7.1) erklärten Sehnenpolygone des Kreises o' sind mithin geometrisch durch die Eigenschaft ausgezeichnet, daß ihre sämtlichen, je zwei Gegenecken z'_k und z'_{n+k} verbindenden „Hauptdiagonalen“ aus dem Zentrum O' unter dem konstanten Winkel $2 \arg \delta$ erscheinen. Die entsprechenden, der Ellipse o eingeschriebenen gleichwinkligen Polygone haben daher die kennzeichnende Eigenschaft, daß ihre Hauptdiagonalen eine zu o zentrisch-ähnliche, mit dem Maßstabsfaktor $\cos \delta$ vom Mittelpunkt O aus verkleinerte Ellipse berühren.

Die von den Polygonseiten erzeugten Hüllkurven sind offensichtlich *algebraisch*. Genauere Prüfung lehrt allerdings, daß eine *gemeinsame Hüllkurve* nur in den bereits behandelten Fällen $\delta = \pm 1$ (6.1) und $\delta = \pm i$ (5.5) auftritt. In den übrigen Fällen stellen sich hingegen wegen der unvollkommenen Symmetrie *zwei Hüllkurven* ein, die von den Polygonseiten abwechselnd berührt werden; damit liegt ein Beispiel für die in § 5 erwähnte Möglichkeit des Zerfallens der Hüllkurve vor.

Zum Nachweis und zur Bestimmung der (gemeinsamen) *Kurvenklasse* schreiben wir die Gleichung der die Ecken z'_1 und z'_2 verbindenden Seite in Minimalkoordinaten an. Sie lautet, wie man leicht nachprüft,

$$\bar{s}_1 z'_1 + s_1 \bar{z}'_2 = \bar{s}_1 \delta p + s_1 \bar{\delta} \bar{p}. \tag{7.2}$$

Um nun die Klasse der Hüllkurve der Geradenschar (7.2) zu bestimmen, hat man die durch einen beliebigen festen Punkt der Ebene gehenden Tangenten abzuzählen. Es sind also in (7.2) für die laufenden Koordinaten z' und \bar{z}' feste Werte einzusetzen, womit man für den gemäß (3.10) in den Koeffizienten steckenden Scharparameter r zu einer Bestimmungsgleichung gelangt. Dieselbe ist zwecks Wegschaffung der Quadratwurzeln zu quadrieren:

$$\bar{s}_1 z'^2 + s_1^2 \bar{z}'^2 + 2z\bar{z} = \delta^2 s_1^2 p^2 + \bar{\delta}^2 s_1^2 \bar{p}^2 + 2. \tag{7.3}$$

Nach Eintragung der Ausdrücke

$$s_1^2 = \frac{\alpha r + \beta \bar{r}}{\beta r + \alpha \bar{r}} = \frac{\alpha u + \beta}{\beta u + \alpha}, \quad s_2^2 = \frac{\alpha \varepsilon^2 u + \beta}{\beta \varepsilon^2 u + \alpha} \text{ usf.} \tag{7.4}$$

ergibt sich schließlich, sobald die Nenner wegmultipliziert sind, für den neuen Scharparameter $u = r^2$ eine algebraische Gleichung vom Grade $2n$. — Führt man die entsprechenden Entwicklungen für die nächste Polygonseite durch, welche die Ecken z'_2 und z'_3 verbindet, und führt man diesmal den Parameter $u = \varepsilon^2 r^2$ ein, so gelangt man zu einer ganz analogen Gleichung, in welcher bloß δ^2 und $\bar{\delta}^2$ die Plätze vertauscht haben. Die beiden Hüllkurven fallen also dann und nur dann zusammen, wenn $\delta^2 = \bar{\delta}^2 = \delta^{-2}$, also für $\delta = \pm 1$ und $\delta = \pm i$. Es gilt mithin

Satz 6. Die Einhüllenden der durch (5.5) oder (6.1) definierten Sehnenpolygone einer Ellipse sind nichtzerfallende algebraische Kurven $2n$ -ter Klasse.

Die in Abb. 2, 3 und 4 dargestellten, zur Annahme $n = 3$ gehörigen Hüllkurven sind demzufolge durchwegs von 6. Klasse.

§ 8.

Nunmehr bleibt noch der in § 4 zurückgestellte Fall eines *geraden* Nenners n zu besprechen. Hier gelangt man vom Ausgangspunkt z'_1 nach n Schritten zu

$$z'_{n+1} = q^2 z'_1 \text{ mit } q = \bar{s}_1 s_2 \dots \bar{s}_{n-1} s_n = 1/\bar{q}, \quad (8.1)$$

und das Sehnepolygon wird sich auch nach ständiger Fortsetzung im allgemeinen nicht schließen, denn der Übergang von z_1 zu z'_{n+1} erfolgt durch eine Drehung um den Winkel $2 \arg q$, der nicht mit 2π kommensurabel zu sein braucht.

Dementsprechend gilt hier kein Analogon zu Satz 1, d. h. es steht keine stetige zweiparametrische Familie von gleichwinkligen Sehnepolygonen der Ellipse zur Verfügung, welche sich unabhängig vom Ausgangspunkt und von der Anfangsrichtung schließen.

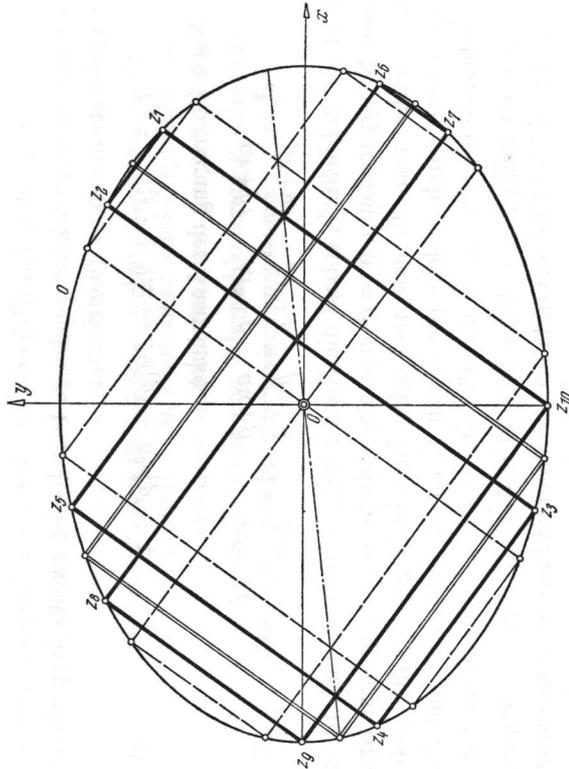


Abb. 5. Orthogonale Sehnepolygone einer Ellipse

Wohl kann man auch jetzt einparametrische Scharen von geschlossenen Sehnepolygonen angeben, doch liefern dieselben keine Einhüllende. Fordert man nämlich, daß sich das Polygon nach h n Schritten schließt — mit Rücksicht auf die sich wiederholenden Seitenrichtungen

muß die Schrittzahl für ein geschlossenes Polygon ein ganzzahliges Vielfaches von n sein —, so lautet die Bedingung hierfür:

$$q^{2h} = 1 \text{ oder } q^2 = e^{2i\pi g/h} \quad (g \text{ ganz}), \quad (8.2)$$

und dies bedeutet gemäß (8.1) und (3.10) eine vom Ausgangspunkt z'_1 unabhängige Bestimmungsgleichung für die Anfangsrichtung r . Jede so gefundene Schar gleichwinkliger geschlossener Sehnepolygone der Ellipse o weist also die gleichen Seitenrichtungen auf und führt daher zu keiner Hüllkurve.

Besonders übersichtliche Verhältnisse treten bei der einfachsten Annahme $n = 2$ ($\omega = \pi/2$) auf, welche die *orthogonalen Sehnepolygone einer Ellipse* betrifft. Die Bestimmung und Struktur geschlossener Polygone solcher Art wurde in einer eigenen Note [12] ausführlich behandelt. Abb. 5 zeigt einige zu $h = 5$ gehörige orthogonale *Sehnepolygone* einer Ellipse.

Würde man versuchen, Hüllkurven durch Scharen *offener* Sehnepolygone zu gewinnen, so erhielte man — falls es überhaupt gelingt, Scharen mit gemeinsamer Einhüllender aller Seiten zu finden — Kurven mit abzählbar unendlich vielen Tangenten gleicher Richtung, also niemals algebraische oder konvexe.

Satz 7. Für Gesichtswinkel $\omega = m\pi/n$ mit geradem n gibt es keine algebraischen oder konvexen Kurven, die eine Ellipse als isoptische Kurve besitzen und dem „Fall I“ zuzuzählen wären.

§ 9.

Abschließend ist noch der in § 2 angeführte *Fall II* zu behandeln, wobei wir uns gleichfalls auf die Voraussetzung (3.1) mit dem vollen Winkel kommensurabler Gesichtswinkel $\omega = m\pi/n$ beschränken wollen.

Hier können die gesuchten Kurven c , welche die gegebene Ellipse o (2.1) als isoptische Linie besitzen, kinematisch als gemeinsame Einhüllende der n Strahlen eines regulären „Sternes“ erzeugt werden, die unter gleichen Winkeln vom Betrag π/n aufeinanderfolgen. Dieser Stern ist als starres Gebilde so zu führen, daß sein Scheitel P die Ellipse o periodisch durchläuft und daß die gleichzeitige Drehung des Sterns so erfolgt, daß er nach einer Periode in um $m\pi/n$ versetzter Stellung mit seiner Ausgangslage zur Deckung kommt. Sämtliche n Strahlen des Sterns erzeugen dann während dieser Bewegung eine *gemeinsame Hüllkurve* c , welche die Ellipse o zur (mehrfachen) isoptischen

Linie für alle ganzzahligen Vielfachen von π/n als Gesichtswinkel besitzt.

Wählen wir den Richtungswinkel φ eines erzeugenden Strahles als Parameter und setzen wir die Koordinaten des Scheitels $P(X, Y)$ unter Beachtung der Ellipsengleichung (2.1) als *periodische Funktionen* von φ mit passender Periode an, dann können wir die *Tangentengleichung* der Hüllkurve c mit

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = X(\varphi) \cos \varphi + Y(\varphi) \sin \varphi \quad (9.1)$$

schriftlich beschreiben. Durch Ableitung nach φ entsteht daraus bekanntlich die Normalengleichung, so daß sich durch Auflösung der beiden linearen Gleichungen nach x und y schließlich auch eine Parameterdarstellung von c gewinnen läßt.

Die einfachste Annahme für die periodischen Funktionen $X(\varphi)$ und $Y(\varphi)$ wäre

$$X = a \cdot \cos(k\varphi + \lambda), Y = b \cdot \sin(k\varphi + \lambda) \quad (9.2)$$

mit rationalem k und konstantem λ . Die von einem Punkt $P(X, Y)$ der Ellipse ausstrahlenden Tangenten der Hüllkurve weisen den Richtungsunterschied

$$\omega = \frac{2\pi}{k} \quad (9.3)$$

auf, womit ein Grundwert der Gesichtswinkel bekannt ist. Offensichtlich kann $k > 0$ vorausgesetzt werden, wobei die Werte $k = 2/g$ mit ganzem g auszuschließen sind.

Es liegt auf der Hand, daß durch den Ansatz (9.1) der Fall II auch für eine *beliebig vorgegebene isotrische Linie* o zu erledigen ist: die periodischen Funktionen $X(\varphi)$ und $Y(\varphi)$ sind dann eben so zu wählen, daß sie der Gleichung von o identisch genügen. — Der Fall einer *isotropischen Geraden* spielte eine Rolle bei der seinerzeit behandelten Aufgabe, Spiegelprofile zu finden, die ein Büschel parallel einfallender Lichtstrahlen nach zweimaliger Reflexion wieder in ein Parallelenbüschel verwandeln [8].

§ 10.

Der Ansatz (9.2) soll nun unter Verwendung von Minimalkoordinaten noch weiter ausgeführt werden. Stellen wir die *Ellipse* o in komplexer Form durch

$$Z = p e^{k\varphi} + q e^{-k\varphi} \quad (10.1)$$

mit komplexen Konstanten p und q dar — im Bedarfsfall durch die konjugierte Beziehung zu ergänzen —, dann lautet die *Tangentengleichung* (9.1) der Hüllkurve c jetzt:

$$e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2} = p e^{(k-1)i\varphi} + q e^{-(k-1)i\varphi} + \bar{p} e^{(1-k)i\varphi} + \bar{q} e^{(k+1)i\varphi}. \quad (10.2)$$

Die Ableitung nach φ führt dann (nach Multiplikation mit i) zur *Normalengleichung*:

$$e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2} = (1-k) p e^{(k-1)i\varphi} + (k+1) q e^{-(k+1)i\varphi} + (k-1) \bar{p} e^{(1-k)i\varphi} - (k+1) \bar{q} e^{(k+1)i\varphi}. \quad (10.3)$$

Addition der Gleichungen (10.2) und (10.3) liefert dann die komplexe Darstellung der *Hüllkurve* c :

$$z = \frac{2-k}{2} p e^{k i \varphi} + \frac{k+2}{2} q e^{-k i \varphi} + \frac{k}{2} \bar{p} e^{(2-k) i \varphi} - \frac{k}{2} \bar{q} e^{(k+2) i \varphi}. \quad (10.4)$$

Aus der Bauart der $z = a + b i, \delta = \gamma + i \delta^*$ Gleichung (10.4), die mit Rücksicht auf $k > 0$ und $k \neq 2$ keine verschwindenden Koeffizienten und Exponenten aufweist, ist zu erkennen, daß es sich bei c stets um eine *Radlinie 4. Stufe* mit der Charakteristik $-k : (2-k) : k : (2+k)$ handelt [7, 9].

Beachtet man, daß die Normalengleichung (10.3) ähnlich gebaut ist wie die Tangentengleichung (10.2) und daß sie durch den Punkt P^* mit den Koordinaten

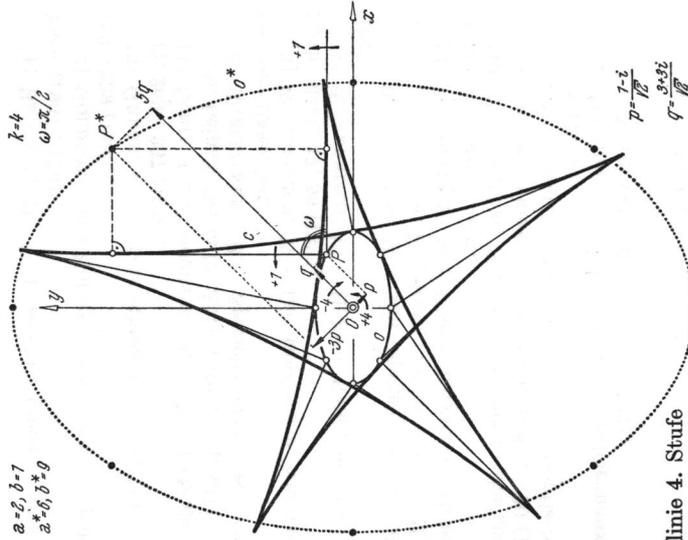


Abb. 6. Radlinie 4. Stufe mit orthotrischer Ellipse

$Z^* = (1-k) p e^{k i \varphi} + (k+1) q e^{-k i \varphi}, \bar{Z}^* = k j Z^*$ (10.5) befriedigt wird, so stellt man fest, daß die *Evolvente* c^* von c ebenfalls eine *Kurve mit isotrischer Ellipse* ist, nämlich mit der durch (10.5)

beschriebenen Ellipse o^* . Diese Ellipse o^* ist übrigens die Rastpolkurve für die Bewegung des erzeugenden Sterns.

Es gilt also

Satz 8. Die durch (9.2) definierten Kurven mit isoptischer Ellipse sind Radlinien 4. Stufe mit der Charakteristik $-k : (2-k) : k : (2+k)$, und ihre Evoluten sind von vollkommen gleicher Art.

Abb. 6 zeigt eine derartige, zur Annahme $k = 4$ ($\omega = \pi/2$) gehörige Radlinie 4. Stufe mit der Charakteristik $-2 : -1 : 2 : 3$. Diese algebraische Kurve mit orthoptischer Ellipse ist von 5. Klasse und 6. Ordnung. Bei der Konstruktion der Kurve wurde die Ellipse o^* herangezogen, um die Berührungspunkte der erzeugenden Strahlen zu lokalisieren.

Literatur

- [1] BROCARD, H., T. LEMOYNE: Courbes géométriques remarquables, II. Paris (1967), 170 ff.
- [2] GOLDBERG, M.: Rotors in polygons and polyhedra. Math. Comput. 14, 229–239 (1960).
- [3] GREEN, J. W.: Sets subtending a constant angle on a circle. Duke Math. J. 17, 263–267 (1950).
- [4] LORIA, G., F. SCHÜTTE: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Leipzig/Berlin (2. Aufl. 1910/11). I, 131f.; II, 326 ff.
- [5] WIELEINER, H.: Spezielle ebene Kurven (Sammlg. Schubert 56). Leipzig (1908), 30 f.
- [6] WUNDERLICH, W.: Die isoptischen Kurven der Zykloiden. Z. angew. Math. Mech. 17, 56 (1937).
- [7] WUNDERLICH, W.: Höhere Radlinien. Österr. Ing. Arch. 1, 277–296 (1947).
- [8] WUNDERLICH, W.: Ein Spiegelproblem. Monatsh. Math. 53, 63–72 (1949). — Vgl. auch: Ungelöste Probleme. Elem. Math. 15, 37–39 (1960).
- [9] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik (Hochschultaschenb. 447/447 a). Mannheim (1970), 253 ff.
- [10] WUNDERLICH, W.: Contributions to the geometry of cam mechanisms with oscillating followers. J. Mechanisms 6, 1–20 (1971).
- [11] WUNDERLICH, W.: Kurven mit isoptischem Kreis. Aequat. Math. 5, 69–79 (1971).
- [12] WUNDERLICH, W.: Polygones orthogonaux inscrits dans une ellipse. Bull. Soc. Math. Belg. 23, 115–122 (1971).

Anschrift des Verfassers:
 Prof. Dr. W. WUNDERLICH
 Technische Hochschule
 Karlsplatz 13
 A-1040 Wien