

## POLYGONES ORTHOGONAUX INSCRITS DANS UNE ELLIPSE

par W. WUNDERLICH

*Université technique de Vienne (Autriche)*

1. Nous étudions le problème suivant, rencontré dans une recherche concernant les courbes planes qui ont une ellipse pour courbe isoptique [2]:

*Inscrire, dans une ellipse donnée, un polygone fermé dont tous les angles soient droits.*

Les supports des côtés d'un tel « polygone orthogonal » passent alternativement par l'un ou l'autre de deux points à l'infini,  $U$  et  $V$ . Si ces deux points sont connus, on peut construire un polygone de l'espèce demandée en commençant en un point  $P_1$  arbitraire de l'ellipse donnée  $c$ . La construction des sommets suivants  $P_2, P_3, \dots$  procède d'une manière univoque, mais en général le polygone  $P_1 P_2 P_3 \dots$  ne sera pas fermé.

Dans le cas où l'on arrive à un polygone fermé, le nombre des sommets est pair, soit  $2n$  ( $n \geq 2$ ). On voit facilement que le point initial  $P_1$  peut être choisi sur  $c$  sans restriction: il ne s'agit que d'un cas spécial du problème bien connu d'A. Giordano di Ottaviano (1788): inscrire dans une conique  $c$  un  $2n$ -gone dont les côtés passent par  $2n$  points fixes donnés. En général ce problème n'a que deux solutions: En commençant en un point arbitraire  $X_1 \in c$  on trouve un polygone ouvert  $X_1 X_2 \dots X_{2n+1}$  dont les extrémités  $X_1$  et  $X_{2n+1}$  se correspondent dans une projectivité sur  $c$ ; la solution  $X_1 = X_{2n+1}$  est fournie par les deux points unis de cette projectivité. Le problème actuel demande d'inscrire dans l'ellipse  $c$  un  $2n$ -gone dont les côtés passent alternativement par deux points fixes  $U$  et  $V$ . Si l'on suppose l'existence d'un premier polygone fermé  $P_1 P_2 \dots P_{2n}$ , la projectivité mentionnée possède trois points unis:  $P_1 = P_{2n+1}$  et les points  $I, J$  de  $c$  situés sur la droite  $UV$ ; selon le théorème fondamental de la géométrie projective (cf. p. ex. [1]), cette projectivité est l'identité, donc  $X_1 = X_{2n+1}$  est valable pour chaque point  $X_1 \in c$ .

Le problème posé est donc de caractère *poristique*. L'ellipse  $c$ , les directions  $U \perp V$  et le nombre  $2n$  des côtés étant donnés, ou

bien il n'existe aucun polygone non dégénéré de l'espèce demandée ou bien il en existe une infinité continue. Ce fait n'est point étonnant si l'on se rend compte qu'il ne s'agit que d'un cas particulier du célèbre problème de J. V. Poncelet (1817), concernant des polygones fermés qui sont à la fois inscrits dans une courbe du deuxième ordre et circonscrits à une courbe de deuxième classe, celle-ci étant ici dégénérée en deux points  $U, V$ .

Pour nous il s'agit alors de trouver, pour une ellipse donnée  $c$ , des directions convenables  $U \perp V$ , dépendant du nombre prescrit  $2n$  de sommets des polygones inscrits dans  $c$ . La solution va être obtenue d'une façon analytique assez élémentaire.

2. Soit

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (a > b > 0) \quad (2.1)$$

l'équation cartésienne de l'ellipse donnée  $c$ . L'affinité

$$x = ax', \quad y = by' \quad (2.2)$$

transforme l'ellipse  $c$  en le cercle unité  $c'$

$$x'^2 + y'^2 = 1. \quad (2.3)$$

A côté des coordonnées cartésiennes  $x, y$  nous ferons usage des coordonnées isotropes  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ . L'affinité (2.2) est alors déterminée par les équations

$$z = \alpha z' + \beta \bar{z}', \quad \bar{z} = \beta z' + \alpha \bar{z}' \quad (2.4)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + b), \quad \beta = \frac{1}{2}(a - b), \quad (2.5)$$

la transformation inverse par

$$abz' = \alpha z - \beta \bar{z}, \quad ab\bar{z}' = -\beta z + \alpha \bar{z}. \quad (2.6)$$

Si  $\varphi$  et  $\varphi + (\pi/2)$  sont les angles que les côtés du polygone orthogonal font avec l'axe des abscisses  $x$ , les vecteurs unité de ces directions  $U, V$  peuvent être caractérisés par les nombres complexes

$$u = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad v = iu = -\sin \varphi + i \cos \varphi. \quad (2.7)$$

Les directions correspondantes  $U', V'$  du polygone affine inscrit dans le cercle  $c'$  sont alors, selon (2.6), déterminées par

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u - \beta \bar{u} = b \cos \varphi + ia \sin \varphi, \\ v' &= \alpha v - \beta \bar{v} = -b \sin \varphi + ia \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le problème d'inscrire dans l'ellipse  $c$  (2.1) un *polygone orthogonal*  $1, 2, \dots, 2n$  dont les côtés passent alternativement par les points impropres  $U$  et  $V$  (2.7) est alors réduit par l'affinité (2.2) au problème plus élémentaire d'inscrire dans le cercle  $c'$  (2.3) un polygone  $1', 2', \dots, (2n)'$  dont les côtés passent alternativement par les points impropres  $U'$  et  $V'$  (2.8).

3. Les côtés  $1'2', 3'4', \dots$  du polygone affine — passant par  $U'$  — sont symétriques par rapport au diamètre orthogonal à  $U'$ ; les autres côtés  $2'3', 4'5', \dots$  sont symétriques par rapport au diamètre orthogonal à  $V'$ . Les directions de ces deux *axes de symétrie* sont indiquées par

$$-iu' = a \sin \varphi - ib \cos \varphi, \quad -iv' = a \cos \varphi + ib \sin \varphi \quad (3.1)$$

ou, passant aux vecteurs unité, par

$$s_1 = \frac{a \sin \varphi - ib \cos \varphi}{|a \sin \varphi - ib \cos \varphi|}, \quad s_2 = \frac{a \cos \varphi + ib \sin \varphi}{|a \cos \varphi + ib \sin \varphi|}. \quad (3.2)$$

Les sommets  $1'$  et  $2'$ , images des nombres complexes  $z'_1$  et  $z'_2$ , sont symétriques par rapport au diamètre  $s_1$ . En appliquant une rotation autour de l'origine  $O'$  qui fait coïncider ce diamètre avec l'axe des abscisses, ce qui s'exécute par multiplication par le facteur  $s_1^{-1} = \bar{s}_1$ , nous obtenons deux points  $\bar{s}_1 z'_1$  et  $\bar{s}_1 z'_2$  caractérisés par deux nombres complexes conjugués:  $\bar{s}_1 z'_2 = s_1 \bar{z}'_1$ . La *réflexion*  $1' \rightarrow 2'$  par rapport au diamètre  $s_1$  s'exprime donc par l'équation

$$z'_2 = s_1^2 \bar{z}'_1, \quad \text{où} \quad s_1^2 = \frac{a \sin \varphi - ib \cos \varphi}{a \sin \varphi + ib \cos \varphi}. \quad (3.3)$$

De façon analogue nous avons pour la réflexion  $2' \rightarrow 3'$  par rapport au diamètre  $s_2$ :

$$z'_3 = s_2^2 \bar{z}'_2, \quad \text{où} \quad s_2^2 = \frac{a \cos \varphi + ib \sin \varphi}{a \cos \varphi - ib \sin \varphi}. \quad (3.4)$$

En commençant avec un point arbitraire  $1' \in c'$  ( $|z'_1| = 1$ ) on arrive alors au polygone  $1'2'3' \dots$  au moyen d'une *suite de réflexions* successives:

$$z'_1 \rightarrow z'_2 = s_1^2 \bar{z}'_1 \rightarrow z'_3 = s_2^2 \bar{z}'_2 = (\bar{s}_1 s_2)^2 z'_1 \rightarrow \dots \rightarrow z'_{2n+1} = (\bar{s}_1 s_2)^{2n} z'_1. \quad (3.5)$$

4. La condition nécessaire et suffisante pour que le polygone  $1'2' \dots (2n)'$  soit *fermé* ( $z'_1 = z'_{2n+1}$ ) est donc

$$(\bar{s}_1 s_2)^{2n} = 1. \quad (4.1)$$

Comme prévu au § 1, cette condition est indépendante du point initial.

En désignant par  $\sigma$  l'angle formé par les vecteurs  $s_1$  et  $s_2$  et égal à  $\sphericalangle U'O'V'$ , on a

$$\bar{s}_1 s_2 = s_2 / s_1 = e^{i\sigma}, \quad 0 < \sigma \leq \pi/2. \quad (4.2)$$

La condition (4.1) exige alors  $2n\sigma = 2m\pi$  avec un nombre naturel  $m$  sans diviseur commun avec  $n$ , ou

$$\sigma = \frac{m\pi}{n}, \quad 0 < m \leq n/2. \quad (4.3)$$

En utilisant ces notations et les expressions (3.3) et (3.4) pour  $s_1^2$  et  $s_2^2$ , la condition (4.1) se traduit par

$$\frac{a \sin \varphi + ib \cos \varphi}{a \sin \varphi - ib \cos \varphi} \cdot \frac{a \cos \varphi + ib \sin \varphi}{a \cos \varphi - ib \sin \varphi} = \frac{e^{i\sigma}}{e^{-i\sigma}}. \quad (4.4)$$

Il en résulte

$$(a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi \frac{(e^{i\sigma} - e^{-i\sigma})}{2i \sin \sigma} = iab \frac{(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma})}{2 \cos \sigma} \quad (4.5)$$

et enfin

$$\sin 2\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cot \sigma. \quad (4.6)$$

Cette formule fournit, combinée avec (4.3), la solution du problème posé, en donnant l'angle de direction  $\varphi$  pour une série des côtés du polygone orthogonal.

Puisque  $\sigma$  a été borné à l'intervalle  $0 < \sigma \leq \pi/2$  — voir (4.2) —, on a  $\sin 2\varphi \geq 0$ , et la condition de réalité n'exige que  $\sin 2\varphi \leq 1$ , ce qui est équivalent à

$$a^2 - 2ab \cot \sigma - b^2 \geq 0. \quad (4.7)$$

Il en résulte pour le rapport des axes de l'ellipse  $c$  (2.1):

$$\frac{a}{b} \geq \cot \sigma + \csc \sigma = \cot \frac{\sigma}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{b}{a} \leq \csc \sigma - \cot \sigma = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}. \quad (4.8)$$

Au cas limite les côtés du polygone orthogonal font des angles de  $\pm \pi/4$  avec les axes de l'ellipse.

##### 5. En illustration considérons quelques exemples.

1°  $n = 2, m = 1$ :  $\sigma = \pi/2$ . La condition (4.8) fournit  $a/b \geq 1$  et n'entraîne aucune restriction pour l'ellipse  $c$ . La formule (4.6) donne

$\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi/2$ : Les polygones orthogonaux inscriptibles dans  $c$  sont donc des *rectangles* dont les côtés sont parallèles aux axes.

2°  $n = 3, m = 1: \sigma = \pi/3$ . La condition (4.8) fournit  $a/b \geq \sqrt{3}$ . Les polygones inscriptibles dans une telle ellipse sont des *hexagones de Pascal* <sup>(1)</sup>. La fig. 1 montre un hexagone orthogonal inscrit dans une ellipse avec le rapport des axes  $a : b = 2 : 1$ . L'angle d'inclinaison correspondant, déterminé par  $\sin 2\varphi = 4/3\sqrt{3}$ , a la valeur  $\varphi = 25^\circ 10'$ .

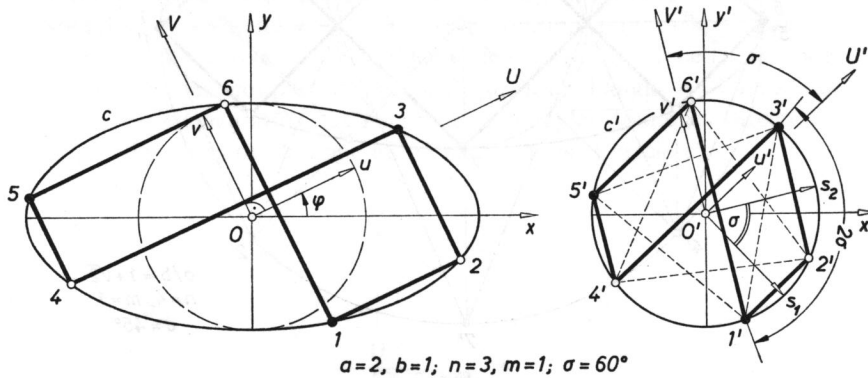


Fig. 1

3°  $n = 4, m = 1: \sigma = \pi/4$ . La condition (4.8) fournit  $a/b \geq 1 + \sqrt{2}$ . La fig. 2 montre l'*octogone orthogonal symétrique* inscrit dans l'ellipse limite ( $\varphi = 45^\circ$ ).

6. Retournons au polygone  $1'2' \dots (2n)'$  inscrit dans le cercle  $c'$  (2.3). Suivant (3.5) et (4.2) les coordonnées complexes des *sommets*

<sup>(1)</sup> Le problème de déterminer les hexagones orthogonaux de Pascal a été posé par l'auteur sous le numéro 650 dans *Elem. Math.* 26 (1971). Un tel hexagone  $123456$  est distingué aussi du point de vue projectif, puisque les trois côtés  $12, 34, 56$  passent par un point  $U$  et les autres côtés  $23, 45, 61$  ont aussi un point commun  $V$ . En désignant les points impropres (imaginaires) de l'ellipse  $c$  par  $I$  et  $J$ , on trouve par considération de la figure affine (où  $I', J'$  sont les points cycliques et  $\angle U'O'V' = \pi/3$ ) que la position d'un tel couple  $U, V$  est caractérisée par le birapport  $(UVIJ) = \exp(2i\pi/3) = (-1 + i\sqrt{3})/2$ . Suivant un raisonnement de géométrie cayleyenne, fondée sur la conique absolue  $c$ , on voit que généralement pour un hexagone de Pascal possédant deux points de concours  $U$  et  $V$ , le point  $U$  peut être choisi arbitrairement à l'extérieur de  $c$ , tandis que le point  $V$  est alors lié à une certaine conique ayant double contact avec  $c$  (« cercle impropre »). En outre on peut montrer que les trois diagonales  $14, 25$  et  $36$  possèdent aussi un point de concours,  $W$ , situé sur la droite  $UV$ ; les trois points  $U, V, W$  sont échangeables entre eux.

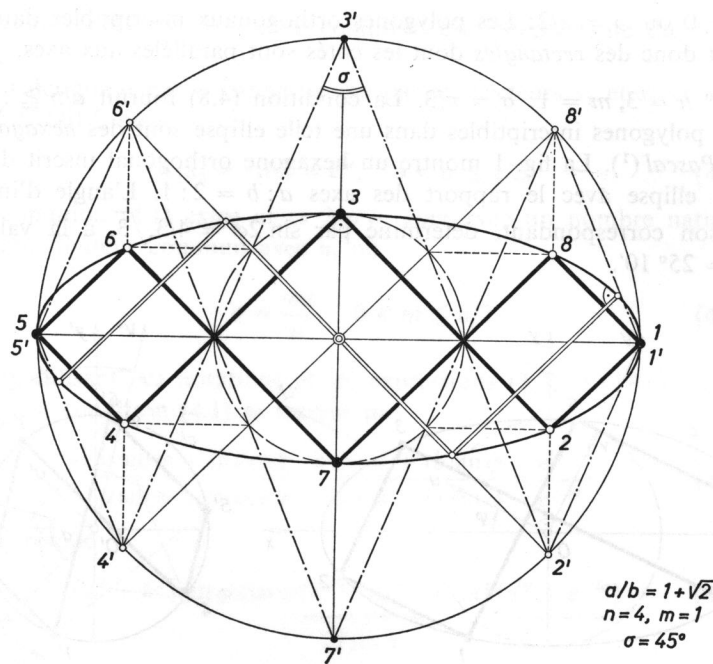


Fig. 2

impairs  $1', 3', \dots, (2n - 1)'$  sont liées par les relations

$$z'_3 = (\bar{s}_1 s_2)^2 z'_1 = e^{2i\sigma} z'_1, \quad z'_5 = e^{2i\sigma} z'_3, \dots \quad (6.1)$$

tandis que pour les sommets pairs  $2', 4' \dots, (2n)'$  on a

$$z'_4 = (s_1 \bar{s}_2)^2 z'_2 = e^{-2i\sigma} z'_2, \quad z'_6 = e^{-2i\sigma} z'_4, \dots \quad (6.2)$$

Cela signifie que ces deux sous-ensembles de sommets forment deux  $n$ -gones réguliers inversément égaux dont les côtés sont vus du centre  $O'$  sous les angles constants  $\pm 2\sigma = \pm 2\pi m/n$  (4.3). Ces polygones se correspondent dans la réflexion par rapport au diamètre  $s_1$  et sont convexes pour  $m = 1$ , étoilés pour  $m > 1$ .

L'existence des deux polygones partiels réguliers conduit à une construction très simple des polygones orthogonaux en question: On inscrit dans un cercle  $c'$  deux  $n$ -gones réguliers  $1'3' \dots (2n - 1)'$  et  $2'4' \dots (2n)'$  inversément égaux, puis on applique une affinité convenable qui transforme l'angle  $1'2'3'$  en un angle droit  $123$ . Ainsi on arrive à un  $2n$ -gone  $12 \dots (2n)$  qui est un polygone orthogonal fermé inscrit dans l'ellipse  $c$ , transformée du cercle  $c'$ .

On peut par exemple se servir de l'*affinité homologique orthogonale* qui relie l'ellipse  $c$  avec son grand cercle directeur  $c'$ . Ceci a été fait dans la fig. 2. Un autre exemple, concernant le cas  $n = 8, m = 3$  ( $\sigma = 3\pi/8$ ), est à voir dans la fig. 3: Le 16-gone orthogonal a été construit au moyen du procédé susdit, en le dérivant de deux octogrammes réguliers inscrits dans le cercle directeur de l'ellipse.

Si l'ellipse  $c$  et les nombres  $n$  et  $m$  sont donnés, il s'agit de construire — au lieu de les calculer moyennant (4.6) — les directions  $U \perp V$  des côtés du  $2n$ -gone orthogonal. Ceci peut se faire comme suit: L'involution orthogonale des diamètres perpendiculaires de  $c$  correspond dans l'affinité  $c \rightarrow c'$  à une involution non orthogonale au centre  $O'$  du cercle  $c'$ ; le problème de trouver dans cette seconde involution des couples de rayons qui font l'angle  $\sigma = m\pi/n$  est un devoir élémentaire <sup>(1)</sup>. Chacun de ces couples donne les directions  $U', V'$  des côtés du  $2n$ -gone affine inscrit dans le cercle  $c'$ .

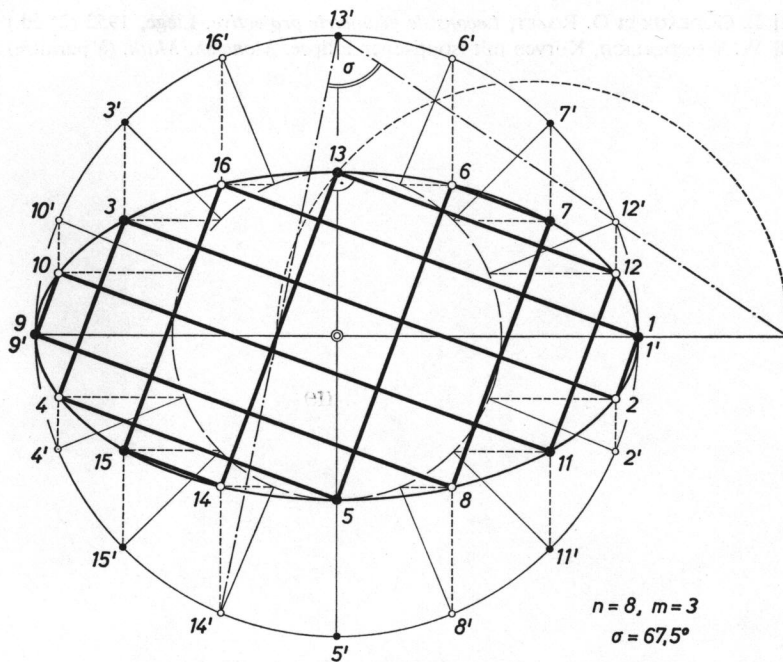


Fig. 3

<sup>(1)</sup> On introduira, par exemple, un cercle auxiliaire  $k'$  passant par  $O'$  [1] et l'on déterminera le centre d'involution,  $C'$ , ainsi que le cercle  $l'$  enveloppe des cordes de  $k'$  qui sont vues du centre sous l'angle  $2\sigma$ . Chacune des deux tangentes menées de  $C'$  à  $l'$  coupe  $k'$  en deux points qui, joints avec  $O'$ , fournissent un couple de rayons appartenant à l'involution et formant l'angle  $\sigma$ .

Dans le cas exceptionnel où les deux  $n$ -gones coïncident, le polygone orthogonal obtenu a deux côtés réduits à des points et consiste en un  $(n - 1)$ -gone ouvert doublement parcouru. Les côtés extrêmes sont des normales à l'ellipse  $c$  (voir fig. 2).

7. Pour les polygones orthogonaux non dégénérés nous communiquons, sans preuve, le nombre des points d'intersection situés à l'intérieur de l'ellipse  $c$ , donc sans compter les  $2n$  sommets sur  $c$ :

$$N = 2m(n - m) - n. \quad (7.1)$$

Le nombre des rectangles en lesquels la surface couverte par le polygone apparaît divisée est égale à  $N + 1$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. GODEAUX et O. ROZET, *Leçons de géométrie projective*. Liège, 1952 (2<sup>e</sup> éd.)
- [2] W. WUNDERLICH, Kurven mit isoptischer Ellipse. *Monatsh. Math.* (à paraître)

