GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 7 (27) — No. 1 — 1972.

ÜBER DAS BILINSKISCHE MODELL DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Walter Wunderlich, Wien

St. Bilinski [1] hat unlängst ein eigenartiges Modell der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie angegeben, in welchem die *»Punkte«* durch *gleichseitige Hyperbeln* mit gemeinsamer Nebenachse in der — geeignet abzuschließenden — euklidischen Ebene repräsentiert werden (zu welchen als Grenzfall der »unendlich fernen Punkte« auch die zur Achse symmetrischen orthogonalen Geradenpaare zu zählen sind), während als *»Geraden«* die zur Achse spiegelbildlichen *Punktepaare* gelten.

Die vorliegende Note will einen einfachen Zusammenhang dieses neuen Modells mit dem klassischen »konformen Modell« von H. Poincaré [2] aufzeigen. In diesem gleichfalls in der euklidischen Ebene erklärten Modell sind bekanntlich als *»Punkte«* die bezüglich einer festen Achse spiegelbildlich angeordneten *Punktepaare* anzusehen, während die *»Geraden«* durch die *Orthogonalkreise* der Achse dargestellt werden (zu welchen auch die Normalen der Achse zu zählen sind).

Der erwähnte Zusammenhang zwischen den beiden genannten Modellen wird nun einfach durch die in der darstellenden Geometrie unter dem Namen *»Zyklographie«* geläufige Abbildung hergestellt. Dieses vor allem durch E. Müller [3] weitgehend ausgebaute Abbildungsprinzip ordnet bekanntlich einem *Punkt* $P(x, y, z)$ des auf kartesische Normalkoordinaten bezogenen dreidimensionalen euklidischen Raumes jenen *Kreis* p der xy-Ebene zu, der seine Mitte im Grundriß $P'(x, y, 0)$ von P hat und die Kote z als Radius besitzt.[1] Anschaulich läßt sich dieser Kreis p als die Spur eines mit seiner Spitze in P angebrachten Drehkegels mit z-paralleler Achse und rechtem Öffnungswinkel deuten. Diese translationskongruenten »Projektionskegel« haben einen gewissen *Fernkreis* c gemeinsam, der dem Raum eine pseudoeuklidische »c-Metrik« aufprägt, in welcher c die Rolle des absoluten Kegelschnittes der euklidischen Metrik übernimmt. — Durchläuft ein veränderlicher Punkt P eine Linie q im Raum, so gilt die Einhüllende q^*

---

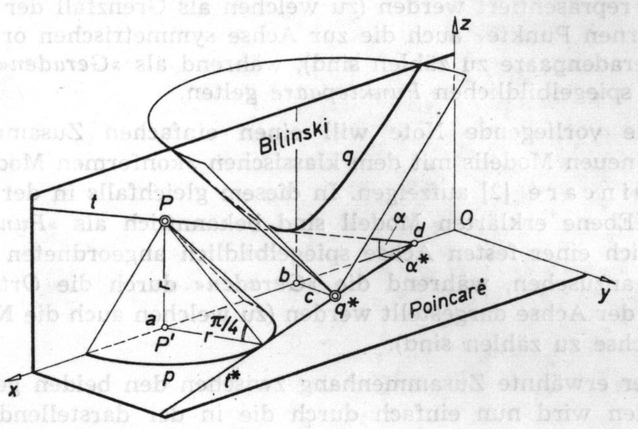
[1] Durch Orientierung der Bildkreise p entsprechend dem Vorzeichen von z erhält man eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den reellen Raumpunkten P und ihren »Bildzykeln« p^+ bzw. p^-.

der Bildkreise p als das zyklographische Bild von q; es kann als die Spurkurve der Verbindungstorse von q und c aufgefaßt werden, also der durch q legbaren, unter dem Winkel $\pi/4$ ansteigenden Böschungstorse. Für eine *Gerade* t ergibt sich so ein zum Grundriß t' symmetrisches *Geradenpaar* t^*, das allerdings nur dann reell und getrennt ausfällt, wenn die Neigung von t kleiner als $\pi/4$ ist.

Denken wir uns nun das *Poincarésche Modell* in die xy-Ebene gelegt, so zwar daß seine »Achse« mit der x-Achse zusammenfällt, so kann jeder ihrer Orthogonalkreise p

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2, \; z = 0 \tag{1}$$

als das zyklographische Bild des Punktepaares $P(a, 0, \pm r)$ angesehen werden (Fig. 1). Umgekehrt ist jedes Punktepaar $q^*(b, \pm c,$



$0)$ der xy-Ebene das (ausgeartete) zyklographische Bild der gleichseitigen Hyperbel q

$$-(x-b)^2 + z^2 = c^2, \; y = 0 \tag{2}$$

der xz-Ebene, aus der sie durch die beiden in q^* angebrachten Projektionskegel ausgeschnitten wird (Fig. 1). Man sieht also, daß das Poincarésche Modell in der xy-Ebene nichts anderes ist, als das zyklographische Bild des in der xz-Ebene vorzustellenden *Bilinskischen Modells*, wenn dessen »Achse« sich ebenfalls mit der x-Achse deckt.

Der durch die zyklographische Abbildung vermittelte Übergang von der Bilinski-Ebene $y = 0$ zur Poincaré-Ebene $z = 0$ kann als *zweizweideutige quadratische Strahltransformation* $t \to t^*$ erklärt werden (Fig. 1). Jeder Geraden t

$$z = (x-d) \operatorname{tg} \alpha, \; y = 0 \tag{3}$$

entsprechen nämlich jene beiden (zur x-Achse spiegelbildlich angeordneten) Geraden t^*

$$y = \pm (x-d) \operatorname{tg} \alpha^*, \; z = 0, \tag{4}$$

die als Spuren der durch t legbaren, unter dem Winkel $\pi/4$ ansteigenden Ebenen auftreten. Die Geraden t und t^* treffen einander im Achsenpunkt $(d, 0, 0)$ und zwischen ihren Richtungswinkeln α und α^* besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha^*. \tag{5}$$

Umgekehrt entsprechen jeder Geraden t^* zwei (zur x-Achse spiegelbildlich angeordnete) Geraden t. — Der Grad der Verwandtschaft $t \to t^*$ ist zwei, wie man erkennt, wenn man die Gerade t ein Strahlbüschel durchlaufen läßt, dessen Scheitel allgemeine Lage hat, also nicht der x-Achse angehört: Das zugeordnete Strahlenpaar t^* hüllt den Bildkreis p des Büschelscheitels ein. Variiert umgekehrt t^* in einem Büschel q^* allgemeiner Lage, so umhüllt das zugeordnete Geradenpaar t eine gleichseitige Hyperbel q (Fig. 1). — Diese quadratische Strahltransformation hat schon bei verschiedenen Gelegenheiten gute Dienste geleistet [4, 5].

Aus den bekannten Eigenschaften und Maßformeln des Poincaréschen Modells könnten nun die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten im Bilinskischen Modell hergeleitet werden, worauf jedoch nicht eingegangen werden soll. Hingegen mag der Begriff des *»Kreises«* der hyperbolischen Ebene kurz erörtert werden. Ein reeller euklidischer *Kreis* k^* der xy-Ebene stellt bekanntlich — zusammen mit seinem Spiegelbild an der x-Achse — einen hyperbolischen Kreis im engeren Sinn, einen Grenzkreis oder eine Abstandslinie (einer hyperbolischen Geraden) dar, je nachdem ob er die x-Achse in zwei konjugiert-imaginären, zusammenfallenden oder reell-getrennten Punkten schneidet. Legt man durch k^* die beiden möglichen Projektionskegel (Böschungstorsen), so schneiden dieselben aus der xz-Ebene zwei *gleichseitige Hyperbeln* aus, die durch Spiegelung an der x-Achse miteinander vertauscht werden. Dementsprechend stellt ein solches Hyperbelpaar einen hyperbolischen Kreis im engeren Sinn, einen Grenzkreis oder eine Abstandslinie im Bilinskischen Modell dar, je nachdem ob die beiden gemeinsamen Punkte auf der x-Achse konjugiert-imaginär, zusammengerückt oder reell und verschieden sind.

LITERATUR:

[1] *St. Bilinski*, Über ein Modell der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie in der Torusebene, Glasnik Mat. Ser. III. **2** (1967), 191—200.

[2] *H. Poincaré*, Théorie des groupes fuchsiens, Acta Math. **1** (1882), 1—62.

[3] *E. Müller - J. L. Krames,* Die Zyklographie (Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. II). Leipzig/Wien, 1929.

[4] *W. Wunderlich,* Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien, Monatsh. Math. **57** (1953), 199—216.

[5] *W. Wunderlich,* Axiale Ebenenverwandtschaften, Monatsh. Math. **67** (1963), 145—162.

(Eingegangen am 25. X 1971)

Technische Hochschule, Wien

O JEDNOM MODELU HIPERBOLIČNE GEOMETRIJE S. BILINSKOGA

Walter Wunderlich, Wien

S a d r ž a j

Između jednog novog modela hiperbolične ravnine S. Bilinskoga i klasičnog konformnog modela H. Poincaréa uspostavljena je jedna jednostavna veza posredstvom poznatog ciklografskog preslikavanja odnosno posredstvom jedne pridružene kvadratične transformacije zraka. Time su dobivena i karakteristična svojstva cikala, horicikala i hipercikala u ravnini Bilinskoga.