

ÜBER DIE DURCH FORTSCHREITENDEN
HARMONISCHEN UMSCHWUNG ERZEUGBAREN HÜLLTORSEN

WALTER WUNDERLICH, Wien

(Eingegangen am 17. Mai 1971)

1. Fortschreitender harmonischer Umschwung. Setzt man — im dreidimensionalen euklidischen Raum — eine gleichförmige Drehung um eine feste Achse mit einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse zusammen, so entsteht eine zwangsläufige Bewegung, die *harmonischer Umschwung* genannt wird. Mit dieser Umschwungsbewegung befaßte sich ausführlich W. KAUTNY [5, 6], der die von Punkten des bewegten (starrten) Systems durchlaufenen Bahnkurven, die von umschwingenden Ebenen umhüllten Torsen und die von mitgenommenen Geraden überstrichenen Strahlflächen untersuchte. Besonders hervorzuheben ist der zur Schwingfrequenz $n = 1$ gehörige „Mannheim-Darboux'sche Umschwung“ [8], bei welchem die nicht der Achse angehörenden Punkte durchwegs ebene Bahnen beschreiben, nämlich Ellipsen in zur Achse schrägen Ebenen; umgekehrt gleitet jede mitgenommene Ebene, die zur Achse weder parallel noch normal ist, ständig durch einen festen Punkt, sodaß sie einen Drehkegel umhüllt.

Wird dem genannten Umschwung noch eine in Achsenrichtung gleichförmig fortschreitende Schiebung überlagert, so gelangt man zu einer Bewegung, die als *fortschreitender harmonischer Umschwung* bezeichnet werden soll. Diese Bewegung, die man als Zusammensetzung einer gleichförmigen Schraubung um eine feste Achse mit einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse auffassen kann, wird in kartesischen Koordinaten durch

$$(1,1) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos u - y' \sin u, & y &= x' \sin u + y' \cos u, \\ z &= z' + a \sin nu + bu \end{aligned}$$

dargestellt, wenn man die Umschwungachse mit der z -Achse zusammenfallen läßt. Der als veränderlicher Parameter verwendete Drehwinkel u kann bei geeigneter Festsetzung der Zeiteinheit als Zeit angesprochen werden. Von den auftretenden Konstanten bedeutet a die *Amplitude* der Schwingkomponente, n deren *Frequenz* (Anzahl der Schwingungen während einer vollen Umdrehung) und b die *reduzierte Ganghöhe* der Schraubkomponente (volle Ganghöhe $h = 2\pi b$). Ohne Beschränkung

der Allgemeinheit darf $a > 0$, $n > 0$ und $b > 0$ vorausgesetzt werden. Die Bewegungsgleichungen (1,1) beschreiben die zeitliche Verlagerung des starren „Gangsystems“ (x', y', z') gegenüber dem festen „Rastsystem“ (x, y, z) , mit dem es sich für $u = 0$ deckt.

Die vom fortschreitenden harmonischen Umschwung (1,1) bei Anwendung auf Punkte, Geraden und Ebenen erzeugten Kurven, Strahlflächen und Hülltoren hat O. OBÜRKA [9, 10] eingehend studiert. Im Hinblick auf eine technische Anwendung bei Schwingförderern nannte er diese (im allgemeinen transzendenten) Gebilde „Vibratorkurven“ bzw. „Vibratorflächen“.

Die *Punktbahnen* der Bewegung – dargestellt durch (1,1) mit konstanten Werten x', y', z' und variablem u – verlaufen auf koaxialen Drehzylindern, sofern $x'^2 + y'^2 > 0$, und sind untereinander *affin*. Bei Verebnung der Zylinder gehen sie in affine Sinuslinien über.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den von fortschreitend umschwingenden Ebenen erzeugten *Vibratortoren*, die in geometrischer Hinsicht interessanter sind als die Bahnkurven, obwohl sie sich zu diesen durch eine koaxiale Nullkorrelation in Beziehung setzen lassen. Die für die genannten Toren und ihre Gratlinien abgeleiteten Ergebnisse stellen bemerkenswerte Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen über Böschungslinien auf Drehflächen 2. Ordnung mit lotrechter Achse dar, die sich aus dem harmonischen Umschwung gewinnen und mit $b = 0$ hier einordnen lassen. Weitergehende Verallgemeinerungen würden sich ergeben, wenn man die Schwingkomponente noch mit einem Dämpfungsfaktor $\exp(\delta u)$ versähe, wie dies der Verfasser [14] für den gewöhnlichen Umschwung und O. Obürka [11] für den fortschreitenden Umschwung getan hat.

2. Hülltoren von Ebenen. Bei der Untersuchung des Hüllgebildes, das eine dem fortschreitenden Umschwung (1,1) unterworfenen Ebene τ' erzeugt, kann von vornherein von Ebenen abgesehen werden, die zur Umschwungachse normal oder parallel sind: erstere durchlaufen eine Parallelschar, letztere umhüllen koaxiale Drehzylinder.

Mit Rücksicht auf die Vertauschbarkeit koaxialer Schraubtransformationen kann ferner bei der Betrachtung einer schrägen Ebene angenommen werden, daß deren Ausgangslage die x -Achse enthalten soll:

$$(2,1) \quad \tau' \dots y' = cz' \quad \text{mit} \quad c = \cot \gamma \neq 0.$$

Hierbei bezeichnet γ den Neigungswinkel gegen die fortan horizontal gedachte xy -Ebene; er darf auf das Intervall $0 < \gamma < \pi/2$ beschränkt bleiben, weil zwei Ebenen mit den Neigungen $\pm \gamma$ durch Halbdrehung um die z -Achse auseinander hervorgehen.

Für die Lage τ , in der sich τ' zur Zeit u befindet, ergibt sich mittels der Umkehrformeln von (1,1) die Gleichung

$$(2,2) \quad \tau \dots x \sin u - y \cos u + cz = c(a \sin nu + bu).$$

Die Hülltorse Θ der Ebenenschar $\{\tau\}$ ist wegen der unverändert bleibenden Ebenenneigung eine unter dem Winkel γ ansteigende Böschungstorse. Ihre Gratlinie q ist daher eine Böschungslinie. Zur Ermittlung derselben benötigt man bekanntlich die Ableitungen von (2,2) nach u . Die 1. Ableitung liefert eine Ebene

$$(2,3) \quad \dot{\tau} \dots x \cos u + y \sin u = c(na \cos nu + b),$$

die τ nach der Berührungserzeugenden t mit Θ und daher Tangente von q schneidet. Die 2. Ableitung definiert eine weitere Ebene

$$(2,4) \quad \ddot{\tau} \dots -x \sin u + y \cos u = -n^2 ca \sin nu,$$

welche die Erzeugende t im Gratpunkt T trifft.

Durch Auflösung des Gleichungssystems (2,2-4) erhält man schließlich für die von den Punkten T erfüllte Gratlinie q die Parameterdarstellung:

$$(2,5) \quad q \dots \begin{cases} x = c[(na \cos nu + b) \cos u + n^2 a \sin nu \sin u], \\ y = c[(na \cos nu + b) \sin u - n^2 a \sin nu \cos u] \\ z = (1 - n^2) a \sin nu + bu. \end{cases}$$

Faßt man unter Beschränkung auf reelle Punkte die Koordinaten x und y zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ zusammen, so ergibt sich

$$(2,6) \quad \begin{aligned} x + iy &= c(na \cos nu + b - in^2 a \sin nu) e^{iu} = \\ &= \frac{nac}{2} [(1 + n) e^{(1-n)iu} + (1 - n) e^{(1+n)iu}] + bce^{iu}. \end{aligned}$$

Hieraus ist zu ersehen, daß der Grundriß der Gratlinie q — d. h. die Normalprojektion auf die xy -Ebene — unter der Voraussetzung $n \neq 1$ eine Radlinie 3. Stufe mit der Charakteristik $(1 - n) : 1 : (1 + n)$ ist [9, 13]. Es handelt sich gemäß der Tangentengleichung (2,3) um eine Parallelkurve im Abstand bc der durch die Stützfunktion $p = nac \cos nu$ definierten Zykloide mit der Charakteristik $(1 - n) : (1 + n)$; diese ist eine Epizykloide für $n < 1$ und eine Hypozykloide für $n > 1$ (Fig. 1).

Wie alle durch den Umschwung erzeugten Gebilde besitzt auch die Raumkurve q die Periode $2\pi/n$, d. h. sie wird durch fortgesetzte kongruente Wiederholung etwa des Abschnittes $0 \leq u < 2\pi/n$ erhalten (AB in Fig. 1); benachbarte Teile hängen dabei durch eine Schraubtransformation mit dem Drehwinkel $2\pi/n$ und der Schieb-
strecke $h/n = 2b\pi/n$ zusammen. — Die Böschungslinie q weist im übrigen für $n \neq 1$ Spitzen auf; dieselben sind durch das Verschwinden der Ableitungen von (2,5) gekennzeichnet und ergeben sich daher aus

$$(2,7) \quad (1 - n^2) na \cos nu + b = 0.$$

Sie fallen allerdings nur dann reell aus, wenn $b/a \leq n|n^2 - 1|$. In einem solchen Fall

Satz 1. *Sämtliche durch einen fortschreitenden harmonischen Umschwung mit der Frequenz $n \neq 1$ von zur Achse schrägen Ebenen erzeugten Hülltorse Θ sind untereinander affine, periodisch aufgebaute Böschungstorse. Ihre Gratlinien q bilden sich im Grundriß auf untereinander ähnliche Parallelkurven von Epi- oder Hypozykloiden ab, je nachdem ob $n < 1$ oder $n > 1$.*

In dem zurückgestellten Sonderfall $n = 1$ reduziert sich die Gleichung (2,6) auf $x + iy = bce^{iu} + \text{const.}$ Dies bedeutet, daß der Gratliniengrundriß ein Kreis wird, sodaß sich als Gratlinie q eine gewöhnliche Schraublinie einstellt.

Satz 2. *Die durch den fortschreitenden harmonischen Umschwung mit der Frequenz $n = 1$ erzeugten Ebenen-Hülltorse sind gewöhnliche Schraubtorse.*

3. Trägerschraubfläche der Gratlinie. Ersetzt man in der Darstellung (2,5) der Gratlinie q das Produkt nu durch v , so erhält man mit

$$(3,1) \quad \Phi \dots \begin{cases} x = c[(na \cos v + b) \cos u + n^2 a \sin v \sin u], \\ y = c[(na \cos v + b) \sin u - n^2 a \sin v \cos u], \\ z = (1 - n^2) a \sin v + bu \end{cases}$$

bei unabhängiger Veränderlichkeit der Parameter u und v eine gewisse Schraubfläche Φ , welche die durch $v = nu$ definierte Kurve q enthält. Diese Fläche hat die z -Achse zur Schraubachse und die Ganghöhe $h = 2\pi b$. Sie wird von der durch $u = 0$ erklärten Ellipse

$$(3,2) \quad p \dots x_0 = c(na \cos v + b), \quad y_0 = -n^2 ac \sin v, \quad z_0 = (1 - n^2) a \sin v$$

erzeugt, welche in der Ebene $(1 - n^2) y_0 + n^2 cz_0 = 0$ verläuft und ihren Mittelpunkt in $M(bc, 0, 0)$ hat; ihre waagrechte Achse hat die Länge $2nac$ und trifft die Umschwungachse, während die Länge der anderen Achse $2a \sqrt{(n^4 c^2 + (1 - n^2)^2)}$ beträgt. Von dem die Gratlinie q beschreibenden Punkt T wird die Ellipse p gemäß $v = nu$ so durchlaufen, daß der Halbmesser MT in gleichen Zeitabschnitten flächengleiche Sektoren überstreicht. Mit Hilfe dieser Ellipse läßt sich die Abbildung der Gratlinie q in Grund- und Aufriß bequem konstruieren. In Fig. 1 wurden zur Veranschaulichung die Bahnschraublinien der Ellipsenscheitel $v = 0$ und π eingetragen.

Mit der Schraubfläche Φ hat man für die Böschungslinie q eine einfache Trägerfläche, welche die Rolle der im Grenzfall $b = 0$ des gewöhnlichen Umschwungs auftretenden Drehquadriken übernimmt [5]. Die Parameterlinien $u = \text{const}$ sind die (untereinander kongruenten) Schraublagen der Profilellipse p , während die u -Linien $v = \text{const}$ die Schraubbahnen der Punkte von p sind.

Satz 3. *Die Gratlinie q einer Vibratortorse Θ verläuft auf einer Schraubfläche Φ , die durch Verschraubung einer Ellipse p entsteht, deren eine Achse die Schraubachse rechtwinklig trifft. Bei gleichförmig ablaufender Schraubung wird die Kurve q vom Endpunkt eines Ellipsenhalbmessers beschrieben, der die Ellipse mit konstanter Flächengeschwindigkeit überstreicht.*

Umgekehrt ist jedoch nicht jede auf eine solche Weise erzeugte Raumkurve die Gratlinie einer Vibratortorse, weil die Angabeelemente nicht unabhängig voneinander sind. Ein wesentliches Kennzeichen der Schraubfläche Φ besteht darin, daß sie zwei *Rückkehrkanten* in Form von Schraublinien besitzt, die von den Spitzen der Kurve q herrühren und deren v -Werte daher gemäß (2,7) durch $(n^2 - 1)na \cos v = b$ bestimmt sind. Sie werden von jenen Punkten der Profilellipse p beschrieben, wo deren Tangenten gleichzeitig Bahntangenten der Schraubung sind.

Die vom Ellipsenzentrum $M(bc, 0, 0)$ durchlaufene *Mittenschraublinie*

$$(3,3) \quad l \dots x = bc \cos u, \quad y = bc \sin u, \quad z = bu$$

besitzt den Tangentenvektor $(-c \sin u, c \cos u, 1)$, dessen Richtung mit jener der Tangente t von q in $T \in p$ übereinstimmt, weil er zu den Ebenen $\tau(2,2)$ und $\tau(2,3)$ parallel ist. Die Gratlinie q durchsetzt daher die Ellipsen $u = \text{const}$ der Fläche Φ stets in der Fortschreitrichtung des Ellipsenzentrums. Gleiches gilt natürlich auch für die übrigen, durch Verschraubung aus q hervorgehenden, auf Φ verlaufenden Kurven $nu - v = \text{const}$. Hieraus folgt, daß alle diese Kurven die Profilellipse p in gleicher Richtung schneiden, sodaß die zugehörigen Tangenten einen *Zylinder* bilden, der der Fläche Φ längs p berührend umschrieben ist. Es gilt mithin

Satz 4. *Der Trägerschraubfläche Φ der Gratlinie q einer Vibratortorse lassen sich längs ihrer Ellipsen berührende Zylinder umschreiben. Diese Ellipsen und die aus q durch Verschraubung hervorgehenden Kurven bilden auf Φ ein konjugiertes Netz.*

Die Profilellipse $p(3,2)$ ist im besonderen ein *Kreis*, wenn die angegebenen Achsenlängen übereinstimmen. Die betreffende Bedingung lautet

$$(3,4) \quad (n^2 - 1)(n^2 c^2 + n^2 - 1) = 0$$

und ist auf zweierlei Art erfüllbar:

i) $n = 1$. In diesem bereits in Satz 2 erwähnten Sonderfall ist die Gratlinie q eine gewöhnliche Schraublinie, deren Achse zur Umschwungachse parallel ist. Der Profilkreis p gehört der Grundebene $z_0 = 0$ an und die von ihm erzeugte Trägerfläche Φ ist eine *zyklische Schraubschiebfläche*.

ii) $n = 1/\sqrt{c^2 + 1} = \sin \gamma$. Hier liegt der Profilkreis p in der Ebene $cy_0 + z_0 = 0$, die zur Mittenschraublinie $l(3,3)$ normal ist: Die Trägerfläche Φ ist demnach eine *Schraubrohrfläche*. Die auf ihr verlaufenden Böschungslinien q durchsetzen die Profilkreise orthogonal und bilden daher neben diesen die zweite Schar der *Krümmungslinien* von Φ .¹⁾

¹⁾ Im Grenzfall des gewöhnlichen harmonischen Umschwungs ($b = 0$) reduziert sich für $n = \sin \gamma$ die Trägerfläche Φ auf eine *Kugel* und man gelangt zu den unter dem Winkel γ ansteigenden *sphärischen Böschungslinien* q .

Satz 5. Die Tangentenflächen der nichtzyklischen Krümmungslinien einer Schraubrohrfläche sind Vibratortorsen.

Für gewöhnlich ist der Radius r der Profilkreise einer Schraubrohrfläche kleiner als der Krümmungsradius R der Mittenschraublinie; bei einer solchen Annahme weisen die Krümmungslinien keine reellen Spitzen auf. Ist jedoch $r > R$, dann besitzt die Fläche zwei reelle, von den Profilkreisen eingehüllte Rückkehrschraublinien; auf diesen setzen die Krümmungslinien der zweiten Schar mit reellen Spitzen rechtwinklig auf.

4. Relativbahn des Gratpunktes. Der Gratpunkt T einer dem fortschreitenden Umschwung unterworfenen Ebene τ' verändert in dieser seinen Platz und beschreibt daher in τ' eine gewisse *Relativbahn* q' . Zur Ermittlung derselben hat man bloß die Rastkoordinaten (2,5) von T mittels der Umkehrformeln von (1,1) in das Gangsystem zurückzutransformieren. Unter Beachtung der Beziehungen (2,3) und (2,4) erhält man so die Darstellung

$$(4,1) \quad q' \dots x' = c(na \cos nu + b), \quad y' = -n^2 ac \sin nu, \quad z' = -n^2 a \sin nu.$$

Hieraus ist zu erkennen, daß q' eine *Ellipse* ist, die während einer vollen Umschraubung n -mal mit konstanter Flächengeschwindigkeit durchlaufen wird. Sie gehört, wie es sein muß, der bewegten Ebene τ' (2,1) an und hat, wie ein Vergleich mit (3,2) lehrt, denselben Grundriß wie die Ellipse p (Fig. 1). Ihre waagrechte Achse hat wieder die Länge $2nac$, während die zweite, auf einer Falllinie von τ' liegende Achse die Länge $2n^2 a \sqrt{c^2 + 1} = 2n^2 a / \sin \gamma$ aufweist.

Die Relativbahn q' ist im besonderen ein *Kreis*, falls $n = \cos \gamma$.

5. Begleitendes Dreiein der Gratlinie. Das *begleitende Dreiein* der Gratlinie q (2,5) besteht aus folgenden, im Punkt $T \in q$ angebrachten Einheitsvektoren: dem von der Erzeugenden $t = \tau t$ der Torse Θ getragenen *Tangentenvektor*

$$(5,1) \quad t = (-\cos \gamma \sin u, \cos \gamma \cos u, \sin \gamma),$$

dem wie bei jeder Böschungslinie waagrechten, der Schmiegebene τ angehörenden *Hauptnormalenvektor*

$$(5,2) \quad h = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

und dem zur Schmiegebene τ (2,2) senkrechten *Binormalenvektor*

$$(5,3) \quad b = t \times h = (\sin \gamma \sin u, -\sin \gamma \cos u, \cos \gamma).$$

Im Gangsystem (x', y', z') haben diese Vektoren die Darstellungen

$$(5,4) \quad t' = (0, \cos \gamma, \sin \gamma), \quad h' = (-1, 0, 0), \quad b' = (0, -\sin \gamma, \cos \gamma).$$

Mit dem längs der Raumkurve q entlangwandernden Dreibein $\mathbf{t}, \mathbf{h}, \mathbf{b}$ sei nun ein kartesisches Koordinatensystem x'', y'', z'' verknüpft, dessen Achsen der Reihe nach mit $\mathbf{t}, \mathbf{h}, \mathbf{b}$ zusammenfallen sollen. Die Beziehung zum Gangsystem (x', y', z') wird zufolge (5,4) und (4,1) durch

$$(5,5) \quad \begin{aligned} x' &= -y'' + c(na \cos nu + b), \\ y' &= x'' \cos \gamma - z'' \sin \gamma - n^2 ac \sin nu, \\ z' &= x'' \sin \gamma + z'' \cos \gamma - n^2 a \sin nu \end{aligned}$$

beschrieben. Die Beziehung zum Rastsystem (x, y, z) würde sich durch Kombination mit den Gleichungen (1,1) ergeben, doch kann auf die Wiedergabe der etwas unhandlichen Formeln verzichtet werden.

Mit dem Ziel, ein für Böschungslinien auf Drehquadricken mit lotrechter Achse ausgesprochenes Resultat von W. BLASCHKE [1] zu verallgemeinern, denke man sich nun mit dem Dreibein $\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{h}$ eine beliebige Ebene

$$(5,6) \quad \sigma'' \dots Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0$$

starr verbunden. Im Verlauf der Wanderung des Dreibeins längs der Böschungslinie q hüllt σ'' auf Grund der unverändert bleibenden Neigung eine gewisse Böschungstorse Σ ein, die näher untersucht werden soll.

Zu einem *qualitativen Ergebnis* gelangt man bereits durch eine rein geometrische Überlegung: Gegenüber der Ebene τ' vollführt das Dreibein eine stellungserhaltende krumme Schiebung, wobei sein Ursprung T die Ellipse q' (4,1) mit konstanter Flächengeschwindigkeit durchläuft. Denkt man sich τ' vorübergehend fest, so vollführt der Schnittpunkt der sich parallel verlagernden Ebene σ'' auf der z -Achse eine harmonische Schwingung mit der Frequenz n . Dieser überlagert sich dann infolge der Bewegung der Ebene τ' die gleichartige Schwingung $a \sin nu$ sowie die Schiebung mit der Geschwindigkeit b , wozu noch die gleichförmige Drehung um die z -Achse tritt. Die Lagenfolge $\{\sigma\}$ der bewegten Ebene σ'' stimmt demnach mit jener überein, die durch einen gewissen fortschreitenden harmonischen Umschwung mit gleicher Frequenz n , jedoch im allgemeinen veränderter Amplitude bewirkt wird: Die Böschungstorse Σ wird daher im allgemeinen eine *Vibratortorse* sein.

Für *quantitative Aussagen* muß die Gleichung (5,6) der bewegten Ebene σ'' mittels der Umkehrformeln zu (5,5) und (1,1) in das Rastsystem (x, y, z) transformiert werden. Man findet so für die augenblickliche Lage σ von σ'' :

$$(5,7) \quad \begin{aligned} \sigma \dots & (-A \cos \gamma \sin u - B \cos u + C \sin \gamma \sin u) x + \\ & + (A \cos \gamma \cos u - B \sin u - C \sin \gamma \cos u) y + \\ & + (A \sin \gamma + C \cos \gamma) z = E \sin nu + F \cos nu + Gu + H \quad \text{mit} \\ E &= Aa \left(\sin \gamma - \frac{n^2}{\sin \gamma} \right) + Ca \cos \gamma, \quad F = -Bnac, \\ G &= (A \sin \gamma + C \cos \gamma) b, \quad H = -(Bbc + D). \end{aligned}$$

Aus der zeitlichen Verlagerung des unter der Voraussetzung $A + cC \neq 0$ existierenden Achsenpunktes von σ , gekennzeichnet durch $x = y = 0$ und

$$(5,8) \quad z = \frac{b}{G} (E \sin nu + F \cos nu + Gu + H),$$

ergibt sich die Bestätigung dafür, daß die durch (5,7) dargestellte Ebenenschar $\{\sigma\}$ ebenfalls durch einen fortschreitenden harmonischen Umschwung erhalten werden kann. Dieser besitzt zwar die gleiche reduzierte Ganghöhe b und die gleiche Frequenz n wie der ursprüngliche Umschwung (1,1), jedoch im allgemeinen eine andere Amplitude

$$(5,9) \quad \hat{a} = \frac{b}{G} \sqrt{(E^2 + F^2)},$$

ferner auch eine andere Nullstellung.

Mit der Voraussetzung $A + cC \neq 0$ wurden die *Vertikalebene* σ'' ausgeschaltet, welche offenbar achsenparallele *Zylinder* umhüllen. Es läßt sich zeigen, daß deren Normalschnitte im allgemeinen Radlinien 3. Stufe von der Art (2,6) sind, also Parallelkurven von Epi- oder Hypozykloiden, je nachdem ob $n < 1$ oder $n > 1$.²⁾ Für die zusätzlich durch $H = 0$ gekennzeichneten Vertikalebene σ'' , das sind die die Gerade $cx'' = z''$, $y'' = bc$ enthaltenden, reduziert sich der Querschnitt des Hüllzylinders auf eine Epi- oder Hypozykloide selbst. — Um noch die *Horizontalebene* σ'' auszuschließen, die ja im Verlauf der Bewegung des Dreibeins bloß eine Parallelschar durchlaufen, muß $A : B : C \neq 1 : 0 : c$ gefordert werden.

In Verallgemeinerung des angezogenen Satzes von W. Blaschke, der von W. KAUTNY [5] durch Betrachtung des harmonischen Umschwungs ($b = 0$) auf durchsichtige Weise bewiesen wurde, gilt mithin der

Satz 6. *Wird mit dem begleitenden Dreibein der Gratlinie q einer Vibratortorse Θ eine zur Achse des erzeugenden Umschwungs schräge Ebene starr verbunden, so hüllt sie während der Wanderung des Dreibeins längs q wieder eine Vibratortorse ein.*

Zueinander parallele schräge Ebenen σ'' erzeugen natürlich translationskongruente Böschungstorsen Σ . Es würde mithin genügen, sich auf Ebenen σ'' durch den Ursprung T des Dreibeins zu beschränken ($D = 0$).

Verschieden geneigte Ebenen σ'' erzeugen gemäß Satz 1 zueinander affine Böschungstorsen Σ , falls die zugehörigen Amplituden \hat{a} (5,9) übereinstimmen. Abgesehen von der Annahme $n = 1$, bei welcher zufolge Satz 2 sämtliche Hülltorsen Σ Schraubtorsen sind — die stets affin verwandt sind —, ergibt sich für das Auftreten

²⁾ Im Übergangsfall $n = 1$ ist die Böschungslinie q eine Schraublinie (Satz 2), sodaß als Hüllzylinder Drehzylinder auftreten.

affiner Torsen Σ aus (5,9) und (5,7) die Bedingung

$$(5,10) \quad k^2(A + cC)^2 = [(n^2c^2 + n^2 - 1)A - cC]^2 + n^2c^2(c^2 + 1)B^2,$$

wobei $k = \hat{a}/a$. Diese Bedingung bindet für jedes $k = \text{const}$ die in T angebrachte Normale $x'' : y'' : z'' = A : B : C$ der Ebene σ'' an einen gewissen Kegel 2. Ordnung Γ'' , der zur rektifizierenden Ebene $y'' = 0$ symmetrisch ist. Diese ∞^1 Kegel Γ'' erfüllen ein Berührungsbüschel und berühren einander längs der beiden konjugiert-imaginären, horizontalen Erzeugenden $x'' : y'' : z'' = -\cos \gamma : \pm in : \sin \gamma$ mit Tangentialebenen, die einander in der reellen Geraden

$$(5,11) \quad g'' \dots x'' : y'' : z'' = \sin \gamma \cos \gamma : 0 : (n^2 - \sin^2 \gamma)$$

schneiden. — Die durch (5,10) charakterisierten Ebenen σ'' , die den Ursprung T enthalten, hüllen nun für jedes $k = \text{const}$ den zu Γ'' „polaren“ Kegel 2. Klasse Δ'' ein, dessen Gleichung

$$(5,12) \quad k^2[(cx'' - z'')^2 + n^2(c^2 + 1)y''^2] = [cx'' + (n^2c^2 + n^2 - 1)z'']^2$$

in bekannter Weise zu erhalten ist.³⁾ Auch diese Kegel Δ'' erfüllen ein Berührungsbüschel, diesmal mit den gemeinsamen Erzeugenden $x'' : y'' : z'' = (\sin^2 \gamma - n^2) : \pm in \cos \gamma : \sin \gamma \cos \gamma$ und zugehörigen lotrechten Tangentialebenen.

Satz 7. Die durch (5,10) mit festem k gekennzeichneten, zu den Tangentialebenen des Kegels 2. Grades (5,12) parallelen Ebenen im begleitenden Dreiein der Gratlinie einer Vibratortorse Θ umhüllen während der Wanderung des Dreibeins Vibratortorsen Σ mit gleicher Amplitude; diese Torsen sind untereinander affin.

6. Weitere Sätze über die Gratlinie. Im Grenzfall verschwindender Amplitude $\hat{a} = 0$, gekennzeichnet durch $k = 0$ in (5,11) oder $E = F = 0$ gemäß (5,9), zerfällt der Kegel Γ'' (5,10) in zwei konjugiert-imaginäre Ebenen mit der reellen Schnittgeraden g'' (5,11). Es gibt mithin nur eine einzige reelle Stellung von Ebenen σ'' (5,6), welche im Verlauf der Wanderung des begleitenden Dreibeins der Böschungslinie q Vibratortorsen Σ mit verschwindender Amplitude, also Schraubtorsen erzeugen. Wählt man unter diesen zu g'' normalen Ebenen speziell die durch den Dreibeinsursprung $T \in q$ gehende Ebene

$$(6,1) \quad A : B : C : D = \sin \gamma \cos \gamma : 0 : (n^2 - \sin^2 \gamma) : 0$$

aus, so gelangt man zu einer Schraubtorse Σ_0 , deren Tangentialebenen von der

³⁾ Man fasse in (5,10) die Größen A, B, C als homogene Strahlenkoordinaten im Bündel T auf und setze für eine Erzeugende (A, B, C) die Polarebene bezüglich des Kegels Γ'' an. Aus ihrer Gleichung liest man als Koeffizienten die von A, B, C abhängigen Koordinaten $x'' : y'' : z''$ ihrer Normalen ab, drückt sodann umgekehrt A, B, C durch x'', y'', z'' aus und trägt diese Werte in (5,10) ein.

Böschungslinie q unter einem konstanten Winkel $\omega = \arctg(A/C)$ geschnitten werden. Für den Radius r des die Gratschraublinie von Σ_0 tragenden Drehzylinders findet man über (5,7) und (6,1) nach kurzer Rechnung den Wert

$$(6,2) \quad r = \frac{n^2 bc}{n^2 - 1}.$$

Zwischen dem Steigwinkel $\beta = \operatorname{arccot}(r/b)$ der Schraubtorse Σ_0 , dem Steigwinkel $\gamma = \operatorname{arccot} c$ der Böschungslinie q und dem Kurswinkel ω besteht die Beziehung

$$(6,3) \quad \omega = \gamma - \beta.$$

Unter Ausschluß des trivialen Falles $n = 1$ gilt demnach:

Satz 8. Die Gratlinie q jeder Vibratortorse Θ ist Isogonaltrajektorie (Loxodrome) der Ebenenschar einer gewöhnlichen Schraubtorse Σ_0 . Der Kurswinkel ω ist dabei die Differenz zwischen den Steigwinkeln von Θ und Σ_0 und durch $c \cdot \cot \omega = n^2 c^2 + n^2 - 1$ bestimmt.

Gibt man umgekehrt eine unter dem Winkel β ansteigende Schraubtorse Σ_0 vor und fragt nach den Loxodromen ihrer Ebenenschar für einen bestimmten Kurswinkel ω , so würde deren Ermittlung auf eine partielle Differentialgleichung hinauslaufen. Werden unter diesen jedoch bloß Böschungslinien mit vorgeschriebenem Steigwinkel γ gesucht – lotrechte Achsenlage von Σ_0 vorausgesetzt –, so wäre ein gewisses System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu lösen, das auf ∞^2 Integralkurven führen würde. Fordert man speziell $\gamma = \beta + \omega$, so kommen als Lösungen Gratlinien von Vibratortorsen in Betracht: Mit der Ganghöhe $2\pi b$ der Schraubtorse Σ_0 ist die Konstante b des fortschreitenden Umschwungs bekannt, die Konstante c ist durch $\cot(\beta + \omega)$ festgelegt und die Frequenz n ist aus (6,2) zu erhalten, während die Amplitude a noch frei gewählt werden kann. Man hat damit:

Satz 9. Unter den ∞^3 zu einem vorgeschriebenen Kurswinkel gehörigen Böschungslloxodromen der Ebenen einer gegebenen Schraubtorse mit lotrechter Achse gibt es – abgesehen von den Bahnschraublinien – ∞^2 Gratlinien von Vibratortorsen.

Betrachtet man im begleitenden Dreibein der Böschungslinie q eine Ebene σ'' durch die x'' -Achse, was eine Tangentialebene von q bedeutet und der Annahme $A = D = 0$ entspricht, so erzeugt diese eine die Kurve q enthaltende Böschungstorse Σ . Bezeichnet $\nu = \arctg(B/C)$ den Neigungswinkel der Ebene σ'' gegen die Schmiegebene $z'' = 0$ von q , so erhält man den Steigwinkel α der Torse Σ durch

$$(6,4) \quad \cos \alpha = \cos \gamma \cdot \cos \nu.$$

Satz 10. Alle durch die Gratlinie q einer Vibratortorse Θ mit lotrechter Achse legbaren Böschungstorsen Σ sind ebenfalls Vibratortorsen.

Diese Tatsache stellt die Verallgemeinerung eines Satzes von J. KRAMES über Böschungslinien auf Drehquadriken mit lotrechter Achse dar, den dieser bei der zyklographischen Abbildung solcher Kurven anwandte [7]. — Es sei noch erwähnt, daß die Kurve q die Erzeugenden jeder durch sie gelegten Böschungstorse Σ unter einem *konstanten Kurswinkel* ϑ schneidet, der sich aus

$$(6,5) \quad \cos \vartheta = \sin \gamma / \sin \alpha$$

berechnet. Unter den *Isogonaltrajektorien* der Erzeugendenschar einer Vibrator-torse, die durchwegs Böschungslinien sind, gibt es demnach ausgezeichnete, welche Gratlinien von Vibrator-torsen sind.

Faßt man schließlich die durch $A : B : C : D = 1 : 0 : 0 : 0$ erfaßte *Normalebene* $x'' = 0$ der Böschungslinie q ins Auge, so gelangt man zur *Polar- oder Evoluten-torse* Σ^* von q , deren Gratlinie die „Planevolute“ von q ist und bekanntlich von den Schmiegekugelzentren der Kurve q erfüllt wird. Für die Amplitude a^* der Vibrator-torse Σ^* findet man aus (5,9) den Wert

$$(6,6) \quad a^* = a \left| 1 - \frac{n^2}{\sin^2 \gamma} \right| = a |n^2 c^2 + n^2 - 1|,$$

der mit a nur für $n = \sqrt{2} \cdot \sin \gamma$ übereinstimmt.

Satz 11. Die Schmiegekugelzentren der Gratlinie einer Vibrator-torse erfüllen ebenfalls die Gratlinie einer Vibrator-torse.

Ist speziell $n = \sin \gamma$, dann handelt es sich bei q um eine der in Satz 5 erwähnten Krümmungslinien einer Schraubrohrrfläche. Wegen $a^* = 0$ ist die Evolutentorse Σ^* von q eine gewöhnliche Schraubtorse. Umgekehrt ist dann q als *Planevolvente* der Gratschraublinie von Σ^* zu bezeichnen. Man macht sich unschwer klar, daß q unter den übrigen ∞^2 Planevolventen nicht ausgezeichnet ist; alle entstehen bekanntlich als Bahnen der Punkte einer Ebene, die auf Σ^* rollt. Ergänzend zu den Sätzen 8 und 9 gilt mithin der auf den Sonderfall $\omega = \pi/2$ bezügliche

Satz 12. Rollt eine Ebene auf einer Schraubtorse, so beschreiben ihre Punkte — von einer Schraublinie abgesehen — durchwegs Gratlinien von Vibrator-torsen.

Im Grundriß erscheinen diese Kurven wegen $n = \sin \gamma < 1$ gemäß Satz 1 als Parallelkurven von Epizykloiden.

7. Verebnung der Vibrator-torse. Bei der Verebnung (Abwicklung) einer Torse bleiben bekanntlich Bogenlänge und Krümmung der Gratlinie unverändert. Ihr funktionaler Zusammenhang legt als „natürliche Gleichung“ im Sinne von E. CESÀRO die Gestalt jener ebenen Kurve fest, in deren Tangentenschar die Erzeugenden der Torse bei der Abwicklung übergehen.

Für die Gratlinie q (2,5) der zu verebnenden Vibratortorse Θ ergibt sich wegen der konstanten Steigung γ die (von der Grundebene $z = 0$ aus gezählte) *Bogenlänge* s mit

$$(7,1) \quad s = \frac{z}{\sin \gamma} = \frac{(1 - n^2) a \sin nu + bu}{\sin \gamma}.$$

Die *Krümmung* $\kappa = 1/\rho$ von q findet man aus der Richtungsänderung des Tangentenvektors t (5,1) über $dt = \kappa h \cdot ds$ mit

$$(7,2) \quad \kappa = \frac{du}{ds} \cos \gamma = \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{(1 - n^2) na \cos nu + b}.$$

Bezeichnet φ den *Richtungswinkel* der Tangenten der verebneten Gratlinie \bar{q} , so ergibt sich über $d\varphi/ds = \kappa$:

$$(7,3) \quad \varphi = \int \kappa ds = mu, \quad \text{wobei} \quad m = \cos \gamma.$$

Werden nun in der Abwicklungsebene kartesische Koordinaten \bar{x}, \bar{y} eingeführt, wobei die \bar{y} -Achse die Richtung $\varphi = 0$ anzeigen soll, so gelangt man über $d\bar{x}/ds = -\sin \varphi$ und $d\bar{y}/ds = \cos \varphi$, wenn man s und φ gemäß (7,1) und (7,3) durch u ausdrückt, zu einer Parameterdarstellung von \bar{q} :

$$(7,4) \quad \bar{x} = - \int \sin \varphi \cdot ds, \quad \bar{y} = \int \cos \varphi ds.$$

Bei der Auswertung empfiehlt es sich, wie in (2,6) wieder die komplexe Zusammenfassung $\bar{x} + i\bar{y}$ einzuführen. Man erhält

$$(7,5) \quad \bar{x} + i\bar{y} = i \int e^{i\varphi} \cdot ds = \frac{i}{\sin \gamma} \int [(1 - n^2) na \cos nu + b] e^{niu} du$$

und mit Benützung von $2 \cos nu = e^{niu} + e^{-niu}$ schließlich

$$(7,6) \quad \bar{q} \dots \bar{x} + i\bar{y} = \frac{c}{2m} \left[\frac{1 - n^2}{m - n} nae^{(m-n)iu} + \frac{1 - n^2}{m + n} nae^{(m+n)iu} + \frac{2b}{m} e^{miu} \right].$$

Diese komplexe Darstellung lehrt, daß es sich unter der Voraussetzung $m \neq n \neq 1$ um eine *Radlinie 3. Stufe* der Familie $(m - n) : m : (m + n)$ handelt, von der sich zeigen läßt, daß sie eine *Parallelkurve* im Abstand bc/m^2 der durch $b = 0$ definierten *Zykloide* mit der Charakteristik $(m - n) : (m + n)$ ist; diese ist eine *Epizykloide* für $m > n$ und eine *Hypozykloide* für $m < n$. Im Übergangsfall $m = n$ tritt anstelle des ersten Gliedes in der Klammer von (7,6) der Ausdruck $i(1 - n^2) nau$ und \bar{q} wird zu *Parallelkurve* einer gemeinen *Zykloide*. — Im Ausnahmefall $n = 1$ der *Schraubtorse* geht die Gratlinie, wie wohlbekannt, in einen *Kreis* über.

Satz 13. Bei der Verebnung einer Vibratortorse geht deren Gratlinie in die Parallelkurve einer Zykloide über, und zwar einer Epizykloide, Hypozykloide oder gemeinen Zykloide, je nachdem ob $n < \cos \gamma$, $n > \cos \gamma$ oder $n = \cos \gamma$.

Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung der von W. Blaschke [1] entdeckten, hier mit $b = 0$ einzuordnenden Tatsache dar, daß die Böschungslinien auf Drehquadriken mit lotrechter Achse bei Verebnung ihrer Tangentenflächen in gespitzte Radlinien übergehen. Er gestattet es, in einfacher Weise Kartonmodelle von Vibratortorsen herzustellen: Man schneide einen hinreichend steifen Karton längs einer Parallelkurve \bar{q} einer Zykloide aus und ritze ihn längs einer genügend dichten Folge von Tangenten vor, sodaß er sich nur längs dieser Geraden verbiegen läßt. Verbiegt man den Karton sodann zu einer Böschungstorse, was am besten dadurch erzielt wird, daß man ihn längs einer Evolvente von \bar{q} abschneidet und diesen Rand auf einer ebenen Tischfläche aufruhren läßt, so stellt diese Torse (bei beliebigem Anstieg) eine Vibratortorse dar.

E. SALKOWSKI [12] hat gelegentlich die Bertrand-Kurven mit konstanter Hauptnormalenneigung bestimmt und damit wohl das einzige konkrete und nichttriviale Beispiel von Bertrand-Kurven geliefert. Er fand, daß ihre rektifizierende Torse, die naturgemäß eine Böschungstorse ist, stets eine Gratlinie hat, die bei Verebnung der Torse in eine Parastroide (Parallelkurve einer Astroide) übergeht. Demnach handelt es sich um eine Vibratortorse, für welche $(m - n) : (m + n) = -1 : 3$, also $m : n = 1 : 2$ (Fig. 1). Die genannte Bertrand-Kurve verläuft auf ihr jeweils als ausgezeichnete, die Gratlinie berührende geodätische Linie, der in der Abwicklung eine durch das Zentrum der Parastroide gehende Tangente entspricht.

Satz 14. Die rektifizierenden Torsen der Bertrand-Kurven mit konstanter Hauptnormalenneigung α sind Vibratortorsen mit der Frequenz $n = 2 \sin \alpha$.

8. Erzeugung von Vibratortorsen durch Trochoidenschraubung. Dreht sich ein starres System mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse, die ihrerseits gleichförmig um eine feste, zur ersten parallele Achse verschraubt wird, so entsteht als Sonderfall der von F. HOHENBERG [2] betrachteten, aus zwei proportionalen Schraubungen zusammengesetzten „Helikoidenbewegung“ die von H. HORNINGER [3,4] untersuchte „Trochoidenschraubung“. Bezeichnet d den (unveränderlichen) Abstand der beiden Achsen, b die reduzierte Ganghöhe der Schraubkomponente, und verhalten sich die beiden Winkelgeschwindigkeiten (absolut gemessen) wie $1 : (1 + n)$, so wird die Trochoidenschraubung dargestellt durch

$$(8,1) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos u - y' \sin u + d \cdot \cos (1 + n) u, \\ y &= x' \sin u + y' \cos u + d \cdot \sin (1 + n) u, \\ z &= z' + bu. \end{aligned}$$

Nimmt man bei dieser Bewegung die dem Gangsystem angehörende Ebene

$$(8,2) \quad \tau' \dots y' = cz'$$

mit, so erhält man die Lagenfolge

$$(8,3) \quad \tau \dots x \sin u - y \cos u + cz = -d \cdot \sin nu + bcu.$$

Diese Ebenenschar stimmt mit (2,2) überein, wenn man $d = -ac$ macht. Es gilt mithin

Satz 15. Jede Vibratortorse kann auch dadurch erzeugt werden, daß man eine Ebene einer Trochoidenschraubung unterwirft.

Diese Erzeugung würde eine einfache Bearbeitung von Vibratortorsen mittels einer ebenen Schleifscheibe ermöglichen, die sich um eine ihre Rotationsachse unter dem Winkel $\gamma = \operatorname{arccot} c$ treffende Achse dreht, während das Werkstück längs einer dazu parallelen Achse vorbeigeschraubt wird.

Literatur

- [1] W. Blaschke: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), 188–204.
- [2] F. Hohenberg: Über die Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen. Monatsh. Math. 54 (1950), 221–234.
- [3] H. Horninger: Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubflächen. Monatsh. Math. 58 (1954), 193–212.
- [4] H. Horninger: Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen. Monatsh. Math. 63 (1959), 39–58.
- [5] W. Kautny: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. 60 (1956), 66–82.
- [6] W. Kautny: Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. 63 (1959), 169–188.
- [7] J. Krames: Die zyklographische Abbildung der Böschungskurven auf Drehflächen zweiten Grades. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 144 (1935), 654–661.
- [8] A. Mannheim: Sur le déplacement d'une figure de forme invariable, dont tous le plans passent par de points fixes. J. éc. polyt. 60 (1890), 75–88.
- [9] O. Obárka: Křivky a plochy vibrátorové. Sborn. Vys. Uč. Techn. Brno 1965, 97–131.
- [10] O. Obárka: Technické aplikace křivek vibrátorových. Knižn. odb. věd. spisů Vys. Uč. Techn. Brno 6 (1966), 147–160.
- [11] O. Obárka: K studiu jisté třídy kinematicky vytvořených přímkových ploch. Mat. Čas. 18 (1968), 177–200.
- [12] E. Salkowski: Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. 69 (1910), 560–579.
- [13] W. Wunderlich: Höhere Radlinien. Österr. Ing. Arch. 1 (1946), 277–296.
- [14] W. Wunderlich: Zur Geometrie des gedämpften harmonischen Umschwungs. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. 173 (1964), 7–28.

Anschrift des Verfassers: Technische Hochschule, A-1040 Wien, Karlsplatz 13, Österreich.