

W. WUNDERLICH

Drehsymmetrische Gleichgewichtsformen von Rhomben- und Sechsecknetzen

Zur Erfassung der Gleichgewichtslage von schlauchartig geschlossenen Rhomben- oder Sechsecknetzen, die zwischen zwei koaxialen Kreisreifen ausgespannt sind, wird ein Differenzschema abgeleitet. Bei zunehmender Verdichtung ergibt sich für das Rhombennetz in der Grenze eine Drehfläche konstanter negativer Krümmung, für das Sechsecknetz eine Drehfläche mit dazu kongruentem Meridian. Zur Bestimmung der Formparameter dieser Grenzflächen für Netze bekannter Abmessungen und Struktur werden Formeln und Nomogramme entwickelt.

The paper develops a scheme of difference equations to determine the equilibrium shape of a tubular net with rhombic or hexagonal meshes, extended between two coaxial circular rings. With condensing structure the rhombic net tends to a surface of revolution with constant negative curvature, the hexagonal net to a surface with equal profile. Formulas and nomograms are derived to find the shape parameters of these limit surfaces for nets with given dimensions.

Для учёта равновесного положения шлангообразно закрытых сеток ромбовидной и шестиугольной формы, растянутых между двумя соосными круглыми обручами, выводится схема в конечных разностях. С возрастающим сгущением получается в пределе для ромбовидной сетки поверхность вращения с постоянной отрицательной кривизной, для шестиугольной-же сетки поверхность вращения с конгруэнтным меридианом. Для определения параметров формы этих предельных поверхностей для сеток известных размеров и структур выводятся формулы и строятся номограммы.

1. Fragestellung und Lösungskonzept

Der Anblick von Fischreusen hatte seinerzeit J. RADON [2] veranlaßt, die Gleichgewichtsform eines zwischen zwei koaxialen Kreisreifen ausgespannten, aus Fäden geknüpften *Rhombennetzes* zu untersuchen (Bild 1). Es ergab sich, daß diese Form bei infinitesimaler Verfeinerung der Maschen gegen eine *Drehfläche konstanter negativer Krümmung* (*pseudosphärische Fläche*) mit ihrem Schmiegliniensystem strebt, was kurz darauf auch von H. THOMAS [7] festgestellt wurde. Das finite Modell wurde später fast gleichzeitig von R. SAUER [3], [4] und dem Verfasser [9], [10] mit differenzgeometrischen Methoden studiert, wobei auch die zugehörigen Kräftepläne betrachtet wurden.

In Verallgemeinerung hiervon soll nun die entsprechende Frage für *Sechsecknetze* untersucht werden. Es liege ein ebenes Netz von der aus Bild 2 ersichtlichen Struktur vor: Es besteht aus kongruenten Sechseckwaben mit Schrägseiten s und waagrechten Seiten t . Durch Vereinigung des linken Randes mit dem rechten entsteht ein schlauchartiges Gebilde, das anschließend zwischen zwei koaxialen Kreisreifen ausgespannt wird.

Hierbei nimmt es eine Gleichgewichtsform an, die naturgemäß rotationssymmetrisch ist. Man kann derartige Formen bei modischen Beleuchtungskörpern oder Krabbelkäfigen für Kleinkinder beobachten. Zur Fixierung der Vorstellung wird die Rotationsachse in der Folge stets lotrecht gedacht.

Die kennzeichnende Eigenschaft der fraglichen Form besteht offenbar darin, daß sie durchwegs *ebene Knoten* aufweist: Damit die in einem Knoten angreifenden Kräfte einander das Gleichgewicht halten, müssen — unter Vernachlässigung des Eigengewichts — die drei von dort ausgehenden Fadenstrecken in einer Ebene liegen. Aus Symmetriegründen fallen die beiden zu den Enden eines waagrechten Querfadens gehörigen Knotenebenen zusammen.

Werden nun unter Erhaltung der Schrägfäden s alle Querfäden t gleichmäßig auf λt mit $0 < \lambda < 1$ verkürzt, so rücken sämtliche Knoten um das gleiche Stück normal auf die Achse zu, wobei sie jedoch eben bleiben. Man hat also wiederum eine Gleichgewichtsform des neuen Sechs-

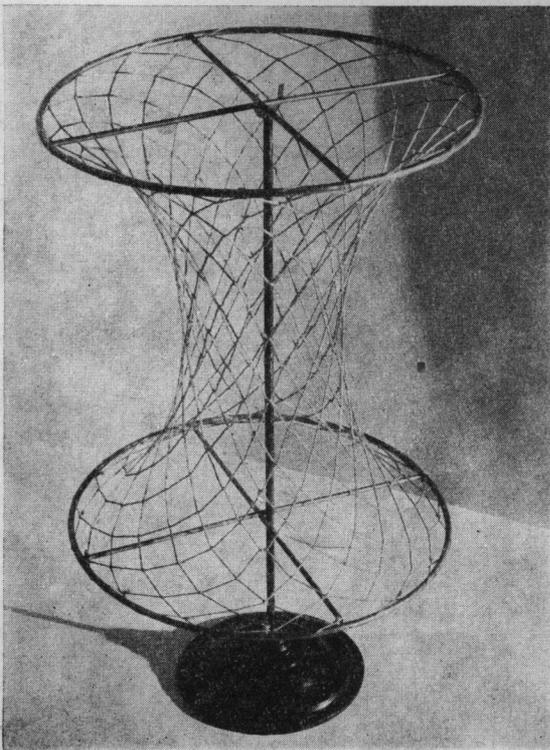


Bild 1

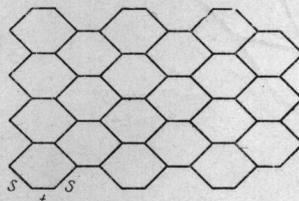


Bild 2

sowie die Hilfsgröße

$$\vartheta_i = r_i (\sec \alpha - 1) = 2 r_i \sec \alpha \cdot \sin^2 (\alpha/2) \tag{2.5}$$

eingeführt. Die Gleichungen (2.2) und (2.3) gehen dann über in

$$\zeta_{i+1} : \zeta_i = (\varrho_{i+1} - \vartheta_i) : (\varrho_i + \vartheta_i) \tag{2.6}$$

bzw.

$$\zeta_{i+1}^2 - \zeta_i^2 = (r_{i+1} - r_{i-1}) (2 r_i \cos \alpha - r_{i+1} - r_{i-1}) = -(\varrho_{i+1} + \varrho_i) (\varrho_{i+1} - \varrho_i + 2 \vartheta_i \cos \alpha). \tag{2.7}$$

Dividiert man (2.7) durch die aus (2.6) folgende Beziehung

$$\frac{\zeta_{i+1} + \zeta_i}{\zeta_i} = \frac{\varrho_{i+1} + \varrho_i}{\varrho_i + \vartheta_i}, \tag{2.8}$$

so gelangt man unter gleichzeitiger Ausschaltung der unbrauchbaren trivialen Lösungen

$$\zeta_{i+1} = -\zeta_i, \quad \varrho_{i+1} = -\varrho_i \quad (Z_0 = X_1)$$

zu

$$(\zeta_{i+1} - \zeta_i) \zeta_i = -(\varrho_{i+1} - \varrho_i + 2 \vartheta_i \cos \alpha) (\varrho_i + \vartheta_i). \tag{2.9}$$

Aus (2.8) und (2.9) können nun die Zuwächse ϱ_{i+1} und ζ_{i+1} berechnet werden. So ergeben sich die *Rekursionsformeln*

$$\varrho_{i+1} = \varrho_i + 2 \vartheta_i \frac{\zeta_i^2 - (\varrho_i + \vartheta_i)^2 \cos \alpha}{\zeta_i^2 + (\varrho_i + \vartheta_i)^2}, \quad \zeta_{i+1} = \zeta_i - 2 \vartheta_i \frac{\zeta_i (\varrho_i + \vartheta_i) (1 + \cos \alpha)}{\zeta_i^2 + (\varrho_i + \vartheta_i)^2}. \tag{2.10}$$

Ausgehend von den mit α , r_0 , s und $z_0 = 0$ bekannten Anfangswerten $\varrho_1 = r_0 (\sec \alpha - 1)$, $\vartheta_1 = \varrho_1 \sec \alpha$ und $\zeta_1 = z_1 = \sqrt{s^2 - r_0^2 \tan^2 \alpha}$ lassen sich nun schrittweise alle folgenden Werte ermitteln, wobei ϑ_i jeweils gemäß (2.5) zu bestimmen ist. Die für Bild 3 maßgebenden Werte, denen die Annahme $\alpha = 15^\circ$, $r_0 = 2$, $s = 1$ zugrunde liegt, sind aus der nachstehenden Tabelle zu entnehmen:

i	r_i	ϱ_i	ϑ_i	z_i	ζ_i	R_i
0	2,0000			0,0000		5,7978
1	2,0706	0,0706	0,0730	0,8443	0,8443	5,8684
2	2,2791	0,2086	0,0804	1,6411	0,7968	6,0770
3	2,6117	0,3326	0,0921	2,3366	0,6955	6,4096
4	3,0302	0,4185	0,1069	2,8710	0,5344	6,8280
5	3,4559	0,4257	0,1219	3,1952	0,3243	7,2537
6	3,7705	0,3146		3,3099	0,1147	7,5683

Wäre der Ausgang nicht von der Knotenreihe auf dem Kehlkreis genommen worden, sondern von der *Knotenreihe auf einem beliebigen Parallelkreis*, so hätte man dort noch die Neigung der Knotenebenen vorschreiben können. Die Differenzgleichungen (2.10) mit den Festsetzungen (2.4) und (2.5) würden jedoch unverändert bestehen, und eine Modifikation müßten bloß die Anfangswerte erfahren.

3. Sphärisches Bild

Jedem Knoten des Rhombennetzes werde jener Punkt der *Einheitskugel* zugeordnet, dessen Tangentialebene zur Knotenebene parallel ist, wobei eine geeignete Orientierung zu beachten ist — etwa gleichsinnige Parallelität der gerichteten Knoten- und Kugelnormalen. Werden anschließend je zwei Bildpunkte, die von den Enden einer Fadenstrecke herrühren, durch den kürzesten Großkreisbogen verbunden, so entsteht ein Vierecksnetz auf der Kugel, welches als *sphärische Bild* der Fischreuse bezeichnet wird. Jedem Knoten des Rhombennetzes entspricht dabei ein Maschenviereck des Kugelnetzes und umgekehrt.

Jede Masche der Fischreuse ist ein windschiefer Rhombus mit der Seitenlänge s , den man sich durch Verknickung eines ebenen Rhombus um eine Diagonale entstanden denken kann; dementsprechend besitzt er zwei orthogonale Symmetrieebenen, die jeweils eine Diagonale enthalten und die andere halbieren. Aus der Symmetrie dieses Tetraeders folgt unmittelbar, daß je zwei Seitenflächen, die eine Rhombuseite gemeinsam haben, den gleichen Winkel σ einschließen. Der Übergang von einer Masche zu den benachbarten lehrt — auf Grund der ebenen Knoten —, daß dieser „*Schränkwinkel*“ σ für sämtliche Maschen denselben Betrag hat. Dieser Betrag kann daher etwa an der Masche $A_0 B_0 A_1^*$ ermittelt werden (Bild 3). Die Normalen in den Netzknoten A_0 und B_0 — und damit auch die entsprechenden sphärischen Bilder — sind durch die Einheitsvektoren

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b} = (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, -\sin \beta) \tag{3.1}$$

festgelegt, wobei der Neigungswinkel β von \mathbf{b} durch

$$\tan \beta = (r_1 - r_0 \cos \alpha) / z_1 = r_0 \sin^2 \alpha / z_1 \cos \alpha \tag{3.2}$$

bestimmt ist. Mittels des Skalarprodukts $\mathbf{a} \mathbf{b}$ ergibt sich dann unter Berücksichtigung von (2.1):

$$\cos \sigma = \cos \alpha \cos \beta, \quad \sin \sigma = s \sin \alpha / \sqrt{s^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha}. \tag{3.3}$$

Bei der Bild 3 zugrunde liegenden Annahme beträgt der Schränkwinkel $\sigma = 17,62^\circ$.

Nachdem sämtliche Großkreisbögen des sphärischen Bildes die gleiche Länge σ besitzen, so erweist sich dasselbe ebenfalls als *Rhombennetz*, natürlich aber als ein sphärisches. Es liegt auf der Kugel nach Art eines Ballonnetzes auf; ein solches Bild ist in der Abhandlung [9] mit Abb. 3 enthalten.

Im Falle der zwischen zwei kongruenten Kreisen ausgespannten Fischreuse erfaßt das sphärische Rhombennetz auch den Kugeläquator, der dem Kehlkreis der Reuse entspricht. Wird diese jedoch zwischen zwei koaxialen Kreisen verschiedener Größe ausgespannt, so kann sich ein Kehlkreis unter Umständen erst auf der Fortsetzung jenseits des kleineren Kreises einstellen, vielleicht aber auch gar nicht. Eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Kehlkreises bei einem ebenknotigen Rhombennetz, das gemäß der Schlußbemerkung in Abschnitt 2 ausgehend von einer Knotenreihe auf einem beliebigen Parallelkreis entwickelt werden kann, lautet auf Grund des sphärischen Bildes, das dann den Äquator überschreiten muß:

$$m\sigma > \pi \quad \text{oder} \quad \sigma > \alpha. \quad (3.4)$$

Der Schränkwinkel σ ist dabei natürlich nicht mittels der Formeln (3.1–3) zu erhalten, kann aber ebenfalls als Winkel benachbarter Gitternormalen gefunden werden.

Für $\sigma = \alpha$ wird das fortgesetzte Rhombennetz asymptotisch der Achse zustreben, weil sich das sphärische Bild dem Äquator unbeschränkt nähert, ohne ihn zu erreichen (vgl. Bild 5). — Ist hingegen $\sigma < \alpha$, so reicht die vom sphärischen Bild bedeckte Polkappe nur bis zum Parallelkreis mit dem Radius σ/α ; das Rhombennetz nimmt in der Umgebung der Achse ungefähr die Gestalt eines Drehkegels mit dem Öffnungswinkel $2 \arccos(\sigma/\alpha)$ an. Es kann mittels des Modells aus Bild 1 demonstriert werden, wenn man dasselbe durch Verdrehen der Randkreise in der Mitte zusammenschnürt.

Mit Rücksicht auf die Konstanz des Schränkwinkels σ über das ganze Netz könnte dasselbe durch ein *Rhombengitter aus verwundenen Lamellen* ersetzt werden, wie dies Bild 5 für den Fall $\sigma = \alpha$ zeigt. Jede Masche ist aus vier Metallamellen der Nennlänge s zusammengesetzt, die um die Winkel $\pm \sigma$ tordiert und durch Hohlknoten gelenkig miteinander verbunden sind. Die verschiedene Gestalt der im Gitter vorhandenen Maschen läßt erkennen, daß ein solcher Gelenkrhombus beweglich ist, was sich unschwer direkt bestätigen ließe, aber auch aus einer Parameterzählung zu folgern ist: Windschiefe Rhomben mit der Seitenlänge s liegen in ∞^2 Formen vor, von welchen je ∞^1 die gleiche Schränkung σ aufweisen werden, also durch (zwangsläufige) Deformation ineinander überführbar sein müssen. In der Tat handelt es sich hier um einen Sonderfall des von G. T. BENNETT [1] entdeckten „*windschiefen Parallelogramms*“ (*Isogramms*). — Auch das ganze Rhombengitter, das aus tordierten Lamellen der beiden gegensinnig-kongruenten Sorten aufgebaut ist (wobei je vier von einem Knoten ausgehende Lamellen durch ein gemeinsames Zylindergelenk verbunden sind), gestattet daher eine stetige Deformation. Mit einem einzigen Modell nach dem Muster Bild 5 lassen sich dabei alle drei oben angeführten Typen herstellen.

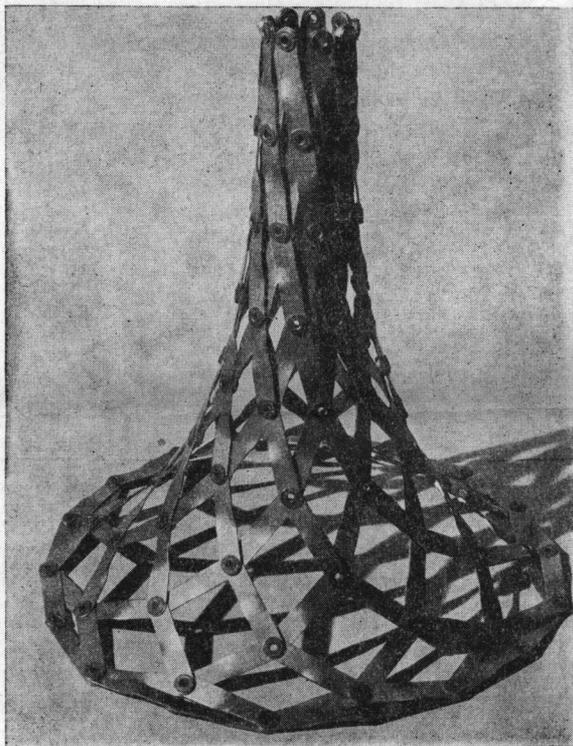


Bild 5

4. Kräfteplan

Zum ursprünglichen Fischreusenetz zurückkehrend, kann man nach dem in der graphischen Statik üblichen Vorgang je vier in einem Knoten angreifende Fadenkräfte durch zu den Fadenrichtungen parallele Strecken repräsentieren, deren Längen in einem gewählten Maßstab den Kraftbeträgen entsprechen. Da sich diese Kräfte das Gleichgewicht halten, lassen sich die sie darstellenden Strecken zu einem geschlossenen Viereck anordnen, das wegen der Knotenbedingung eben ist. Von Knoten zu Knoten fortschreitend, entsteht solcherart ein räumlicher *Kräfteplan* in Gestalt eines *Viereckspolyeders mit ebenen Facetten*.

Jede Facette rührt von einem Netzknoten her und ist parallel zur Knotenebene. Die zu zwei benachbarten (d. h. durch einen Faden verbundenen) Knoten gehörigen Facetten haben eine Seite gemeinsam und schließen längs derselben den Winkel $\pi - \sigma$ ein. Den vier Knoten einer Netzmasche entsprechen vier in einer Ecke zusammenstoßende Facetten, die dort eine *axial-symmetrische vierseitige Pyramide* bilden; deren Achse ist parallel zur Symmetrieachse der Netzmasche.

Der Knotenreihe A_0, A_1, \dots auf dem Kehlkreis der Fischreuse (Bild 3) sind im Kräfteplan kongruente ebene Rhomben zugeordnet, die auf einer gemeinsamen Diagonalgeraden \bar{z} lückenlos aufgefädelt sind, wobei je zwei benachbarte Rhomben durch eine Schraubung um \bar{z} mit dem Drehwinkel 2α zusammenhängen. Der Knotenreihe eines Netzmeridians hingegen entsprechen auf dem Kräftepolyeder verschiedengestaltige Deltoide,

deren Hauptdiagonalen auf einer Normale von \bar{z} lückenlos aufeinanderfolgen. Hieraus ist zu erkennen, daß das *Kräftepolyeder einer Schraubwendelfläche eingeschrieben* ist. Ein solcher Kräfteplan ist in der Abhandlung [9] mit Abb. 5 wiedergegeben.

Auf Grund der *reziproken Beziehung* zwischen dem Netz und seinem Kräftediagramm kann ersteres als Kräfteplan eines zweiten Netzwerkes gedeutet werden, dessen Fadenstrecken durch die Kanten des ersten Kräftepolyeders dargestellt werden. Weil das erste Netz rhombisch ist, sind die Fadenspannungen im zweiten Netz durchwegs gleich. Aus der vorhin erwähnten axialen Symmetrie der Eckenpyramiden folgt, daß die Fäden des zweiten Netzwerkes *unverknötet* bleiben können: An jeder Kreuzungsstelle zweier Fäden fallen die Resultierenden der dort angreifenden Spannungskräfte eines durchgehenden Fadens entgegengesetzt gleich aus und bewirken keine Verschiebung. Damit sich die einer Wendelfläche eingeschriebene Gleichgewichtsform einstellt, sind passende Randkräfte vorzusehen. Ein derartiges Modell hat H. THOMAS [6] hergestellt.

Wird das ebenflächige Viereckspolyeder in der Weise realisiert, daß seine Facetten als starre Platten ausgebildet werden, die jedoch längs der Kanten gelenkig verbunden sind, so besitzt es die merkwürdige Eigenschaft *stetiger, zwangläufiger Beweglichkeit*. Diese Eigenschaft wurde zuerst von H. WIENER [8] bemerkt und beruht im wesentlichen auf der Achsensymmetrie der Eckenpyramiden. Derartige Polyeder wurden später neuerlich von R. SAUER und H. GRAF [5] betrachtet.

5. Übergang zu Sechsecknetzen

Gemäß dem in Abschnitt 1 entwickelten Konzept sind nun die rhombischen Maschen der Fischreuse längs der Meridiandiagonalen zu trennen und die beiden Hälften jeweils auf die Entfernung t abzurücken, so daß nach Einschaltung waagerechter Querräden *Sechseckmaschen* entstehen. Der Achsenabstand R_i eines solchen Querrädens hängt dabei mit dem Achsenabstand r_i des ursprünglichen Reusenknötens vermöge

$$R_i = r_i + d \quad \text{mit} \quad d = (t/2) \cot(\alpha/2) \quad (5.1)$$

zusammen, wie ein Blick auf Bild 3 lehrt. Das zwischen zwei benachbarten Meridianebenen verlaufende zickzackförmige Fadenpolygon des ursprünglichen Rhombennetzes erfährt bei der vorgenommenen Umwandlung bloß eine waagerechte Parallelverschiebung, so daß die konstruktive Durchführung des Übergangs keine Schwierigkeiten bereitet. — Für die in Bild 3 zugrundegelegte Annahme $\alpha = 15^\circ$, $t = s = 1$ beträgt die Abstandsdifferenz $d = 3,7978$. Die Werte der Radien R_i sind in der letzten Spalte der Tabelle vermerkt.

Die zu den beiden Enden eines Querrädens des Sechsecknetzes gehörige gemeinsame Knotenebene ist zur entsprechenden Knotenebene des ursprünglichen Rhombennetzes parallel. Dies bedingt, daß das *sphärische Bild* des Sechsecknetzes mit jenem des Rhombennetzes vollkommen übereinstimmt. Laut Abschnitt 3 handelte es sich um ein sphärisches Rhombennetz mit der Maschenweite σ ; jeder Knoten desselben ist jetzt aber das Bild von zwei durch einen Querraden verbundenen Knoten des Sechsecknetzes.

Die Übereinstimmung der sphärischen Bilder hat zur Folge, daß sich auch das Sechsecknetz durch ein *Lamellengitter* ersetzen läßt. Zu den um die Schräkwinkel $\pm \sigma$ tordierten Lamellen der Länge s , die das Rhombengitter aufbauten, haben bloß noch unverwundene Lamellen der Länge t zu treten, welche den Querrädern entsprechen. Erfolgt die Verbindung der drei von einem Knoten ausgehenden Lamellen wieder durch Zylinder-gelenke, dann ist auch das Sechseckgitter zwangläufig beweglich.

Was den zum Sechsecknetz gehörigen *Kräfteplan* betrifft, so stimmt dieser ebenfalls mit jenem des Rhombennetzes überein. Derselbe ist lediglich durch die Hauptdiagonalen der Deltoidfacetten des in Abschnitt 4 beschriebenen Kräftepolyeders zu vervollständigen; diese Diagonalen repräsentieren dann die Spannungen in den Querrädern.

6. Grenzflächen

Wird das rotationssymmetrische Rhombennetz aus Abschnitt 2 fortschreitend verdichtet, indem man s und α mit gleicher Größenordnung gegen Null streben läßt, wobei etwa

$$\lim (s/\alpha) = p > 0, \quad (6.1)$$

so gelangt man in der Grenze zu einer gewissen *Drehfläche* Φ , deren Gestalt nunmehr bestimmt werden soll. Zu diesem Zweck fassen wir die Größen r_i und z_i als die Werte zweier nicht näher definierten Funktionen $\tilde{r}(\varphi)$ bzw. $\tilde{z}(\varphi)$ an den Stellen einer diskreten Folge

$$\varphi_i = i \alpha \quad (6.2)$$

auf. Die Tripel (r_i, φ_i, z_i) stellen dann die Zylinderkoordinaten der Knoten des durchgehenden Fadenpolygons $A_0 B_0 C_0 \dots$ in Bild 3 dar, das im Verlauf des Grenzübergangs $\alpha \rightarrow 0$ gegen eine bestimmte, auf Φ verlaufende *Raumkurve* $l: r = r(\varphi), z = z(\varphi)$ konvergieren wird.

Im Zuge dieses Grenzprozesses treten dann gemäß (2.4) anstelle der Differenzenquotienten $\varrho_i/\alpha = \Delta\tilde{r}/\Delta\varphi$ und $\zeta_i/\alpha = \Delta\tilde{z}/\Delta\varphi$ die Differentialquotienten $dr/d\varphi = r'$ bzw. $dz/d\varphi = z'$. Aus den durch α^2 dividierten Differenzgleichungen (2.10) gehen mit Rücksicht auf (2.5) und $\vartheta_i/\alpha^2 \rightarrow r/2$ die *Differentialgleichungen*

$$r'' = r \frac{z'^2 - r'^2}{z'^2 + r'^2}, \quad z'' = -r \frac{2 z' r'}{z'^2 + r'^2} \quad (6.3)$$

hervor, die es zu integrieren gilt.

Die Quotientenbildung in (6.3) führt über

$$\frac{r''}{z''} = \frac{r'^2 - z'^2}{2 r' z'} \quad \text{zu} \quad (6.4)$$

$$\frac{2 r' r'' z' - r'^2 z''}{z'^2} = - z'' , \quad (6.5)$$

wobei links die Ableitung von r'^2/z' steht. Damit erhält man zunächst das *Zwischenintegral*

$$r'^2 + z'^2 = c z' . \quad (6.6)$$

Geht man damit in die rechte Gleichung (6.3) ein, so ergibt sich

$$c z'' = - 2 r r' , \quad (6.7)$$

und weiterhin

$$c z' = b^2 - r^2 , \quad (6.8)$$

wobei die Integrationskonstante b^2 wegen (6.6) positiv sein muß. Division von (6.6) durch (6.8) führt schließlich über

$$\frac{dr^2 + dz^2}{dz^2} = \frac{c^2}{b^2 - r^2} \quad (6.9)$$

nach Trennung der Variablen auf

$$z = \int_a^r \sqrt{\frac{b^2 - r^2}{r^2 - a^2}} dr \quad \text{mit} \quad a^2 = b^2 - c^2 , \quad (6.10)$$

wobei im Hinblick auf die Fischreusenform $b^2 > c^2$ angenommen wurde. Dieses elliptische Integral beschreibt die gesuchte Grenzfläche Φ , die sich in Übereinstimmung mit J. RADON [2] als *Drehfläche mit konstanter Gaußscher Krümmung* $K = -1/c^2$ identifizieren läßt. Für den vorliegenden „Ringtyp“ bedeutet a den Kehlkreisradius und b den Radius des Rückkehrkreises (Bild 6). Über die Rückkehrkreise hinaus setzt sich die Fläche periodisch fort.

Die Elimination von z' aus (6.6) und (6.8) liefert eine Differentialgleichung für $r(\varphi)$ mit der Lösung

$$\varphi = \int_a^r \frac{c dr}{\sqrt{(r^2 - a^2)(b^2 - r^2)}} . \quad (6.11)$$

Dieses elliptische Integral legt zusammen mit (6.10) jene *Raumkurve* l fest, die als Grenzform des Fadenpolygons $A_0 B_0 C_0 \dots$ auftritt. Für

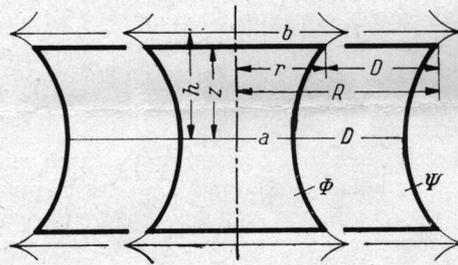


Bild 6

die *Bogenlänge* S dieser Kurve, erklärt durch das Bogenelement

$$dS^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2 , \quad (6.12)$$

findet man mit Benützung von (6.6) und (6.8) über

$$S'^2 = r^2 + r'^2 + z'^2 = b^2 \quad (6.13)$$

schließlich, wenn S vom Kehlkreis aus gezählt wird:

$$S = b \varphi . \quad (6.14)$$

Dies steht in Einklang mit der Tatsache, daß die Länge des Netzpolygons von $z_0 = 0$ bis z_i mit Rücksicht auf (6.2) durch $\tilde{S} = i s = (s/\alpha) \varphi_i$ ausgedrückt werden kann. Die in (6.1) eingeführte Konstante hat daher den Wert $p = b$.

Es läßt sich unschwer zeigen, daß die Kurve l eine *Schmieglinie* (Asymptoten- oder Haupttangentenkurve) der Drehfläche Φ darstellt, ferner daß sie die *konstante Torsion* $\tau = 1/c$ besitzt. Wie zu erwarten, stellt sich dieser Wert mit Benützung von (3.3) auch als Grenzwert der längs des Fadenpolygons $A_0 B_0 C \dots$ unveränderlichen Schränkung σ/s ein. — Die gleichen Feststellungen gelten selbstverständlich auch für die hier nicht weiter beachteten Annahmen $a^2 \leq 0$, die auf Drehflächen konstanter negativer Krümmung vom konischen Typ bzw. auf die bekannte „Pseudosphäre“ (vgl. Bild 5) führen; für letztere sind die Integrale (6.10) und (6.11) elementar auswertbar.

Die Rhombennetze mit ebenen Knoten (Bild 1) oder die entsprechenden Lamellengitter (Bild 5) veranschaulichen also als differenzengeometrische Modelle die für *Flächen konstanter negativer Krümmung* kennzeichnenden Tatsachen, daß ihre Schmieglinien konstante Torsion aufweisen und ein TSCHEBYSCHEFF-Netz bilden. Die zugehörigen sphärischen Bilder (Abschnitt 3) illustrieren analog das Auftreten eines TSCHEBYSCHEFF-Netzes auf der Einheitskugel als Bild des Schmiegliniensystems. — Das in Abschnitt 4 betrachtete, einer Wen-

delfläche eingeschriebene Kräftepolyeder mit ebenen Facetten wird in der Grenze zu einem schraubungsinvarianten *konjugierten Netz aus geodätischen Linien der Wendelfläche* [9], [6].

Hält man im Verlauf des Grenzprozesses das Verhältnis $t/s = q$ fest, so strebt das *Sechsecknetz* aus Abschnitt 5 gegen eine *Drehfläche* Ψ , deren *Meridianprofil* zu jenem der pseudosphärischen Drehfläche Φ kongruent ist. Es ist gemäß (5.1) und (6.1) lediglich um den Betrag

$$D = \lim d = \lim (t/\alpha) = p q = b q \tag{6.15}$$

von der Achse weg abgerückt (Bild 6). In (6.10) wäre bloß r durch $R - D$ zu ersetzen.

7. Ermittlung der Formparameter

Die naheliegende Frage nach der sich einstellenden Gleichgewichtsform eines zwischen zwei coaxialen kongruenten Kreisreifen gegebenen Durchmessers schlauchartig ausgespannten *Rhombennetzes* mit bekannten Abmessungen kann bei genügender Feinheit näherungsweise durch die Betrachtung der entsprechenden *Grenzfläche* beantwortet werden.

Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, die Formeln (6.10) und (6.11) auf die *Legendreschen Normalintegrale* zurückzuführen. Mittels der Substitution

$$r = b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \quad \text{mit} \quad k = c/b \tag{7.1}$$

erhält man

$$\frac{\varphi}{k} = \int_u^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = F(\pi/2, k) - F(u, k) \tag{7.2}$$

und

$$\frac{z}{b} = \int_u^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} - \int_u^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du = \frac{\varphi}{k} + E(u, k) - E(\pi/2, k) \tag{7.3}$$

Besitzt nun das Rhombennetz gemäß Abschnitt 1 und 2 die Maschenweite s und weist es unter Einschluß der Ränder $2n + 1$ Knotenkreise mit je m Knoten auf, so beträgt die Länge eines durchgehenden Fadens $2S = 2ns$ mit dem Winkelunterschied $2\varphi = 2\pi n/m$. Zuzufolge (6.14) ergibt sich damit der Radius b des Rückkehrkreises der Drehfläche Φ (Bild 6) mit

$$b = m s / \pi \tag{7.4}$$

Bezeichnet ferner r den gemeinsamen Radius der beiden Spannreifen, so stehen mit (7.1) und (7.2) zwei Bestimmungsgleichungen für die Amplitude u und den Modul k zur Verfügung. Nach Ermittlung dieser Hilfsgrößen kann dann mittels (6.10) und (7.1) der Kehlkreisradius a berechnet werden; hierbei stellt sich mit

$$a/b = \sqrt{1 - k^2} = k' \tag{7.5}$$

der komplementäre Modul ein. Über (7.3) erhält man schließlich den Abstand $2z$ der beiden Randkreise.

Zur übersichtsmäßigen Auswertung können die *Kurventafeln* in Bild 7 dienen, die durch graphische Anamorphose aus Diagrammen der Abhängigkeiten (7.2) und (7.3) abgeleitet wurden, wobei $k = \sin v$ gesetzt wurde; die im kartesischen (u, v) -Raster eingetragenen Kurven $r/b = \text{const.}$ beruhen auf (7.1). Nach Bestimmung von b gemäß (7.4) geht man mit r/b und $\varphi = 180^\circ n/m$ in die linke Kurventafel ein, überträgt den Ablesepunkt (u, v) in die rechte Tafel (die der Übersichtlichkeit halber von der linken getrennt wurde), und kann dort den Wert z/b entnehmen; a/b kann an der Stelle $(90^\circ, v)$ am rechten Rand der linken Tafel abgelesen werden, während die relative Höhe h/b des Rückkehrkreises an der Stelle $(0, v)$ am linken Rand der rechten Tafel zu

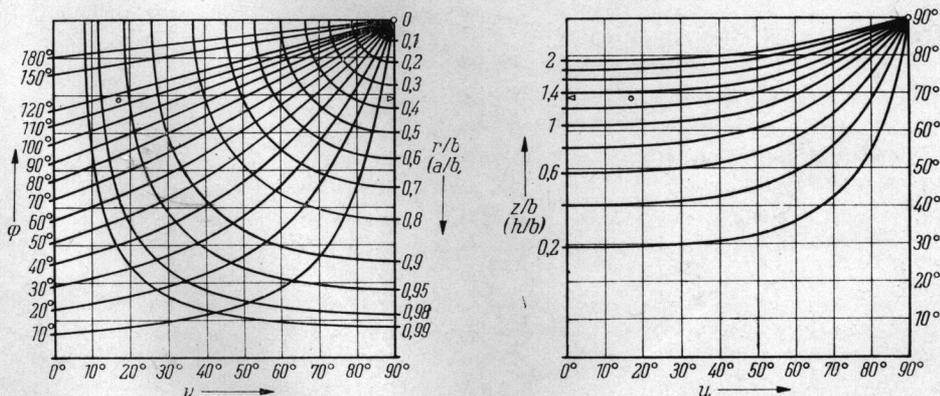


Bild 7

entnehmen wäre. — Als Beispiel sei das in Bild 1 wiedergegebene Netz mit den Daten $m=17$, $n=11$, $s=2,5$ cm und $r=13$ cm betrachtet. Zunächst liefert der Rechenstab $b=13,52$ cm und $r/b=0,96$, ferner $\varphi=116^\circ$. Die linke Tafel führt mit diesen Werten auf $u=17^\circ$, $v=69^\circ$ und $a/b=0,86$, womit man den Kehlkreisdurchmesser $2a=9,7$ cm bekommt; die rechte Tafel liefert über $z/b=1,3$ den Randkreisabstand $2z=35$ cm. Beide Werte stimmen mit der Messung am Modell gut überein.

Liegt hingegen statt eines Rhombennetzes ein Sechsecknetz vor, so wird man gemäß Abschnitt 1 zunächst die Querfäden eliminieren, was die Breite des Netzes um $2mt$ verkürzt; dementsprechend sind alle Radien — auch jene der gegebenen Randkreise — um $D = mt/\pi$ zu verkleinern. Das durch Entfernung der Querfäden gewonnene Rhombennetz ist dann so zu behandeln wie vorhin. Der ermittelte Kehlradius a ist anschließend wieder um D zu vergrößern, während die Höhe $2z$ unverändert bleibt. Für ein Netz mit ursprünglich regulären Sechseckmaschen ($t=s$) gilt zufolge (6.15) oder (7.4) speziell $D=b$.

Literatur

- 1 BENNETT, G. T., A new mechanism. *Engineering* **76**, 777—778 (1903).
- 2 RADON, J., Über Tschebyscheff-Netze auf Drehflächen und eine Aufgabe der Variationsrechnung. *Mitt. Math. Ges. Hamburg* **8**, 149—151 (1940).
- 3 SAUER, R., Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen. *Math. Z.* **52**, 611—622 (1950).
- 4 SAUER, R., *Differenzgeometrie* (Berlin 1970).
- 5 SAUER, R., GRAF, H., Über Flächenverbiegung in Analogie zur Verknickung offener Facettenfläche. *Math. Ann.* **105**, 499—535 (1931).
- 6 THOMAS, H., Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. *Math. Z.* **44**, 233—265 (1939).
- 7 THOMAS, H., Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknöteten und gespannten Fäden. *Math. Z.* **47**, 66—77 (1942).
- 8 WIENER, H., *Verh. Ges. D. Naturf. u. Ärzte*, 75. Vers. Kassel 1903, 29—30.
- 9 WUNDERLICH, W., Zur Differenzgeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung. *Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss.* **160**, 39—77 (1951).
- 10 WUNDERLICH, W., Nuovi modelli delle superficie a curvatura costante negativa. *Atti Conv. Intern. Geom. Diff. (Venezia 1953)*, 1—11.

Eingereicht am: 15. 12. 1972

Anschrift: Prof. Dr. W. WUNDERLICH, II. Institut für Geometrie, Technische Hochschule, Karlsplatz 13, A-1040 Wien, Österreich