

Algebraische Böschungslinien dritter und vierter Ordnung

Von

w. M. W. Wunderlich (Wien)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 19. Oktober 1972)

(Mit 4 Abbildungen)

1. Einleitung

Unter den *Böschungslinien* versteht man bekanntlich die „Kurven konstanter Steigung“ des dreidimensionalen euklidischen Raumes, also — abgesehen von den Geraden — solche Raumkurven, deren sämtliche Tangenten gegen eine als waagrecht angesehene Grundebene unter einem festen Winkel $\omega = \text{const}$ geneigt sind. Wegen ihrer mannigfachen differentialgeometrischen Eigenschaften haben sie stets besonderes Interesse gefunden. So ist jede Böschungslinie Geodätische auf dem durch sie legbaren lotrechten Zylinder und besitzt daher durchwegs horizontale Hauptnormalen. Ferner ist längs einer Böschungslinie das Verhältnis von Krümmung zu Torsion konstant, so daß sie auch als „verallgemeinerte Schraublinie“ angesprochen wird.

Die Ermittlung der auf einer vorgelegten Fläche verlaufenden Böschungslinien mit vorgeschriebenem Steigungswinkel ω führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Bemerkenswerte Beispiele liefern insbesondere die von *Flächen 2. Ordnung* getragenen Kurven konstanter Steigung [7]. Speziell unter den auf einer Drehquadratik mit lotrechter Achse ziehbaren Böschungslinien finden sich auch *algebraische Kurven*; die niedrigste Ordnung ist dabei sechs. Von den algebraischen Böschungslinien niedrigerer Ordnung weiß man nicht allzuviel. J. Kraus hat gelegentlich die *kubischen Schraublinien* näher betrachtet [2].

Die vorliegende Untersuchung geht nochmals, jedoch von anderem Gesichtspunkt, auf diese Kurven ein, hat aber das Hauptziel, auch die *Böschungslinien 4. Ordnung* aufzufinden.

Vom projektiven Standpunkt aus ist eine Böschungslinie als eine Raumkurve aufzufassen, deren Tangenten einen gewissen, durch den Steigungswinkel ω gekennzeichneten „*Böschungsfernkreis*“ c treffen. Zur Beantwortung der gestellten Frage nach allen Böschungslinien 3. und 4. Ordnung ist mithin der folgende Leitgedanke zielführend: Man geht aus von einer passend normierten Raumkurve k' dritter bzw. vierter Ordnung und stellt fest, ob ihre Tangentenfläche einen *Kegelschnitt* c' enthält; ist ein solcher vorhanden, so braucht man denselben bloß durch eine geeignete *Kollineation* in einen Böschungsfernkreis c überzuführen, wodurch die Ausgangskurve k' in eine Böschungslinie k gleicher Ordnung verwandelt wird.

Hierbei genügt es grundsätzlich, sich auf Böschungslinien mit dem Steigungswinkel $\omega = 45^\circ$ zu beschränken, weil sich aus diesen alle übrigen durch eine einfache Affinität ableiten lassen, welche die Höhenkoten mit einem konstanten Faktor multipliziert. Die Untersuchungen sollen ferner ausdrücklich nur auf reelle Böschungslinien eingehen. Unter diesen Einschränkungen zeigt es sich, daß es — von Maßstabsänderungen und kongruenten Verlagerungen abgesehen — bloß eine einzige kubische Böschungslinie gibt, während bei den Böschungslinien 4. Ordnung zunächst zwischen solchen I. Art und solchen II. Art zu unterscheiden ist; von ersteren existieren zwei Typen mit je ∞^1 gestaltlich verschiedenen Formen (gespitzte Quartiken mit eigentlicher bzw. uneigentlicher Spitze), von letzteren liegt nur ein Typ mit ∞^2 untereinander affinen Vertretern vor.

2. Böschungskubiken

Da alle Raumkurven 3. Ordnung untereinander kollinear sind, kann der Ausgang von einer beliebigen unter ihnen genommen werden, etwa von der in homogenen kartesischen Koordinaten durch

$$x_0' = 1, \quad x_1' = t, \quad x_2' = \frac{1}{2}t^2, \quad x_3' = \frac{1}{3}t^3 \quad (2.1)$$

dargestellten *kubischen Parabel* k' . Die von den Tangenten einer Kubik k'

gebildete Torse Γ' ist bekanntlich von 4. Ordnung und hat daher mit jeder Tangentialebene neben der doppelt zu zählenden Berührungserzeugenden noch einen *Kegelschnitt* c' gemein. Derselbe verläuft zwar in einer Schmiegeebene der Kubik, oskuliert dieselbe jedoch nicht, sondern berührt sie bloß; nach einem Satz von E. Beltrami verhalten sich an der Berührungsstelle die Krümmungen von k' und c' wie 4:3, und dieses Verhältnis bleibt als „Mehrmekische Invariante“ bei allen projektiven Transformationen un geändert.

Jede Kollineation, die einen solchen Kegelschnitt c' in einen Böschungsfernkreis c überführt, verwandelt die Kubik k' in eine Böschungslinie k 3. Ordnung. Die Böschungskubik k besitzt die Fernebene zur Schmiegeebene, ist also sicher eine *kubische Parabel*. Bezeichne C den Fernpunkt von k , A den C auf c gegenüberliegenden Punkt, B den (der waagrechteten Grundebene angehörenden) Pol der Sehne CA bezüglich c , und schließlich O jenen Punkt von c , dessen Tangente durch A geht. In $OABC$ hat man dann das mit den Kurvenpunkten O und C verbundene *Schmiegetetraeder* der Kubik k vor sich, das durch die zugehörigen Tangenten OA bzw. CB und die Schmiegeebenen OAB bzw. CBA bestimmt ist. Die involutorische Achsenkollineation mit den Achsen OB und AC führt die Kubik k in sich über, was aus der leicht einzusehenden Invarianz des Projektionskegels 2. Ordnung aus O und des parabolischen Projektionszylinders aus C folgt. Bei dieser Achsenkollineation handelt es sich wegen $OB \perp OAC$ um die *orthogonale axiale Spiegelung* bezüglich der Hauptnormale OB im „Scheitel“ O . Kubische Schraublinien sind mithin durch die Existenz einer orthogonalen axialen Symmetrie ausgezeichnet, die bei kubischen Parabeln im allgemeinen nicht vorhanden ist; diese Eigenschaft ist allerdings noch nicht kennzeichnend.

Da die ∞^1 verfügbaren Kegelschnitte der Tangentenfläche einer Raumkurve 3. Ordnung projektiv gleichberechtigt sind — die Kubik ist ja Bahnkurve von eingliedrigten Kollineationsgruppen, also „*W-Kurve*“ —, ist es im vorliegenden Fall statthaft, von der Tangentenfläche Γ' der kubischen Parabel k' (2.1) bloß den *Fernkegelschnitt* c'

$$y_0' = \dot{x}_0' = 0, \quad y_1' = \dot{x}_1' = 1, \quad y_2' = \dot{x}_2' = t, \quad y_3' = \dot{x}_3' = t^2 \quad (2.2)$$

zu betrachten. Die Transformation von k' in eine Böschungskubik k mit

der vorgesehenen Steigung $\operatorname{tg} \omega = 1$ kann dann bereits durch eine Affinität vollzogen werden, welche das Koordinaten-Schmiegtraeder $O' (1:0:0:0)$, $A' (0:1:0:0)$, $B' (0:0:1:0)$, $C' (0:0:0:1)$ (2.3) in das Schmiegtraeder

$$O (1:0:0:0), A (0:1:0:1), B (0:0:1:0), C (0:—:1:0:1) \quad (2.4)$$

überführt. Diese Affinität ist ansetzbar durch

$$x_0 = x_0', \quad \alpha x_1 = x_1' - x_3', \quad \beta x_2 = x_2', \quad \gamma x_3 = x_1' + x_3', \quad (2.5)$$

wobei die Koeffizienten so abzustimmen sind, daß der Kegelschnitt c' (2.2) oder

$$y_1' y_3' = y_2'^2 \quad (2.6)$$

in den Böschungsfernkreis c

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 \quad (2.7)$$

übergeht. Die entsprechenden Bedingungen lauten auf Grund eines Koeffizientenvergleichs

$$\alpha^2 = \gamma^2 = 4 \beta^2, \quad (2.8)$$

die unter Verzicht auf Maßstabsfragen und die Unterscheidung von gegensinnig-kongruenten Formen durch

$$\alpha = \gamma = 1, \quad \beta = 1/2 \quad (2.9)$$

erfüllt werden mögen. Als einzigen Repräsentanten der unter 45° ansteigenden Böschungskubiken erhält man so — in grundsätzlicher Übereinstimmung mit J. Krames [2] — die *kubische Parabel* k :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = t - \frac{t^3}{3}, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = t + \frac{t^3}{3}. \quad (2.10)$$

Das Aussehen dieser Böschungskubik zeigt Abb. 1. Nach Übergang zu inhomogenen kartesischen Koordinaten $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ und $z = x_3/x_0$ werden Grund- bzw. Aufriß der Kubik durch

$$x^2 = y \left(\frac{y}{3} - 1 \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad 12 (z - x)^2 = (z + x)^3 \quad (2.11)$$

beschrieben. Der Grundriß ist die bekannte *Tschirnhausen-Kubik* [6, S. 54 ff.], der Aufriß eine *ebene kubische Parabel*.

Die *Tangentenfläche* Γ von k ist eine durch

$$x = t - \frac{t^3}{3} - (1 - t^2)u, \quad y = t^2 - 2tu, \quad z = t + \frac{t^3}{3} - (1 + t^2)u \quad (2.12)$$

darstellbare Böschungstorse 4. Ordnung und 3. Klasse. Ihre in der Grundebene $z = 0$ verlaufende *Basis Spur* h hat die Parameterdarstellung

$$x = \frac{4t^3}{3(t^2 + 1)}, \quad y = \frac{t^2(t^2 - 3)}{3(t^2 + 1)} \quad (2.13)$$

und ist ein (Laguerrescher) *Hyperzykel* der Familie VI nach W. Blaschke [1], wie aus folgender Überlegung hervorgeht: Da die Torse Γ unter 45° ansteigt, ist ihre Basis Spur h Bestandteil des *zyklographischen Bildes* jeder krummen Flächenkurve [4, S. 267 ff.]. Wählt man hierfür insbesondere eine ihrer ∞^1 als Tangentialschnitte auftretenden *Parabeln* l , etwa die in der Scheitelschmiegeebene $x = z$ verlaufende Parabel l_0 ($u = t/3$), so folgt daraus die Richtigkeit der Behauptung. Die Basis Spur h ist — wie auch alle übrigen Schichtenlinien $z = \text{const}$ der Böschungstorse Γ — eine Fadenevolvente der Gratlinie k und hat daher den Grundriß von k , also die oben genannte Tschirnhausenkubik, zur Evolute (Abb. 1).

Da jede der ∞^1 Flächenparabeln l in einer 45° -Ebene ε verläuft, so ist ihr zyklographisches Bild h noch durch die Spur e von ε zu ergänzen. Die durch einen Punkt P von l gehende Fallinie von ε und die Erzeugende von Γ bilden mit l gleiche Winkel, die auch im Grundriß gleich erscheinen. Hieraus fließt eine bemerkenswerte *optische Deutung*: Alle normal zu e einfallenden Lichtstrahlen werden am Grundriß der Parabel l so reflektiert, daß sie nachher den Grundriß von k einhüllen (Abb. 1). Die Tschirnhausenkubik tritt also als *Reflexionskaustik einer Parabel* für parallele Lichtstrahlen beliebiger Richtung auf [6, S. 400], wobei nur die Achsenrichtung auszuschließen ist. Die vorliegende räumliche Deutung dieses merkwürdigen Sachverhalts — vgl. [8] — dürfte neu sein.

Alle übrigen Spiegelkurven, die eine Tschirnhausen-Kubik als Reflexionskaustik für Parallelbeleuchtung besitzen, findet man im Grund-

riß von Schnitten der Torse Γ mit beliebigen 45° -Ebenen; es werden im allgemeinen dreispitzige Kurven 4. Ordnung sein. Wählt man insbesondere Ebenen $x + z = 2d$, so erhält man über $u = t - d$ gespitzte Kurven 3. Ordnung, darunter für $d = 0$ eine Neilsche (semikubische)

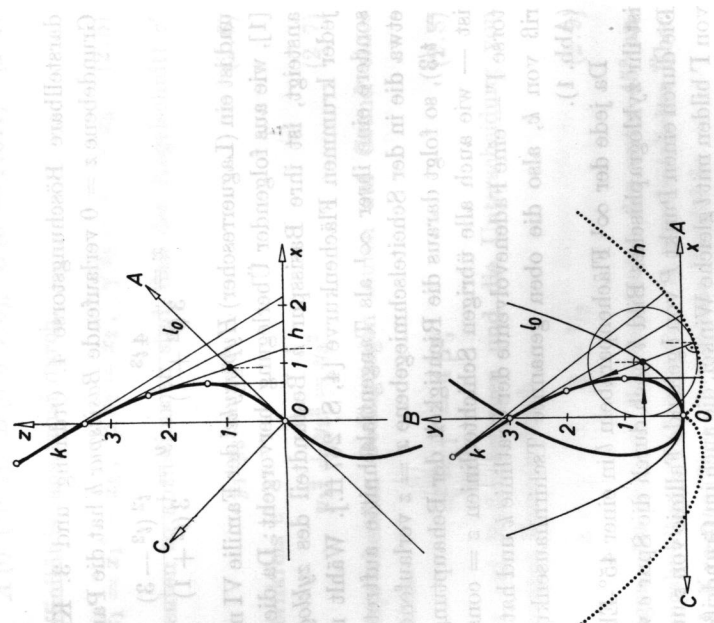


Abb. 1. Böschungskubik.

Parabel $9x^2 + 4y^3 = 0$ [6, S. 390]. — Schneidet man Γ hingegen mit unter 45° ansteigenden Drehkegeln, so erhält man im Grundriß Spiegelkurven, die eine Tschirnhausen-Kubik als Reflexionskaustik für Zentralbeleuchtung besitzen. Sie werden im allgemeinen von 6. Ordnung sein, können sich aber bis auf die Ordnung 3 reduzieren, wenn nämlich die Kegelspitze in einem Punkt der Böschungskubik angenommen wird.

3. Böschungsquartiken

Bei den Raumkurven 4. Ordnung hat man zunächst zwischen solchen I. Art und jenen II. Art zu unterscheiden.

Erstere entstehen als Schnitt zweier Flächen 2. Ordnung und gehören daher insgesamt ∞^1 solchen Flächen an, die ein Büschel bilden. Im Falle von irreduziblen Schnittkurven 4. Ordnung — und nur dieser Fall ist hier von Interesse — besitzen die genannten Flächen ein eindeutig bestimmtes gemeinsames *Poltetraeder*. Aus dessen Ecken wird die Kurve durch Kegel 2. Ordnung projiziert. Je nach der Anordnung dieser Ecken sind nun drei Unterfälle zu betrachten [5].

a) *Alle vier Ecken getrennt*. Die Schnittquartik ist vom Geschlecht 1 (elliptisch) und hat den Rang 8 (Ordnung der Tangentenfläche). Die ebenen Schnitte der Tangentenfläche sind demnach im allgemeinen elliptische Kurven der Ordnung 8, die unter Abspaltung von Geraden äußerstenfalls auf 5 sinken kann. Eine Ausnahme bilden bloß die Schnitte mit den vier Ebenen des Poltetraeders; es handelt sich hierbei um die Doppelkurven der Tangentenfläche, die sich als rationale Kurven 4. Ordnung erweisen.

b) *Zwei Ecken vereinigt*. Die Schnittquartik weist einen Doppelpunkt mit getrennten Tangenten auf und ist daher rational und vom Rang 6. Die ebenen Schnitte der Tangentenfläche sind im allgemeinen rationale Kurven der Ordnung 6, die unter Abspaltung von Geraden bis auf 3 sinken kann. Auch die beiden vorhandenen Doppelkurven sind von 3. Ordnung.

c) *Drei Ecken vereinigt*. Die Schnittquartik weist eine Spitze auf und ist demnach rational und vom Rang 5. Die ebenen Schnitte der Tangentenfläche sind im allgemeinen rationale Kurven der Ordnung 5, die sich unter Abspaltung von Geraden bis auf 2 reduzieren kann. Auch die einzige Doppelkurve ist von 2. Ordnung. Nur dieser Unterfall kommt also für die Herleitung von Böschungskurven 4. Ordnung I. Art in Betracht; die nähere Ausführung ist Gegenstand der Abschnitte 4 und 5.

Die Raumkurven 4. Ordnung II. Art besitzen jeweils nur eine einzige Trägerfläche 2. Ordnung; dieselbe wird von den Trisekanten der Quartik gebildet. Die zweite Erzeugendenschar dieser *Trisekantenquadratik* besteht aus einfachen Treffgeraden der Kurve, woraus zu er-

kennen ist, daß dieselbe rational und vom Rang 6 ist. Die ebenen Schnitte ihrer Tangentenfläche sind mithin im allgemeinen rationale Kurven der Ordnung 6, die unter Abspaltung von Geraden äußerstenfalls auf 3 sinken kann. Die Doppelkurve der Tangentenfläche ist für gewöhnlich eine rationale Raumkurve 6. Ordnung, doch kann dieselbe in einer *dreifachen Kegelschnitt* ausarten, und zwar dann und nur dann, wenn die vier stets vorhandenen Henkelpunkte der Kurve (Punkte mit stationären Schmiegenden) in einer Ebene liegen, ohne zusammenzuzurücken [5]. Diese sogenannte „äquianharmonische“ Kurve 4. Ordnung II. Art kommt demnach ebenfalls für die Gewinnung von Böschungsquartiken in Betracht (Abschnitt 6).

Ergänzend sei noch folgende Bemerkung angefügt: Hat man eine Böschungslinie k mit dem Böschungsfernkreis c gefunden, so können durch Affinitäten, welche c in sich überführen, aus k weitere Böschungslinien k gleicher Art abgeleitet werden. Im Sinne einer auf den reellen Maßkegelschnitt c gegründeten *pseudoeuklidischen Metrik* — „ c -Metrik“ der Zyklographie [4] — sind die genannten Affinitäten als Pseudo-Ähnlichkeiten anzuspochen. Während die Anwendung dieses Prinzips auf die Böschungskubik k (2.10) auf Grund von Abschnitt 2 bloß euklidisch ähnliche Exemplare liefern kann, werden sich bei den Böschungsquartiken aus den noch zu bestimmenden Normalformen (4.12), (5.8) und (6.22) weitere pseudo-ähnliche, jedoch euklidisch nicht ähnliche Formen gewinnen lassen. Unter Verzicht auf Maßstabsänderungen und Spiegelungen wird man dabei das Auslangen mit gewissen *Pseudodrehungen* [4, S. 143] finden.

4. Böschungslinien 4. Ordnung I. Art mit eigentlicher Spitze

Eine *gespitzte Raumquartik* k' wird aus ihrer Spitze C' durch einen Kegel 2. Grades Φ' projiziert; ferner verläuft sie noch auf einem zweiten Kegel 2. Ordnung Ψ'' , dessen Scheitel A' ihr nicht angehört. Jene Erzeugende von Ψ'' , die Φ' berührt, ist die Tangente im (einzigen) Henkelpunkt O' von k' . Der Schnittpunkt der zugehörigen (stationären) Schmiegenebene mit der Spitzentangente sei mit B' bezeichnet. Macht man das Tetraeder $O'A'B'C'$ zum Koordinatentetraeder und verwendet man

einen beliebigen Kurvenpunkt als Einheitspunkt, so kann die Kurve k' beschrieben werden durch

$$x_0' = 1, \quad x_1' = t, \quad x_2' = t^2, \quad x_3' = t^4. \quad (4.1)$$

Zur Fixierung der Vorstellung mögen diese Koordinaten als homogene kartesische Koordinaten aufgefaßt werden. Die Flächen Φ' ($x_0' x_2' = x_1'^2$) und Ψ'' ($x_0' x_3' = x_2'^2$) sind dann parabolische Zylinder, welche Grund- und Aufriß der Quartik k' bestimmen.

Wie man sieht, trägt die Quartik k' die *Affinitäten*

$$x_0'' = x_0', \quad x_1'' = \lambda x_1', \quad x_2'' = \lambda^2 x_2', \quad x_3'' = \lambda^4 x_3' \quad (4.2)$$

mit beliebigem λ ; der zum Parameterwert t gehörige Kurvenpunkt wird jeweils in den zu λt gehörigen transportiert. Die ∞^1 Affinitäten (4.2) bilden eine eingliedrige stetige Gruppe, so daß die gespitzte Quartik (4.1) als *W-Kurve* anzusehen ist, weil sie die Bahn etwa des Einheitspunktes unter dem Einfluß der Gruppe darstellt.

Die *Tangentenfläche* Γ' von k' , in Parameterform beschrieben durch

$$y_0' = 1, \quad y_1' = t - u, \quad y_2' = t^2 - 2tu, \quad y_3' = t^4 - 4t^3u, \quad (4.3)$$

wird von der stationären Schmiegenebene $y_3' = 0$ nach dem durch $u = t/4$ gekennzeichneten *Kegelschnitt*

$$y_0' = 1, \quad y_1' = \frac{3t}{4}, \quad y_2' = \frac{t^2}{2}, \quad y_3' = 0 \quad (4.4)$$

geschnitten, wie es in Abschnitt 3 c angekündigt worden ist. Es handelt sich um eine *Parabel* c' mit der Gleichung

$$9y_0' y_2' = 8y_1'^2, \quad (4.5)$$

die ebenfalls eine Bahnkurve der Affinitätsgruppe (4.2) ist und nunmehr durch eine geeignete Raumkollineation in den Böschungsfernkreis c (2.7) zu transformieren ist. Die in Abschnitt 2 erwähnte Mehrkesche Invariante trägt übrigens jetzt, weil O' ein Henkelpunkt ist, nicht $4/3$, sondern $9/8$, wie durch (4.5) bestätigt wird.

Unter der vorläufigen Einschränkung, die c' angehörenden Punkte O' und B' in zwei Gegenpunkte von c überzuführen, kann gefordert werden, daß die Ecken

$$O' (1:0:0:0), A' (0:1:0:0), B' (0:0:1:0), C' (0:0:0:1) \quad (4.6)$$

des Fundamentaltetraeders den Punkten

$$O (0:0:-1:1), A (0:1:0:0), B (0:0:1:1), C (1:0:0:0) \quad (4.7)$$

zugeordnet werden. Die gewünschte *Kollineation* kann dann angesetzt werden durch

$$\rho_0 x'_0 = -x_2 + x_3, \quad \rho_1 x'_1 = x_1, \quad \rho_2 x'_2 = x_2 + x_3, \quad \rho_3 x'_3 = x_0. \quad (4.8)$$

Die Koeffizienten ρ_i sind noch so abzustimmen, daß die Parabel c' (4.4) in den Böschungsfernkreis c (2.7) übergeht. Die entsprechende Bedingung lautet, wie ein Koeffizientenvergleich lehrt,

$$\rho_0 \rho_2 : \rho_1^2 = 9:8, \quad (4.9)$$

und kann etwa durch $\rho_0 = 6, \rho_1 = 8, \rho_2 = 12$ erfüllt werden, wobei unter Verzicht auf Ähnlichkeitsunterschiede noch $\rho_3 = 1$ gesetzt werden mag. Die Wahl anderer ρ -Werte würde nichts wesentlich neues liefern, weil die Multiplikation der vorgeschlagenen Werte mit $1, \lambda, \lambda^2$ und λ^4 die Bedingung (4.9) nicht stört und gemäß (4.2) nur eine projektive Automorphie der Quartik k' (4.1) bewirkt.

Mit den gewählten ρ -Werten lauten die Umkehrformeln der Kollineation (4.8):

$$x_0 = x'_3, \quad x_1 = 8x'_1, \quad x_2 = 6x'_2 - 3x'_0, \quad x_3 = 6x'_3 + 3x'_0. \quad (4.10)$$

Damit ergibt sich durch Anwendung auf die Kurve k' (4.1) für die *normierte Böschungsquartik* k die Darstellung

$$x_0 = t^4, \quad x_1 = 8t, \quad x_2 = 6t^2 - 3, \quad x_3 = 6t^2 + 3 \quad (4.11)$$

oder, nach Vornahme der Substitution $t^{-1} = v$ und Übergang zu inhomogenen kartesischen Koordinaten:

$$x = 8v^3, \quad y = 6v^2 - 3v^4, \quad z = 6v^2 + 3v^4. \quad (4.12)$$

Diese Quartik k ist symmetrisch bezüglich der y z -Ebene. Sie hat ihre Spitze C im Ursprung, wird von dort durch den *Kegel* 2. *Ordnung* Φ

$$9x^2 + 8(y^2 - z^2) = 0 \quad (4.13)$$

projiziert und verläuft auf dem *parabolischen Zylinder* Ψ

$$(y+z)^2 + 24(y-z) = 0, \quad (4.14)$$

der ihren Aufriß erzeugt (Abb. 2).

Die von den Tangenten der Quartik k gebildete *Böschungstorse* 5. *Ordnung* Γ — kollinear zu Γ' (4.3) — wird dargestellt durch

$$\begin{aligned} x &= 2v(4v^2 - w), & y &= 3v^2(2 - v^2) - w(1 - v^2), \\ z &= 3v^2(2 + v^2) - w(1 + v^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mit Rücksicht auf die Symmetrie bezüglich der y z -Ebene besteht der Schnitt von Γ mit dieser Ebene $x = 0$ aus der Erzeugenden $v = 0$ (Spitzentangente $y = z$ von k) und der durch $w = v^2$ gekennzeichneten *Doppelparabel* d

$$y = v^2(2 + v^2), \quad z = v^2(2 - v^2) \quad \text{oder} \quad (y+z)^2 = 8(y-z). \quad (4.16)$$

Als Verbindungstorse der Kegelschnitte c und d ist Γ von 4. *Klasse*, was auch auf Grund der vorhandenen Gruppe projektiver Automorphismen (4.2) und ihrer Bahnkurven 4. *Ordnung* zu erkennen wäre. Durch zyklographische Abbildung der Flächenparabel d ergibt sich ferner wie in Abschnitt 2, daß die *Schichtenlinien* $z = \text{const}$ der Böschungstorse Γ *Hyperzykel* sind, und zwar solche der Familie V nach Blaschke [1]. Der Grundriß der Gratlinie k ist mithin die Evolute dieser Hyperzykel, insbesondere der Basissspur h ($z = 0$, Abb. 2).

Eine andere einfache Kurve der Torse Γ ist die in der Tangentialebene $y = z$ liegende, durch $w = 3v^2$ gekennzeichnete *Neilsche Parabel* l

$$x = 2v^3, \quad y = z = 3v^2. \quad (4.17)$$

Ihr Grundriß $27x^2 = 4y^3$, ebenfalls eine Neilsche Parabel, erzeugt als Spiegelkurve für Parallelbeleuchtung in Richtung der Spitzentangente den Grundriß der Böschungsquartik k als Reflexionskaustik (Abb. 2).

Um endlich von der Normalform k (4.12) der Böschungsquartik zur *allgemeinen Form* zu gelangen, hat man gemäß der Schlußbemerkung in Abschnitt 3 eine automorphe Affinität des Böschungsfernkreises c auszuüben, welche die vorläufig geforderte Gegenpunktstlage der Fundamentaltunkte O und B auf c aufhebt. Ohne Beschränkung der

Allgemeinheit kann man sich dabei der *Pseudo-Drehungen um die y-Achse* bedienen, beschrieben durch

$$\bar{x} = \alpha x + \beta z, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = \beta x + \alpha z \quad \text{mit} \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1. \quad (4.18)$$

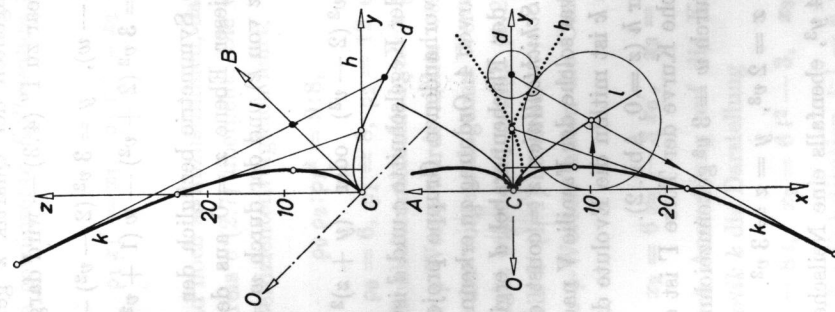


Abb. 2. Böschungsquartik I. Art mit eigentlicher Spitze.

Damit erhält man für die *allgemeine Böschungsquartik t mit eigentlicher Spitze* die Parametendarstellung

$$\bar{x} = 6\beta v^2 + 8\alpha v^3 + 3\beta v^4, \quad \bar{y} = 6v^2 - 3v^4, \quad \bar{z} = 6\alpha v^2 + 8\beta v^3 + 3\alpha v^4. \quad (4.19)$$

Die orthogonale Symmetrie bezüglich der Ebene $x = 0$ geht dabei verloren, weil sie in die schiefe Symmetrie bezüglich der Ebene $\alpha x - \beta z = 0$ in Richtung der Pseudonormalen $x:y:z = \alpha:0:\beta$ verwandelt wird.

5. Böschungslinien 4. Ordnung I. Art mit uneigentlicher Spitze

Der Ausgang wird wieder von der gespitzen Raumquartik k' (4.1) und ihrer Tangentenfläche Γ' (4.3) genommen. Statt des in der stationären Schmiegeebene $y_3' = 0$ verlaufenden Flächenkegelschnittes (4.4) oder (4.5) wird jetzt aber der Ebene $y_1' = 0$ angehörende, durch $u = t$ gekennzeichnete *Doppelkegelschnitt*

$$y_0' = 1, \quad y_1' = 0, \quad y_2' = -t^2, \quad y_3' = -3t^4 \quad (5.1)$$

herangezogen. Bei kartesischer Deutung der Koordinaten handelt es sich um eine *Parabel c'*,

$$y_0' y_3' + 3 y_2'^2 = 0, \quad y_1' = 0, \quad (5.2)$$

die ebenfalls eine Bahnkurve der Affinitätsgruppe (4.2) ist und nun durch eine geeignete Raumkollineation in den Böschungsfernkreis c (2.7) zu transformieren ist.

Unter der vorläufigen Einschränkung, die c' angehörenden Fundamentalpunkte O' (Henkelpunkt $t = 0$) und C' (Spitze $t = \infty$) in zwei Gegenpunkte von c überzuführen, kann verlangt werden, daß die Ecken des Fundamentaltetraeders $O'A'B'C'$ (4.6) den Punkten

$$O(0:0:-1:1), \quad A(1:0:0:0), \quad B(0:1:0:0), \quad C(0:0:1:1) \quad (5.3)$$

zugeordnet werden. Die gewünschte *Kollineation* kann dann angesetzt werden durch

$$\rho_0 x_0' = x_2 - x_3, \quad \rho_1 x_1' = x_0, \quad \rho_2 x_2' = x_1, \quad \rho_3 x_3' = x_2 + x_3, \quad (5.4)$$

und die Koeffizienten ρ_i sind so abzustimmen, daß die Parabel c' (5.2) dem Böschungsfernkreis c (2.7) entspricht. Die betreffende Bedingung lautet

$$\rho_0 \rho_3 : \rho_2^2 = 1:3 \quad (5.5)$$

und kann etwa durch $\rho_0 = 2, \quad \rho_2 = \rho_3 = 6$ erfüllt werden, was im Hin-

blick auf die projektiven Automorphismen (4.2) keine Restriktion bedeutet; zur Normierung des Maßstabs mag noch $\rho_1 = 1$ gesetzt werden.

Mittels der zu (5.4) gehörigen Umkehrformeln

$$x_0 = x_1', \quad x_1 = 6x_2', \quad x_2 = x_0' + 3x_3', \quad x_3 = -x_0' + 3x_3' \quad (5.6)$$

erhält man dann für die aus der Kurve k' (4.1) hervorgehende *normierte Böschungsquartik* k die Darstellung

$$x_0 = t, \quad x_1 = 6t^2, \quad x_2 = 3t^4 + 1, \quad x_3 = 3t^4 - 1 \quad (5.7)$$

oder, nach Übergang zu inhomogenen Koordinaten:

$$x = 6t, \quad y = 3t^3 + t^{-1}, \quad z = 3t^3 - t^{-1}. \quad (5.8)$$

Den in Abschnitt 4 erwähnten parabolischen Trägerzylindern $\Phi' (x_0' x_2' = x_1'^2)$ und $\Psi' (x_0' x_3' = x_2'^2)$ der Ausgangsquartik k' entsprechen als Trägerquadriken von k der *hyperbolische Zylinder* Φ

$$x^2 = 3(y - z) = 12, \quad (5.9)$$

der die Quartik aus ihrer Fernspitze C projiziert, sowie der *Ursprungskegel 2. Ordnung* Ψ

$$x^2 = 3(y^2 - z^2), \quad (5.10)$$

dessen Scheitel $A(0, 0, 0)$ Symmetriezentrum der Quartik k ist.

Die von den Tangenten der Quartik k gebildete *Böschungstorse 5. Ordnung und 4. Klasse* Γ wird beschrieben durch

$$x = 6(t - u), \quad y = 3t^3 + \frac{1}{t} - \left(9t^2 - \frac{1}{t^2}\right)u, \quad z = 3t^3 - \frac{1}{t} - \left(9t^2 + \frac{1}{t^2}\right)u. \quad (5.11)$$

Sie enthält neben dem doppelt zählenden Böschungsfernkreis c den einfachen, in der stationären Schmiegeebene $y + z = 0$ verlaufenden und durch $u = t/3$ gekennzeichneten Kegelschnitt in Gestalt der *gleichseitigen Hyperbel* e :

$$x = 4t, \quad y = \frac{4}{3}t = -z. \quad (5.12)$$

Als zyklographische Bilder der Flächenhyperbel e erweisen sich die *Schichtenlinien* $z = \text{const}$ der Böschungstorse Γ (5.11) wieder als

Hyperzykel, und zwar als solche der Familie III nach Blaschke [1]. Der Grundriß der Gratinlinie k ist demnach die Evolute dieser Hyperzykel, darunter der Basis Spur h ($z = 0$, Abb. 3). Auf Grund der bereits wiederholt herangezogenen optischen Interpretation kann der Gratinlinien-

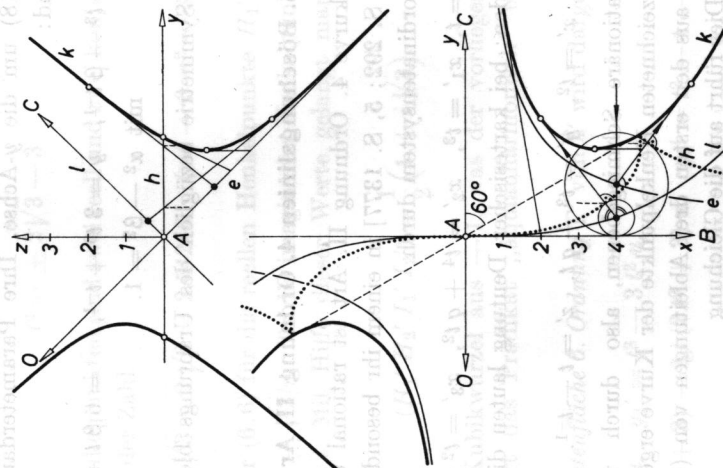


Abb. 3. Böschungsquartik I. Art mit uneigentlicher Spitze.

grundriß auch als Reflexionskaustik der als Grundriß der Flächenkurve e auftretenden gleichseitigen Hyperbel $3xy = 16$ für parallel zur Asymptote y einfallende Lichtstrahlen gedeutet werden (Abb. 3).

Mittels des Tangentialschnittes l der Torse Γ mit der Ebene $y = z$, der durch $u = -t$ gekennzeichnet ist und sich als *ebene kubische Parabel*

$$x = 12t, \quad y = 12t^3 = z \quad (5.13)$$

erweist, kann der Grundriß der Böschungsquartik k auch als Reflexionskaustik der kubischen Parabel $144 y = x^3$ für normal zur Wendetangente x einfallende Lichtstrahlen aufgefaßt werden (Abb. 3).

Die *allgemeine Böschungsquartik mit Fernspitze* ergibt sich schließlich aus der Normalform (5.8) wieder durch Anwendung der Pseudodrehungen (4.18) um die y -Achse. Ihre Parametendarstellung lautet dementsprechend:

$$\bar{x} = 6\alpha t + 3\beta t^3 - \beta t^{-1}, \quad \bar{y} = 3t^3 + t^{-1}, \quad \bar{z} = 6\beta t + 3\alpha t^3 - \alpha t^{-1} \quad (5.14)$$

mit $\alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Die zentrische Symmetrie bezüglich des Ursprungs bleibt hierbei erhalten.

6. Böschungslinien 4. Ordnung II. Art

Die Raumkurve 4. Ordnung II. Art ist rational und kann nach E. Bertini [3, S. 292; 5, S. 1377] in einem ihr besonders angepaßten projektiven Koordinatensystem durch

$$x_0' = t, \quad x_1' = t^3, \quad x_2' = t^4 + q t^2, \quad x_3' = t^2 - 1 \quad (6.1)$$

dargestellt werden; bei kartesischer Deutung lauten die inhomogenen Koordinaten:

$$x' = t^2, \quad y' = t^3 + q t, \quad z' = t - t^{-1}. \quad (6.2)$$

Die durch stationäre Schmiegeebenen, also durch verschwindende Torsion gekennzeichneten Henkelpunkte der Kurve ergeben sich durch Nullsetzen der aus den ersten drei Ableitungen von (6.2) gebildeten Determinante. Dies führt auf die Gleichung

$$t^4 + 6t^2 - q = 0. \quad (6.3)$$

Wie bereits in Abschnitt 3 angekündigt, interessiert hier nur die Sonderform mit *koplanaren Henkelpunkten*. Aus Symmetriegründen muß eine die vier Henkelpunkte enthaltende Ebene durch die x' -Achse gehen, also durch $x_2' + p x_3' = 0$ dargestellt werden. Dies verlangt, daß die Gleichung (6.3) zu

$$t^4 + (p + q)t^2 - p = 0 \quad (6.4)$$

äquivalent ist, was nur für $p = q = 3$ eintritt.

Dementsprechend ist der Ausgang von der durch

$$x_0' = t, \quad x_1' = t^3, \quad x_2' = t^4 + 3t^2, \quad x_3' = t^2 - 1 \quad (6.5)$$

beschriebenen Quartik k' zu nehmen. Von ihren vier gemäß (6.3) durch

$$t^2 = \pm 2/\sqrt{3} - 3 \quad (6.6)$$

bestimmten Henkelpunkten sind zwei reell und zwei konjugiert-imaginär. Mit Benützung der Zahl

$$m = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} = 2,54246 \quad (m^4 - 6m^2 - 3 = 0) \quad (6.7)$$

findet man über (6.6) für die reellen Henkelpunkte H_1' , H_2' die Parameterwerte $t = \pm \sqrt{3}/m$, für die imaginären Henkelpunkte I_1' , I_2' hingegen $t = \pm m i$. Mit Hilfe dieser Werte gelangt man zum Doppelverhältnis

$$(H_1' H_2' I_1' I_2') = \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3}), \quad (6.8)$$

also zu einer Kubikwurzel aus -1 , was der vorliegenden speziellen Quartik II. Art das Prädikat „äquianharmonisch“ eintragen hat [3, S. 296].

Die *Tangentenfläche 6. Ordnung* Γ' von k' wird dargestellt durch

$$y_0' = t - u, \quad y_1' = t^3 - 3t^2 u, \quad (6.9)$$

$$y_2' = t^2(t^2 + 3) - 2t(2t^2 + 3)u, \quad y_3' = t^2 - 1 - 2tu.$$

Ihr Schnitt mit der Henkelpunktebene $y_2' + 3y_3' = 0$ wird gekennzeichnet durch

$$u = \frac{t^4 + 6t^2 - 3}{4t(t^2 + 3)} \quad (6.10)$$

und demgemäß beschrieben durch

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' = 3(t^2 + 1)^2 : t^2(t^2 - 3)^2 : 6t(t^2 + 1)(t^2 - 3) : 2t(t^2 + 1)(t^2 - 3) \quad (6.11)$$

oder, nach Vornahme der Substitution

$$v = \frac{3}{3} \cdot \frac{t^2 - 3}{t^2 + 1}, \quad (6.12)$$

durch

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' = 1 : 3 : v^2 : -6 : v : 2. \quad (6.13)$$

Hieraus ist zu erkennen, daß es sich um eine *Parabel c'* handelt, die *dreifach* zu zählen ist, weil zu jedem v -Wert über (6.12) drei t -Werte gehören. In jedem Punkt von c' treffen mithin drei Tangenten der Quartik k' zusammen.

Setzt man in (6.10) $u = 0$, so erhält man jene Punkte der Quartik k' , die dem Tripelkegelschnitt c' angehören; ein Vergleich mit (6.6) lehrt, daß es sich um die vier *Henkelpunkte* von k' handelt. Von den drei in einem solchen Punkt zusammen treffenden Tangenten der Quartik rücken zwei in der Henkeltangente zusammen, während die dritte an einer anderen Stelle berührt, also zu den Triekanten von k' zählt. Diese vier Resttangente gehören mithin einer Erzeugendenschar der *Tri-sekantenquadratik* Φ'

$$(x_1' - x_0') (x_1' + 3 x_0') = x_2' x_3' \quad (6.14)$$

von k' an; daß diese Gleichung durch (6.5) identisch befriedigt wird, ist sofort zu bestätigen. Für spätere Zwecke sei gleich der *Pol* O' (0:0:3:1) der Trägerebene $x_2' + 3 x_3' = 0$ von c' bezüglich Φ' notiert.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun die kollineare Transformation der Ausgangsartik k' (6.5) in eine Böschungslinie k in Angriff genommen werden. Zu diesem Zweck ist die Tripelparabel c' (6.13) in den Böschungsfernkreis c (2.7) zu verwandeln. Unter vorläufiger Einschränkung sollen dabei die beiden imaginären Henkelpunkte I_1', I_2' den absoluten Punkten I_1, I_2 von c zugewiesen werden. Dem Scheitel A' ($v = 0$) und dem Fernpunkt B' ($v = \infty$) der Parabel c' werden wegen ihrer harmonischen Lage zu I_1' und I_2' zwei Gegenpunkte A und B von c entsprechen, die noch beliebig gewählt werden können. Dem Pol C' von $A'B'$ bezüglich c' ist der Pol C von AB bezüglich c zuzuordnen, und schließlich kann man noch verlangen, daß der dem vorhin erwähnten Fundamentalpunkt O' entsprechende Punkt O als neuer Ursprung dienen soll. Demgemäß mögen die Punkte

$$A' (1:0:0:0), \quad B' (0:1:0:0), \quad C' (0:0:-3:1), \quad O' (0:0:3:1) \quad (6.15)$$

den Punkten

$$A (0:0:-1:1), \quad B (0:0:1:1), \quad C (0:1:0:0), \quad O (1:0:0:0) \quad (6.16)$$

zugeordnet werden. Eine *Kollineation*, die diese Forderungen erfüllt, hat die Bauart

$$\begin{aligned} x_0' &= \lambda (x_2 - x_3), & x_1' &= \mu (x_2 + x_3), & x_2' &= 3 (\rho x_0 + \sigma x_1), \\ x_3' &= \rho x_0 - \sigma x_1. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die Koeffizienten sind noch so abzustimmen, daß die zu $t = \pm m i$ gehörigen Henkelpunkte

$$I'_{1,2} (\sqrt{3} : -m^2 \sqrt{3} : \mp 6 m i : \pm 2 m i) \quad (6.18)$$

den absoluten Punkten $I_{1,2} (0 : \pm i : 1 : 0)$ entsprechen. Die betreffende Bedingung lautet

$$\lambda : \mu : \sigma = -\sqrt{3} : m^2 \sqrt{3} : 2 m, \quad (6.19)$$

während ρ frei wählbar bleibt, so daß also etwa $\rho = \sigma$ gesetzt werden kann. Passende Transformationsgleichungen und ihre Umkehrungen lauten dann

$$\begin{aligned} 4 \sqrt{3} m^2 x_0' &= -x_2 + x_3, & x_0 &= m (x_2' + 3 x_3'), \\ 4 \sqrt{3} & x_1' = x_2 + x_3, & x_1 &= m (x_2' - 3 x_3'), \\ 2 m x_2' &= x_0 + x_1, & x_2 &= 2 \sqrt{3} (x_1' - m^2 x_0'), \\ 6 m x_3' &= x_0 - x_1, & x_3 &= 2 \sqrt{3} (x_1' + m^2 x_0'). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Parabel c' (6.13) tatsächlich in den Böschungsfernkreis c (2.7) übergeht.

Die Anwendung der Transformation (6.20) auf die Ausgangskurve k' (6.5) liefert dann als *Normalform der Böschungskurte II*. Art die Kurve k :

$$\begin{aligned} x_0 &= m (t^4 + 6 t^2 - 3), & x_1 &= m (t^4 + 3), \\ x_2 &= 2 \sqrt{3} t (t^2 - m^2), & x_3 &= 2 \sqrt{3} t (t^2 + m^2). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die inhomogene Darstellung lautet:

$$x = \frac{t^4 + 3}{t^4 + 6t^2 - 3}, \quad y = \frac{2\sqrt{3}t}{m} \cdot \frac{t^2 - m^2}{t^4 + 6t^2 - 3}, \quad z = \frac{2\sqrt{3}mt}{m^2t^2 - 3}. \quad (6.22)$$

Das aus (6.14) ableitbare *Trisekantenhyperboloid* Φ

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz = 1 \quad (6.23)$$

wird von den Schichtenebenen $z = \text{const}$ nach *Kreisen* geschnitten, wie es sein muß, da Φ mit k die absoluten Kreispunkte I_1 und I_2 enthält. Der Vollständigkeit halber seien auch noch die *reellen Henkelpunkte* H_1, H_2 lokalisiert, die sich für $t = \pm \sqrt{3}/m$ ergeben: Sie liegen in den Richtungen $x:y:z = \pm 1:-\sqrt{3}:2$ im Unendlichen. Die zugehörigen Asymptoten schließen also im Grundriß — in Übereinstimmung mit (6.8) — mit der y -Achse Winkel von $\pm 30^\circ$ ein; sie enthalten nebenbei die leicht angebbaren Punkte $(0, \mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2)$. Den Verlauf der Böschungsquartik k zeigt Abb. 4.

Die Schichtenebenen $z = \text{const}$ schneiden aus der Quartik k (6.22) neben den festen absoluten Punkten I_1 und I_2 die veränderlichen Punktepaare einer durch $t\bar{t} = -3/m^2$ gekennzeichneten *Involution* aus. Zur Ermittlung der ein solches Punktepaar in der Höhe z verbindenden *Schne* suche man unter Zuhilfenahme von (6.21) durch Bildung der Linearkombinationen $x_i + \bar{x}_i$ und $(x_i - \bar{x}_i)/(t - \bar{t})$ die homogenen Koordinaten bequemerer Sehnenpunkte auf, die sich mittels $t + \bar{t} = 2\sqrt{3}/mz$ und weiterer symmetrischer Funktionen durch z ausdrücken lassen. Nach längerer Rechnung findet man:

$$zx - (2z^2 + 1)y - \sqrt{3}z^3 = 0. \quad (6.24)$$

Diese Gleichung besagt, daß die ∞^1 waagrechten Sehnen von k ein *kubisches Konoid* Ψ' bilden. Dasselbe kann zur darstellend-geometrischen Konstruktion der Böschungsquartik k dienen, die als Teilschnitt von Ψ' mit dem Trisekantenhyperboloid Φ (6.23) auftritt. Man hat hierzu jeweils nur den in beliebig gewählter Höhe z verlaufenden, leicht angebbaren Schichtenkreis q von Φ mit der in gleicher Höhe befindlichen Erzeugenden e von Ψ' zu schneiden (Abb. 4). Zur Festlegung der letzteren

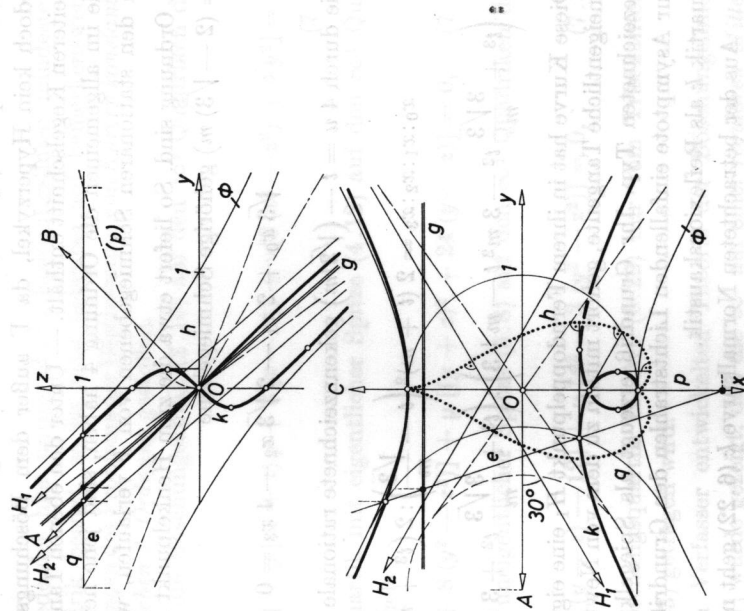


Abb. 4. Böschungsquartik II. Art.

wird man die (einfache) Leitgerade $g \dots 2x + \sqrt{3}z = 2y + \sqrt{3}z = 0$ und die Leitparabel $p \dots y = 0, x = \sqrt{3}z^2$ heranziehen.

Die zur Gratlinie k (6.21) gehörige *Böschungstorse* Γ wird entsprechend (6.9) beschrieben durch

$$\begin{aligned} x_0 &= m[t^4 + 6t^2 - 3] - 4t(t^2 + 3)u, \\ x_1 &= m[t^4 + 3 - 4t^3u], \\ x_2 &= 2\sqrt{3}[(t^2 - m^2)t - (3t^2 - m^2)u], \\ x_3 &= 2\sqrt{3}[(t^2 + m^2)t - (3t^2 + m^2)u]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Ihre Basispur h ($x_3 = 0$) ist eine herzförmige Kurve 6. Ordnung (Abb. 4), jedoch kein Hyperzykel, da Γ außer dem Böschungsfernkreis keinen weiteren Kegelschnitt enthält. — Unter den ebenen Tangentialschnitten, die im allgemeinen die Ordnung 4 haben, sind jene hervorzuheben, die in den stationären Schmiegenebenen von k verlaufen, weil sie bloß von 3. Ordnung sind. So liefert etwa die zum Henkelpunkt H_1 ($t = \sqrt[3]{3}/m = (2 - \sqrt[3]{3})m$) gehörige Schmiegenebene

$$\sqrt[3]{3} x_0 + 2 x_1 - 2 \sqrt[3]{3} x_2 - 4 x_3 = 0 \quad (6.26)$$

die durch $4 u = t - (\sqrt[3]{3}/m)$ gekennzeichnete rationale *Flächenkubik*

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 2(t + m)^2 \left(t - \frac{\sqrt[3]{3}}{m} \right) : 2(t^3 + m\sqrt[3]{3}) : \left(t^3 + \frac{3\sqrt[3]{3}}{m} t^2 - 3m^2 t - m\sqrt[3]{3} \right) : \left(t^3 + \frac{3\sqrt[3]{3}}{m} t^2 + 3m^2 t + m\sqrt[3]{3} \right). \quad (6.27)$$

Diese Kurve hat in ihrem Ferndoppelpunkt H_1 eine eigentliche und eine uneigentliche Tangente, gehört mithin zu dem von Newton als „Tridentens“ bezeichneten Typ. Ihr Grundriß erzeugt als Spiegelkurve bei parallel zur Asymptote einfallenden Lichtstrahlen den Grundriß der Böschungskurve k als Reflexionskaustik.

Aus der betrachteten Normalkurve k (6.22) geht nun die *allgemeine Böschungslinie 3. Ordnung II. Art* durch Anwendung von Pseudodrehungen hervor, wobei man sich auf horizontale Rotationsachsen durch den Ursprung O beschränken darf, weil durch solche Drehungen die Henkelpunkte H_1, H_2, I_1, I_2 in jede der Bedingung (6.8) genügende Anordnung gebracht werden können. Von der Wiedergabe des Ergebnisses solcher Pseudodrehungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (\gamma^2 + \alpha \delta^2) x + (1 - \alpha) \gamma \delta y - \beta \delta z, \\ \bar{y} &= (1 - \alpha) \gamma \delta x + (\alpha \gamma^2 + \delta^2) y + \beta \gamma z, \\ \bar{z} &= -\beta \delta x + \beta \gamma y + \alpha z \quad \text{mit} \quad \alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1 \end{aligned} \quad (6.28)$$

kann abgesehen werden. Jedenfalls erhält man auf diese Weise ∞^2 gestaltlich verschiedene Repräsentanten $\bar{k}$ von Böschungsquartiken II. Art.

7. Schlußbemerkungen

Nachdem jede der hier untersuchten Böschungslinien mindestens eine Trägerquadratik besitzt, so ist man nebenbei auf bemerkenswerte *algebraische Lösungen* des Problems der Bestimmung von *Kurven konstanter Steigung auf Flächen 2. Ordnung* gestoßen.

So verläuft die Böschungskubik (2.10) auf den ∞^2 Quadriken des Netzes

$$\lambda [(x+z)^2 - 4y] + \mu [(x+z)y + 3(x-z)] + \nu [3(x^2 - z^2) + 4y^2] = 0, \quad (7.1)$$

die Böschungskurven mit eigentlicher Spitze (4.12) auf den ∞^1 Quadriken des Büschels

$$\lambda [9x^2 + 8(y^2 - z^2)] + \mu [(y+z)^2 + 24(y-z)] = 0, \quad (7.2)$$

ebenso jene mit uneigentlicher Spitze (5.8) auf den ∞^1 Quadriken des Büschels

$$\lambda [x(y-z) - 12] + \mu [x^2 - 3(y^2 - z^2)] = 0, \quad (7.3)$$

während die Böschungskurven II. Art (6.22) nur vom Triekantenhyperboloid (6.23) getragen wird.

In der vom Verfasser entwickelten Theorie der Böschungslinien auf Quadriken [7] wurde gezeigt, daß die ∞^1 auf einer *regulären Mittelpunktsquadratik* Φ verlaufenden Böschungslinien mit gemeinsamem Böschungsfernkreis c bei Zentralprojektion aus dem Mittelpunkt von Φ als *nichteuclidische Kegelschnittsevolventen* erscheinen, und zwar im Sinne jener projektiven Metrik nach Cayley-Kleinschem Muster, die sich auf den Umrißkegelschnitt o von Φ gründet. Als gemeinsame Evolute fungiert hierbei der zu c bezüglich o polare Kegelschnitt. Die analytische Ermittlung der Kegelschnittsevolventen läuft im allgemeinen auf elliptische Integrale oder Funktionen hinaus. Ist jedoch eine von ihnen bekannt, so lassen sich die übrigen als Äquidistanten elementar ableiten. — Im gegenständlichen Fall treten als Mittelpunktsflächen Φ bloß Hyperboloide auf, so daß die erwähnte Metrik stets eine hyperbolische oder indefinite ist. Hieraus schließt man auf die Existenz von *hyperbolischen Kegelschnittsevolventen 3. und 4. Ordnung*, sowie auf die damit zusammen-

menhängende Existenz von Scharen *algebraischer Böschungslinien* auf *Hyperboloiden*.

Der Grenzfall von regulären parabolischen Trägerflächen Φ tritt nur bei der Böschungskubik ein, und zwar — für $v = 0$ in (7.1) — in Gestalt von *hyperbolischen Paraboloiden*. Die auf einem solchen Paraboloid Φ verlaufenden Böschungslinien mit gemeinsamen Böschungsfenkreis c erscheinen bei Parallelprojektion in Achsenrichtung als *pseudoeuklidische Kegelschnittsevolventen* im Sinne jener affinen Metrik, deren absolutes Punktepaar aus den (reellen) Bildspurpunkten der beiden Fernerzeugenden des Paraboloids besteht. Der vorliegende Sachverhalt lehrt, daß es pseudoeuklidische Kegelschnittsevolventen 2. Ordnung gibt und demzufolge Scharen *algebraischer Böschungslinien auf hyperbolischen Paraboloiden* [7, S. 314 f.].

Die genauere Untersuchung dieser Dinge soll einer späteren Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Literatur

- [1] Blaschke, W.: Untersuchungen über die Geometrie der Sphäre in der euklidischen Ebene. Monatsh. Math. Phys. **21** (1910), 3 — 60.
- [2] Krames, J.: Über kubische Schraubenlinien und Cayleysche Strahlflächen dritten Grades. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. **168** (1959), 239 — 248.
- [3] Loria, G.: Curve sghembe speciali, I (Bologna 1925).
- [4] Müller, E., J. Krames: Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, II; Leipzig 1929).
- [5] Rohn, K., L. Berzolari: Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen (Enz. Math. Wiss. III C 9, 1926).
- [6] Wieleitner, H.: Spezielle ebene Kurven (Sammlung Schubert **56**, Leipzig 1908).
- [7] Wunderlich, W.: Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. **155** (1947), 309 — 331.
- [8] Wunderlich, W.: Bestimmung aller Spiegelkurven, die für parallelen Lichteinfall untereinander ähnliche oder kongruente Brennlinien erzeugen. Publ. Math. **9** (1962), 135 — 141.