

Zur Triebstockverzahnung.

Von Walter Wunderlich in Kiel.

Die bei der Triebstockverzahnung mit auf dem Teilkreis angeordneten Triebstockmittelpunkten auftretende Unstimmigkeit wird gestalts- und zahlenmäßig untersucht. Der an sich geringe Fehler kann durch eine kleine Verschiebung der Triebstöcke gegen die Radmitte behoben werden. Die Mindestverschiebung wird berechnet und ebenso wie die Fehlerschranke nomographisch dargestellt.

Im Rahmen des Kapitels „Verzahnungen“ taucht in den meisten Lehr- und Handbüchern der Kinematik und Getriebelehre, wie auch in den Vorlesungen immer wieder das Beispiel der Triebstockverzahnung auf, trotz ihrer untergeordneten Bedeutung, wohl wegen ihrer offensichtlichen Einfachheit. Dabei ist gerade hier eine grundsätzliche Schwierigkeit vorhanden, die — bewußt oder unbewußt — fast stets übergangen wird, da die übrigen Sonderformen (Evolventen- und Zykloidenverzahnungen) nichts Derartiges aufweisen. Im vorliegenden Aufsatz wird die bei der üblichen Annahme zwangsläufig auftretende Unstimmigkeit der Triebstockverzahnung zahlenmäßig untersucht. Gleichzeitig wird gezeigt, daß der an sich sehr kleine Fehler durch eine geringe Abänderung gänzlich behoben werden kann.

§ 1. Der Fehler der Triebstockverzahnung.

Bei der Triebstockverzahnung sind bekanntlich auf dem Umfang des einen Rades in regelmäßigen Abständen achsenparallele zylindrische Zapfen oder Rollen — die Triebstöcke — angeordnet, die im Verlauf der Drehung in die entsprechenden Zahnlücken des anderen Rades eingreifen. Es sind demnach die Zahnflanken für das erste Rad in Kreisform p_1 vorgegeben, wodurch das Zahnprofil p_2 des zweiten Rades bestimmt ist und nach einem der üblichen allgemeinen Verfahren konstruiert werden kann. Man kann etwa den ersten Wälzkreis k_1 auf dem zweiten abrollen lassen und hierbei die Hüllkurven p_2 der mitgenommenen Kreise p_1 ermitteln, wobei es natürlich nur auf die inneren Äste ankommt.

Da die Mittelpunkte M der Triebstöcke fast ausnahmslos auf dem Wälzkreis angenommen werden, beschreiben sie bei der Rollung Zykloiden m , und die Gegenprofile p_2 sind deren Parallelkurven im Abstand s , wenn s den Halbmesser von p_1 bezeichnet (Bild 1). In dem Augenblick, in dem der Mittelpunkt M auf dem festen Teilkreis k_2 aufsetzt, befindet er sich in einer Spitze seiner Bahn, die Zahnflanke p_2 nimmt im Punkt P auf der Berührungstangente von k_1 und k_2 ihren Anfang, während die symmetrische Flanke \bar{p}_2 im Gegenpunkt \bar{P} zu Ende ist. Zwischen P und \bar{P} fügt sich als Verbindung zwanglos ein Halbkreis vom Halbmesser s ein, der die Zahnlücke schließt. Da er sich in P und \bar{P} berührend anschließt, scheint alles in bester Ordnung zu sein¹⁾.

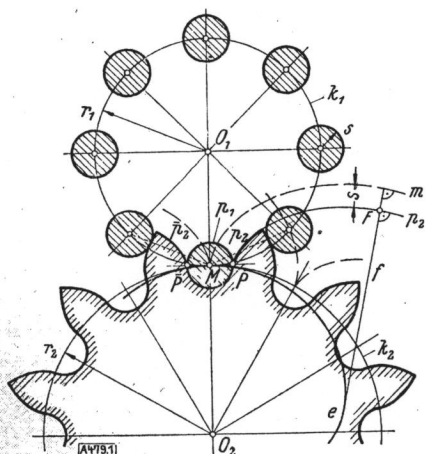


Bild 1.

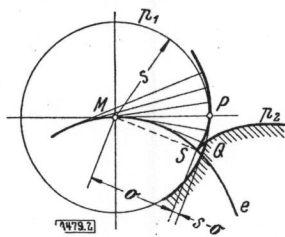


Bild 2.

Und doch ist dies nicht der Fall, wenn man die Stelle P etwas genauer unter die Lupe nimmt. Das Profil p_2 hat nämlich eine Spitze S ! Dies wird klar, wenn man sich p_2 durch Abwicklung der Evolute e von m erzeugt denkt, die bekanntlich eine zu m ähnliche Zykloide ist.

Bei der Aufwicklung des gespannten Fadens f auf e beschreibt sein Endpunkt F das Profil p_2 , setzt einmal in S mit einer Spitze senkrecht auf e auf und setzt dann die Bahn gegenläufig fort, bis er in P den Kreis p_1 oskulierend durchsetzt. Die Spitze S liegt mithin im Innern des Kreises p_1 , so daß dieser das Gegenprofil p_2 außer in P noch in einem Punkt Q trifft, wo p_2 dann eine stumpfe Ecke erhält (Bild 2). Die Zahnlücke wird daher nicht von einem Halbkreis, sondern von

¹⁾ Z. B. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“ Bd. I, Leipzig 1888, S. 191 f.; A. Schiebel: „Zahnräder“ I. T., Berlin 1922, S. 103.

einem etwas kürzeren Bogen $Q\bar{Q}$ gebildet, und vom eigentlichen Zahnprofil geht das Stück QSP verloren. Die Triebstockverzahnung läßt sich somit überhaupt nicht einwandfrei ausführen, wenn die Triebstockmitten auf dem Teilkreis liegen.

Dieser Umstand ist es wohl, der Hartmann²⁾ veranlaßt, die Triebstockverzahnung kurzweg und vollständig abzulehnen, „weil sie in der Nähe des Teilkreises unrichtig wird“.

Nun, so schlimm ist die Sachlage wiederum nicht. Die Differenzen sind überaus klein, für Präzisionsübertragungen wird die Triebstockverzahnung sowieso nicht verwendet und ein gewisses Flankenspiel ist ja immer vorhanden. Überdies können — ja sollen sogar — mehrere Triebstöcke gleichzeitig im Eingriff stehen.

§ 2. Abschätzung des Flankenspiels.

Das größte durch die Unstimmigkeit der Triebstockverzahnung verursachte fehlerhafte Flankenspiel ist dem Betrage nach gleich dem Abstand der Profilecke Q vom Bogen PS (Bild 2). Wir gelangen zu einer Abschätzung, indem wir die Entfernung der Profilspitze S vom Triebstockumfang p_1 berechnen. Da dessen Halbmesser s als Bogen MS auf die Evolute e aufgewickelt erscheint, handelt es sich um die Bestimmung des Überschusses des Zykloidenbogens $\bar{MS} = s$ über die zugehörige Sehne $\bar{MS} = \sigma$.

Wir setzen zu diesem Zwecke die Zykloide e in Parameterdarstellung an:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin b\tau + b \sin a\tau \\ y &= a \cos b\tau + b \cos a\tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Bezeichnen r_1 und r_2 die Rollkreisradien der Zykloide m , so geht diese in ihre Evolute e durch ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $r_2 : (2r_1 + r_2)$ über und es ist

$$a = \frac{(r_1 + r_2) r_2}{2r_1 + r_2}, \quad b = \frac{r_1 r_2}{2r_1 + r_2} \dots \dots \dots (2).$$

Die Bogenlänge s beträgt

$$s = \int_0^\tau \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\tau = \frac{4ab}{a-b} \sin \frac{a-b}{2} \tau \dots \dots \dots (3),$$

das Quadrat der Sehne σ

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= x^2 + (y - \overline{a+b})^2 \\ &= 2a(a+b)(1 - \cos b\tau) + 2b(a+b)(1 - \cos a\tau) - 2ab(1 - \cos \overline{a-b}\tau) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Da der gesuchte Unterschied $s - \sigma$ gegenüber s sehr klein ist, können wir mit ausreichender Näherung

$$s - \sigma \approx \frac{s^2 - \sigma^2}{2s} \dots \dots \dots (5)$$

setzen und erhalten so

$$s - \sigma = \frac{a+b}{s} \left[\frac{ab(a+b)}{(a-b)^2} (1 - \cos \overline{a-b}\tau) - a(1 - \cos b\tau) - b(1 - \cos a\tau) \right] \dots \dots (6).$$

Entwickeln wir schließlich (6) in eine Potenzreihe nach τ und auf Grund von (3) τ in eine Potenzreihe von s , so erhalten wir das gesuchte Spiel als Reihe in s :

$$s - \sigma = \frac{(a+b)^2}{384 a^2 b^2} \cdot s^3 \left(1 + \frac{2a^2 - 5ab + 2b^2}{120 a^2 b^2} \cdot s^2 + \dots \right) \dots \dots \dots (7).$$

Das erste Glied dieser Entwicklung läßt sich einfacher auch so ableiten, daß man die Zykloide e durch ihren Scheitelkrümmungskreis ersetzt (Radius $\rho_0 = 4ab/(a+b)$) und den Unterschied zwischen dem Kreisbogen s und der zugehörigen Sehne berechnet. —

Drücken wir endlich a und b nach (2) durch die Wälzkreisradien r_1, r_2 aus, so haben wir in erster Näherung:

$$s - \sigma = \frac{(2r_1 + r_2)^4 \cdot s^3}{384 r_1^2 r_2^2 (r_1 + r_2)^2} \dots \dots \dots (8).$$

Für den in Bild 1 zugrundeliegenden Fall $r_1 = 2, r_2 = 3, s = 0,4$ liefert das ein Flankenspiel von $s - \sigma = 0,00045$, das sind rund 0,11 % des Triebstockhalbmessers.

²⁾ W. Hartmann: „Die Maschinengetriebe“ Bd. I, Stuttgart 1913, S. 390.

Bild 3 zeigt eine nomographische Darstellung des Spiels auf Grund von Formel (8) in Gestalt einer Leitertafel von projektivem Typ. Sie ist in erster Linie für Übersetzungen $n = r_2/r_1 \geq 1$ gedacht, da der Triebstockhalbmesser auf r_1 bezogen ist; für $n < 1$ empfiehlt sich der Bezug auf r_2 . Man gewinnt jedenfalls einen guten Überblick über die Größenordnung des fehlerhaften Spiels.

Besondere Erwähnung verdienen noch die beiden Grenzfälle, in denen eines der Räder in eine Zahnstange übergegangen ist. Für $r_2 = \infty$ wird

$$s - \sigma = \frac{s^3}{384 r_1^2} \dots \dots \dots (8')$$

und die Leitertafel kann auch dafür verwendet werden ($n = \infty$). Für $r_1 = \infty$, das ist der in der Praxis häufige Fall, in dem die Zahnstange die Triebstöcke trägt, gilt

$$s - \sigma = \frac{s^3}{24 r_2^2} \dots \dots \dots (8'')$$

Diese Abhängigkeit ist durch die Doppelleiter in Bild 3 unten dargestellt.

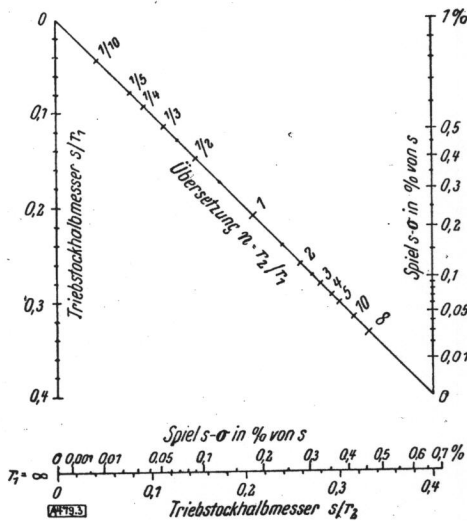


Bild 3.

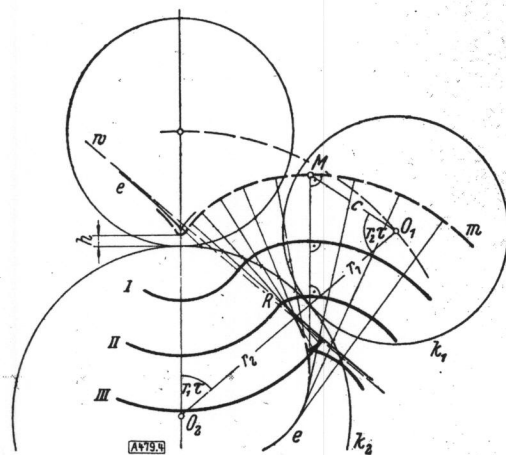


Bild 4.

§ 3. Behebung des Fehlers.

Wir werfen nun die Frage auf: *Um welchen Betrag h müssen die Triebstöcke ins Innere des Teilkreises gerückt werden, um eine einwandfreie Verzahnung zu gewährleisten?*

Daß auf diese Weise eine Abstimmung des in § 1 beschriebenen Mißstandes möglich ist, kann man sich leicht klar machen: Verschiebt man die Triebstöcke um ein beträchtliches Stück h gegen die Rollkreismitte O_1 , so beschreiben ihre Mittelpunkte M bei der Rollung gestreckte Trochoiden, deren innere Parallelkurven im Abstand s keine Singularitäten aufweisen, wenigstens nicht an den kritischen Stellen. Hat man hingegen h zu klein genommen, so löst sich die Oskulation bei P in zwei weitere Rückkehrpunkte auf und das Profil p_2 weist in dieser Umgebung nun sogar 3 Spitzen auf. Der Grenzfall — und gerade dieser muß uns interessieren — besteht nun darin, daß zwei dieser Spitzen sich vereinigen, und zwar zu einem sogenannten Gipfel- oder Spitzpunkt.

Wir können uns die Verhältnisse noch in der Weise anschaulich machen, daß wir die verschiedenen Parallelkurven einer gestreckten Trochoide m betrachten (Bild 4). Deren Evolute e besitzt eine Asymptote w, dem Wendepunkt von m entsprechend, und einen Rückkehrpunkt R, hervorgerufen von einem „Zwischenscheitel“ der Trochoide. Ist mithin der Abstand s klein, so begleitet die Parallelkurve I die Trochoide auf der Innenseite ohne Singularitäten; ist s jedoch groß, so erhält die Parallelkurve III 2 Spitzen (man verfolge die Abwicklung der Evolute); im Grenzfall II geht sie ohne äußere Auffälligkeiten durch R, besitzt hier aber als höhere Singularität einen Gipfelpunkt.

Diese Überlegung bietet auch schon die Handhabe zur rechnerischen Beantwortung der eingangs aufgeworfenen Frage. Wir setzen die Trochoide in Parameterdarstellung an:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin b \tau - c \sin a \tau \\ y &= a \cos b \tau - c \cos a \tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

Hierin ist $a = r_1 + r_2$, $b = r_1$ und $c = r_1 - h$ der Zentralabstand $O_1 M$ des Triebstockes.

Wir suchen nun jene Punkte, deren Krümmungshalbmesser ρ dem Betrage nach gleich dem Triebstockradius s ist; diese führen nämlich zu den Spitzen der Parallelkurve (vgl. III in Bild 4). Es ist

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} = \frac{a [b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(a-b)\tau]^{\frac{3}{2}}}{bc(a+b) \cos(a-b)\tau - (ac^2 + b^3)} \quad (10)$$

und die Bedingung $\rho = \pm s$ führt bei der Bestimmung des Parameters τ auf die kubische Gleichung

$$(t - b^2 - c^2)^3 + s^2 [\lambda t - (2\lambda - 1)b^2 - c^2]^2 = 0 \quad (11),$$

in der abkürzend

$$2bc \cdot \cos(a-b)\tau = t \quad \text{und} \quad \frac{a+b}{2a} = \lambda \quad (12)$$

gesetzt ist.

Wir sehen, die Ermittlung der Spitzen für die Parallelkurve einer Trochoide ist im wesentlichen eine kubische Aufgabe. Sollen zwei Spitzen zusammenrücken, so muß (11) eine Doppelwurzel haben, d. h. es muß neben (11) auch noch die durch Ableitung nach t entstehende Gleichung

$$3(t - b^2 - c^2)^2 + 2\lambda s^2 [\lambda t - (2\lambda - 1)b^2 - c^2] = 0 \quad (13)$$

bestehen. Entfernung von t liefert uns dann die Diskriminantengleichung

$$27(1 - \lambda)(b^2 - c^2) - 4\lambda^3 s^2 = 0 \quad (14).$$

Über (12) ergibt sich daraus unsere gesuchte Grenzbedingung:

$$b^2 - c^2 = 2r_1 h - h^2 = s^2 \cdot \frac{(2r_1 + r_2)^3}{27r_2(r_1 + r_2)^2} \quad (15).$$

Damit ist die Formel für den Mindestbetrag h gefunden, um den die Triebstöcke gegen die Radmitte versetzt werden müssen, so daß das Auftreten von Spitzen beim Gegenprofil p_2 mit Sicherheit verhütet wird. Das Gegenprofil enthält nun keinerlei Kreisbogen mehr, sondern besteht zur Gänze aus einer Parallelkurve der Mitteltrochoide m .

Da h sehr klein ist, kann das Glied h^2 in Formel (15) vernachlässigt werden.

Für die in Bild 1 zugrundegelegte Annahme $r_1 = 2, r_2 = 3, s = 0,4$ ergibt sich $h = 0,0068$, d. i. $0,34\%$ vom Teilkreisradius r_1 .

Bild 5 gibt eine nomographische Darstellung der Funktion (15) in Form einer Leitertafel; Triebstockhalbmesser s und Verschiebung h sind dabei auf den Wälzkreisradius r_1 bezogen. — Erwähnt werden müssen wieder die beiden Grenzfälle $r_2 = \infty$ und $r_1 = \infty$. Ersterer wird noch durch die Leitertafel erfaßt ($n = \infty$), letzterer führt auf

$$h = \frac{4s^2}{27r_2} \quad (15')$$

und wird durch die Doppelleiter in Bild 5 unten dargestellt.

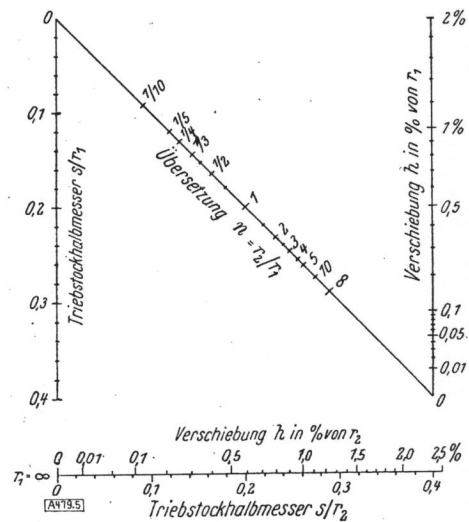


Bild 5.

Abschließend kann also festgestellt werden: *Der Fehler der Triebstockverzahnung ist außerordentlich klein. Das durch ihn bedingte Flankenspiel liegt in der Größenordnung des praktisch stets vorhandenen Spiels. Durch geringfügige Verschiebung der Triebstöcke gegen die Radmitte läßt sich der Fehler vollständig ausschalten, ohne daß die Eingriffsverhältnisse merklich verschlechtert würden.*