

Walter Wunderlich

RAUMKURVEN KONSTANTER GANZER KRÜMMUNG UND REGELFLÄCHEN MIT OSKULIERENDEM STRIKTIONSBAND

Herrn Professor S. Gołąb zum 70. Geburtstag

1. Sei $x = x(s)$ die vektorielle, auf die Bogenlänge s bezogene Darstellung einer hinreichend oft differenzierbaren Kurve l des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Die Lagenänderung des begleitenden Dreibeins, bestehend aus der Tangente $e_1 = x' = dx/ds$, der der Schmiegeebene angehörenden Hauptnormale $e_2 = \rho x''$ und der dazu senkrechten Binormale $e_3 = e_1 \times e_2$, wird in bekannter Weise durch die Frenetschen Ableitungsgleichungen

$$(1) \quad e_1' = \kappa e_2, \quad e_2' = -\kappa e_1 + \tau e_3, \quad e_3' = -\tau e_2$$

beschrieben. Die darin auftretende Krümmung $\kappa = |e_1'|$ misst die Richtungsänderung der Tangente, analog die Torsion $\tau = \pm |e_3'|$ die Richtungsänderung der Binormale und damit die Stellungsänderung der Schmiegeebene. Als Mass für die Richtungsänderung der Hauptnormale hat M.A. Lancret die sogenannte "ganze" Krümmung

$$(2) \quad \lambda = |e_2'| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

eingeführt. Während Raumkurven konstanter Krümmung ("wind-schiefe Kreise") oder konstanter Torsion wiederholt betrachtet worden sind [4] - letztere treten beispielsweise als Schmieg-

linien der Flächen konstanter Gausscher Krümmung auf -, weiss man über Kurven konstanter ganzer Krümmung nur wenig. Spezielle Vertreter solcher Kurven (darunter algebraische) hat der Verfasser kürzlich untersucht [10]; dieselben waren überdies durch feste Hauptnormalenneigung ausgezeichnet.

Nach einer Bemerkung von A. Mannheim sind die Raumkurven konstanter ganzer Krümmung durch die Eigenschaft charakterisiert, dass ihre Hauptnormalenfläche in den Zentralpunkten verschwindende mittlere Krümmung aufweist; analytisch wurde diese Tatsache von G. Loria [4] verifiziert. In der vorliegenden Note soll zunächst ein kürzerer Beweis mit einigen Folgerungen gegeben werden.

Die in Rede stehende Hauptnormalenfläche ϕ kann mittels eines zusätzlichen Längenparameters u auf den Hauptnormalen der Kurve l beschrieben werden durch

$$(3) \quad y(s, u) = x(s) + u \cdot e_2(s).$$

Die u -Linien ($s = \text{const}$) sind die Erzeugenden von ϕ , also die Hauptnormalen von l , die s -Linien ($u = \text{const}$) die im festen Abstand u von l verlaufenden Orthogonaltrajektorien der Erzeugendenschar. Die im Punkt (s, u) vorhandene Flächennormale wird durch

$$(4) \quad y_s \times y_u = [(1 - \kappa u) e_1 + \tau u e_3] \times e_2 = (1 - \kappa u) e_3 - \tau u e_1$$

bestimmt. Entlang einer Erzeugenden e bilden die Normalen von ϕ ein orthogonales hyperbolisches Paraboloid, das durch Viertelschwenkung um e in ein längs e berührendes Paraboloid übergeht. Sein Scheitel Z wird als Zentralpunkt (Kehlpunkt) bezeichnet, seine zweite Scheitelerzeugende f heisst die Zentraltangente; sie kann als die Grenzlage des Gemeinlots zweier in e zusammenrückenden Erzeugenden von ϕ aufgefasst werden. Die Richtung der Flächennormale (4) strebt mit $u \rightarrow \infty$ gegen die Richtung des Darboux'schen Drehvektors

$$(5) \quad d = \tau e_1 + \kappa e_3,$$

der offenbar die Richtung der Zentraltangente f angibt. Aus der entsprechenden Bedingung $d \cdot (y_s \times y_u) = 0$ erhält man als Koordinate des Zentralpunkts Z :

$$(6) \quad u = x \lambda^{-2}$$

Äquivalent zu dem erwähnten Satz von Mannheim ist die Aussage, dass die Dupinsche Indikatrix von ϕ in Z unter der Annahme $\lambda = \text{const}$ eine gleichseitige Hyperbel ist, dass also die Schmiegtangente (Haupttangente) in Z zur Erzeugenden e normal ist, d.h. mit der Zentraltangente f zusammenfällt. Zum Nachweis für diese Behauptung genügt es zu zeigen, dass irgendeine das Linienelement (Z, f) enthaltende Flächenkurve in Z die Tangentialebene von ϕ zur Schmiegeebene hat (sofern dort ihre Krümmung nicht verschwindet). Für diesen Zweck eignet sich nun die zum u -Wert (6) gehörige s -Linie. Aus ihrer Gleichung (3) findet man - mit $u = \text{const}$ und Benützung der Frenetschen Formeln (1) - die Ableitungen

$$(7) \quad y' = (1 - xu) e_1 + \tau u e_3, \quad y'' = -x' u e_1 + (x - \lambda^2 u) e_2 + \tau' u e_3$$

Die von y' und y'' aufgespannte Schmiegeebene fällt nun mit der Tangentialebene zusammen, falls sie die Erzeugende e enthält. Die Bedingung dafür lautet $y' \cdot (y'' \times e_2) = 0$, das ist ausgeführt:

$$(8) \quad \tau' - x \tau' u + x' \tau u = 0.$$

Setzt man hierin den Wert von u aus (6) ein, so gelangt man - nach Kürzung durch $\tau \neq 0$ - zur Differentialgleichung

$$(9) \quad x x' + \tau \tau' = 0,$$

deren Integration die notwendige und hinreichende Bedingung $x^2 + \tau^2 = \lambda^2 = \text{const}$ liefert, was zu beweisen war.

Die von den Zentralpunkten aller Erzeugenden e einer windschiefen Regelfläche ϕ erfüllte Kurve k heisst die Striktionslinie (Kehlkurve) von ϕ . Die von den zugehörigen Zen-

traltangenten f le gebildete Regelfläche ψ wird das Striktionsband von ϕ genannt; der bei den geraden Konoiden vorliegende Sonderfall, dass alle Zentraltangenten in einer einzigen Geraden f zusammenfallen, mag in der Folge ausser Betracht bleiben. Ansonsten berühren einander der beiden Flächen ϕ und ψ längs ihrer gemeinsamen Striktionslinie k und stehen in einer austauschbaren Beziehung [3], [6], d.h. das Striktionsband von ψ ist mit ϕ identisch.

Im vorliegenden Fall der Hauptnormalenfläche ϕ einer Kurve konstanter Lancret-Krümmung besteht das Striktionsband ψ durchwegs aus Schmiegtangenten f mit mindestens dreipunktiger Berührung¹⁾: Abweichend von der sonst bestehenden einfachen Berührung zwischen ϕ und ψ findet jetzt Oskulation längs der gemeinsamen Striktionslinie statt. Es gilt mithin

Satz 1. Von der gemeinen Schraublinie abgesehen, erscheinen die Raumkurven konstanter ganzer Krümmung dadurch gekennzeichnet, dass ihre Hauptnormalenfläche ein oskulierendes Striktionsband besitzt.

Die Bewegung des begleitenden Dreibeins einer Raumkurve l kann bekanntlich in jedem Augenblick als infinitesimale Schraubung um eine bestimmte Momentanachse angesehen werden, und diese Achse ist nach G. Darboux identisch mit der Zentraltangente f der Hauptnormalenfläche ϕ [3], [8]. Die Ortsfläche der Momentanachsen im ruhenden System, das sogenannte Rastaxoid, ist demnach durch das Striktionsband ψ gegeben. Die Ortsfläche im bewegten System (also im Dreibein), als Gangaxoid bezeichnet, besteht durchwegs aus Normalen der Hauptnormale e ; es handelt sich mithin um ein gewisses gerades Konoid Γ , dessen Bauart durch die Relationen (5) und (6) festgelegt ist. Führt man den Richtungswinkel v der Erzeugenden $f \parallel d$ gemäss (5) und (2) durch

$$(10) \quad \cos v = \tau/\lambda, \quad \sin v = \kappa/\lambda$$

¹⁾ Im Ausnahmefall der gemeinen Schraublinie ist die Hauptnormalenfläche ein Konoid (Wendelfläche), und das Striktionsband schrumpft auf die Schraubachse zusammen.

ein, so drückt sich der vom Dreibeinscheitel aus gemessene Abstand u von f zufolge (6) durch

$$(11) \quad u = \lambda^{-1} \sin v$$

aus. Ist nun $\lambda = \text{const}$, so hat man in Γ eine "Umschlungswendelfläche" der Frequenz 1 vor sich [1]. Führt man auf das Dreibein e_1, e_2, e_3 gegründete kartesische Koordinaten ξ, η, ζ ein, so lautet die Gleichung von Γ :

$$(12) \quad (\xi^2 + \zeta^2) \eta^2 = \lambda^{-2} \zeta^2.$$

Es handelt sich demnach um ein algebraisches Konoid 4. Grades, wohlbekannt als Normalenfläche eines Drehzylinders ($\xi^2 + \zeta^2 = \lambda^{-2}$) längs eines ebenen Schnittes ($\eta = \zeta$)²⁾. Diese Fläche besitzt neben der Doppelgerade e noch eine Doppelerzeugende ($v = 0$ und π), die mit der ξ -Achse, also der Tangente der Ausgangskurve l zusammenfällt. Damit ergibt sich die nachstehende Kennzeichnung:

Satz 2. Von der gemeinen Schraublinie abgesehen, erscheinen die Raumkurven konstanter ganzer Krümmung dadurch gekennzeichnet, dass bei der Bewegung des begleitenden Dreibeins als Gangaxoid eine Umschlungswendelfläche 4. Grades auftritt, welche die Hauptnormale zur Achse und die Tangente als Doppelerzeugende besitzt.

2. Im Hinblick auf Satz 1 erscheint es angezeigt, nach den allgemeinsten Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband zu fragen.

Vorerst mag man sich nach dem Vorbild von R. Sauer [7] durch ein differenzengeometrisches Stabmodell eine anschauliche Vorstellung von solchen Flächenpaaren verschaffen: Ausgehend von

2) Bei waagrechter Erzeugendenlage stellt Γ die einzige nichttriviale Regelfläche dar, die durchwegs ebene Fallinien (nämlich Ellipsen) aufweist [2], [9]. Γ kann überdies als spezielles "Kugelkonoid" bezeichnet werden, weil die Erzeugenden eine bestimmte Kugel ($\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2\lambda^{-1}\zeta$) berühren [6].

zwei einander rechtwinklig schneidenden Geraden e_1 und f_1 wähle man eine weitere, zu e_1 benachbarte Normale e_2 von f_1 , anschliessend eine zu f_1 benachbarte, e_1 treffende Normale f_2 von e_2 , dann wieder eine zu e_2 benachbarte, f_2 treffende Normale e_3 von f_2 , und so fort. Auf diese Weise gelangt man zu zwei diskreten Folgen $\{e_i\}$ und $\{f_i\}$, wobei stets f_i das Gemeinlot von e_i und e_{i+1} ist und überdies e_{i-1} trifft, ebenso wie e_i das Gemeinlot von f_i und f_{i+1} ist und f_{i-1} trifft. Durch Verdichtung dieser beiden Geradenfolgen -- die durch Stäbe materialisiert werden könnten -- gelangt man in der Grenze zu einer windschiefen Fläche $\phi(e)$ und dem sie oskulierenden Striktionsband $\psi(f)$.

Unter Ausschluss der geraden Konoide besteht zwischen einer windschiefen Regelfläche ϕ und ihrem Striktionsband ψ Berührung längs der gemeinsamen Striktionslinie k . Die ϕ und ψ längs k angeschriebene abwickelbare Fläche θ wird als Zentraltorse bezeichnet. Nach einem klassischen Satz von G. Darboux gehen bei der Verebnung von θ die mitgenommenen Erzeugenden e von ϕ in eine Parallelenschar $\{e^*\}$ über [3], [8]; gleiches gilt natürlich auch für die Erzeugenden f von ψ . Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Erzeugenden einer Regelfläche längs der Striktionslinie absolut parallel sind (und nur längs dieser Kurve).

Ein einfacher geometrischer Beweis für den Satz von Darboux und seine Umkehrung kann in Anlehnung an J. Krames [6] etwa so geführt werden: Lässt man auf einer abwickelbaren Fläche θ eine Ebene ε abrollen, so erzeugen die Strahlen e^* eines in ε befestigten Parallelenbüschels eine gewisse ("synekistische") Strahlkongruenz $\{e\}$, deren Brenngebilde aus der Torse θ und der uneigentlichen Bahn c des Fernpunktes U der Parallelen besteht. Die Bahntangente von U ist dabei (wie für jeden Punkt von ε) normal zu ε . Jede aus ∞^1 beliebig herausgegriffenen Kongruenzstrahlen e gebildete Regelfläche ϕ berührt θ längs einer Kurve k und enthält die Fernkurve c . Die Tangentialebenen von ϕ in den Treffpunkten Z und U einer Erzeugenden e mit k bzw. c sind zueinander normal, denn die Tangentialebene in Z fällt mit ε zusammen und die

Tangentialebene in U enthält die zu ε normale Tangente von c : Z ist also der Zentralpunkt von e , k die Striktionslinie und θ die Zentraltorse von ϕ . Wickelt man aber θ durch Abwälzung in die Ebene ε ab, so geht e in einen Strahl e^* der Parallelenbüschels über. Umgekehrt lässt sich auch jede vorgegebene Regelfläche ϕ in eine Kongruenz der beschriebenen Art einbetten; dieselbe ist durch die Zentraltorse θ als Brennfläche und die Fernkurve c von ϕ als Brennnlinie bestimmt.

Im Falle einer Oskulation zwischen einer Regelfläche ϕ und ihrem Striktionsband ψ längs der gemeinsamen Striktionslinie k ist in jedem Punkt Z von k eine gemeinsame Dupinsche Indikatrix in Gestalt einer gleichseitigen Hyperbel vorhanden, welche die durch Z gehenden Erzeugenden e und f zu Asymptoten besitzt. Die in Z berührende Tangente t von k und die durch Z gehende Erzeugende $\bar{t}$ der Zentraltorse θ liegen als konjugierte Flächentangenten von ϕ harmonisch zu e und f . Wegen $e \perp f$ sind mithin t und $\bar{t}$ spiegelbildlich zu e (und f) angeordnet, und diese Lage bleibt bei der Verebnung von θ erhalten.

Fasst man nun in dieser Verebnung (Fig.1) die Fernpunkte U und V der beiden orthogonalen Parallelenbüscheln $\{e^*\}$ und $\{f^*\}$ als absolute Punkte einer pseudo-euklidischen Metrik auf, so kann die symmetrische Lage von t^* und $\bar{t}^*$ als "pseudonormal" gedeutet werden³⁾. Dies erlaubt, die verebnete Gratlinie q^* von θ als "Pseudoevolvente" der verebneten Striktionslinie k^* zu bezeichnen. Umgekehrt ist dann k^* eine "Pseudoevolvente" von q^* .

Damit eröffnet sich der folgende Weg zur Konstruktion von Regelflächen mit oskulierendem Striktionsband: Man nimmt in der Ebene eine stetig differenzierbare Geradenschar $\{\bar{t}^*\}$ an, deren Hüllkurve q^* als Verebnung der Gratlinie q der Zentraltorse θ gelten soll. Nach Wahl zweier in orthogonalen Richtungen liegenden Fernpunkte U und V sucht man in der zu-

³⁾ Eine solche pseudo-euklidische Metrik spielt in der mit der Zyklographie verknüpften "c-Geometrie" eine grundlegende Rolle [5].

gehörigen Metrik eine Pseudoevolvente k^* von q^* auf und heftet in ihren Punkten Z^* die nach U bzw. V zielenden "pseudoisotropen" Geraden e^* und f^* an. Verbiegt man dann die Ebene in der Weise, dass die Strahlen $\bar{t}^*$ gerade bleiben, also zu den Erzeugenden einer Torse θ werden – was noch die Annahme einer willkürlichen Verbiegungsfunktion gestattet –, so gehen die mitgeführten Geraden e^* und f^* in die Erzeugenden e bzw. f einer Regelfläche ϕ und ihres Striktionsbandes γ über; die beiden Flächen berühren die Torse θ längs der aus k^* hervorgehenden gemeinsamen Striktionslinie k , während sie einander längs k oskulieren. Aus der bezüglich e symmetrischen Lage der in jedem Punkt Z von k vorhandenen konjugierten Tangenten t und $\bar{t}$ von k bzw. q folgt nämlich umgekehrt, dass f die Schmiegtangente von ϕ ist. Es gilt somit:

Satz 3. Besitzt eine windschiefe Regelfläche ein oskulierendes Striktionsband, so bleibt diese Eigenschaft bei Verbiegung der Zentraltorse unter Mitnahme der Flächenerzeugenden erhalten. Bei Verebnung der Zentraltorse geht die Striktionslinie in eine Pseudoevolvente des verebneten Torsengrates über.

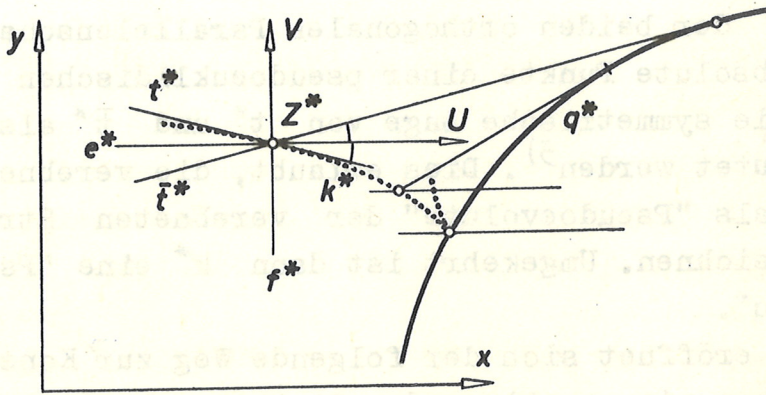


Fig. 1

Die Ermittlung einer Pseudoevolvente k^* geht bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems, dessen Achsen die Richtungen U und V haben, folgendermassen vor sich (Fig. 1): Ist die Ausgangskurve q^* gegeben durch

$$(13) \quad x = x(u), \quad y = y(u),$$

so kann k^* angesetzt werden mit

$$(14) \quad X = x + v\dot{x}, \quad Y = y + v\dot{y},$$

wobei der Punkt die Ableitung nach dem beliebigen Parameter u bedeutet. Die durch

$$(15) \quad \dot{X} : \dot{Y} = [(1+v)\dot{x} + v\ddot{x}] : [(1+v)\dot{y} + v\ddot{y}]$$

gekennzeichnete Fortschreitrichtung von k^* soll nun die entgegengesetzte Neigung haben wie jene von q^* . Diese Forderung führt über die Bedingung

$$(16) \quad \dot{X}\dot{y} + \dot{Y}\dot{x} = 0$$

auf

$$(17) \quad 2\dot{x}\dot{y}(1+v) + (\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y})v = 0.$$

Übergang zu einem neuen Parameter w mittels

$$(18) \quad \dot{w}^2 = \pm \dot{x}\dot{y},$$

wobei das Vorzeichen jeweils so gewählt werden mag, dass $\dot{w}^2 \geq 0$, transformiert (17) in

$$(19) \quad \dot{w} + \dot{w}\dot{v} + \ddot{w}v = 0.$$

Das Integral lautet

$$(20) \quad w + \dot{w}v = c = \text{const},$$

und Einsetzen des Wertes $v = (c-w)/\dot{w}$ in (14) liefert dann eine Parameterdarstellung der gesuchten Pseudoevolvente k^* . Der eingeführte Parameter w bedeutet dabei die Pseudobogenlänge von q^* .

Die Grenzfälle konischer oder zylindrischer Zentraltorsen sollen für sich diskutiert werden; hier artet die Gratlinie q in einen eigentlichen bzw. uneigentlichen Punkt Q aus.

Zu den Flächenpaaren ϕ, ψ mit konischer Zentraltorse θ gelangt man, wenn die Geradenschar $\{\bar{t}^*\}$ als Strahlbüschel mit eigentlichem Scheitel Q^* angenommen wird. Als verebnete Striktionslinie k^* stellt sich dann eine in Q^* zentrierte gleichseitige Hyperbel durch die absoluten Punkte U und V ein, die als Pseudokreis mit dem Mittelpunkt Q^* aufzufassen ist. Die Hyperbelebene kann anschliessend auf einen beliebigen Kegel θ aufgewickelt werden, wobei Q^* mit der Kegelspitze Q zur Deckung zu bringen ist. — Entscheidet man sich insbesondere für einen Drehkegel θ , so erhält man Flächen ϕ , die aus Symmetriegründen zu ihrem Striktionsband ψ kongruent sind. Beträgt der Öffnungswinkel des Kegels speziell 60° , so ergeben sich algebraische Regelflächen 7. Grades mit einer Striktionslinie 4. Ordnung.

Im Falle einer zylindrischen Zentraltorse ist die Geradenschar $\{\bar{t}^*\}$ als Parallelenbüschel anzunehmen, dessen Richtung von U und V verschieden ist. Als verebnete Striktionslinie kann dann jede Gerade k^* verwendet werden, welche die Parallelschar pseudonormal durchsetzt, deren Richtung also zu jener der $\bar{t}^*$ symmetrisch bezüglich U oder V ist. Anschliessend ist die Büschelebene auf einen beliebigen Zylinder θ so aufzuwickeln, dass die Strahlen $\bar{t}^*$ mit den Erzeugenden von θ zur Deckung gelangen. Die aus der Gerade k^* hervorgehende Striktionslinie k wird dabei zu einer geodätischen Linie von θ , ϕ und ψ . Umgekehrt könnte man auf einem beliebigen Zylinder θ irgendeine krumme geodätische Linie k ziehen; die Halbierenden e und f der Schnittwinkel von k mit den Zylindererzeugenden bauen dann eine windschiefe Regelfläche ϕ und ihr oskulierendes Striktionsband ψ auf; beide Flächen haben Drehkegel zu Richtkegeln. — Verwendet man insbesondere einen Drehzylinder θ , so erhält man zwei schiefe offene Regelschraubflächen mit einer gemeinen Schraublinie k als Striktionslinie. Aus Symmetriegründen tritt längs k sogar Hyperoskulation auf. — Algebraische Gebilde ergeben sich beispielsweise, wenn man Zylinder θ verwendet, die eine geschlossene Epi- oder Hypozykloide als Normalschnitt besitzen.

Einschlägige Flächenpaare ϕ, ψ traten im Zusammenhang mit Kurven konstanter ganzer Krümmung und fester Hauptnormalenneigung auf [10].

LITERATUR

- [1] W. K a u t n y: Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh.Math.63 (1959) 169-188.
- [2] J. K r a m e s: Die windschiefen Flächen mit ebenen Falllinien. S.-B. Österr.Akad.Wiss.172 (1963) 159-172.
- [3] E. K r u p p a: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien 1957.
- [4] G. L o r i a: Curve sghembe speciali, II. Bologna 1925.
- [5] E. M ü l l e r, J. K r a m e s: Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, II). Leipzig-Wien 1929.
- [6] E. M ü l l e r, J. K r a m e s: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, III).Leipzig-Wien 1931.
- [7] R. S a u e r: Differenzengeometrie. Berlin 1970.
- [8] K. S t r u b e c k e r: Differentialgeometrie, II.(Sammlung Götschen, Bd.1179/1179a). 2.Aufl. Berlin 1969.
- [9] W. W u n d e r l i c h: Flächen mit Kegelschnitten als Falllinien. J.Reine Angew.Math.208 (1961) 204-220.
- [10] W. W u n d e r l i c h: Kurven konstanter ganzer Krümmung und fester Hauptnormalenneigung. Monatsh.Math. 77(1973) 158-171.

II.INSTITUT FÜR GEOMETRIE, TECHNISCHE HOCHSCHULE, WIEN, AUSTRIA