

## Evolventi di cerchi e cicli nel piano iperbolico.

WALTER WUNDERLICH (Vienna) (\*)

Dedicato al Professore BENIAMINO SEGRE  
in occasione del suo 70esimo compleanno

**Sunto.** — Sono esaminate, nel modello proiettivo del piano iperbolico, le evolventi reali di cerchi e cicli propri ed ideali. In generale questi evolventi sono curve trascendenti, ma esistono casi particolari con evolventi algebriche.

### 1. — Introduzione.

Introduciamo nel piano euclideo — riferito a coordinate cartesiane ortogonali  $x, y$  — una metrica proiettiva (iperbolica) nel senso di Cayley-Klein, fondata sulla conica assoluta

$$(1.1) \quad o \dots x^2 + y^2 = 1.$$

La distanza  $s$  di due punti  $P, Q$  sia definita mediante il birapporto  $(PQUV)$  secondo la formula

$$(1.2) \quad s = \frac{1}{2} \log (PQUV),$$

ove  $U$  e  $V$  indicano i punti assoluti della retta  $PQ$ . L'elemento lineare  $ds$  di una curva qualsiasi è quindi dato da

$$(1.3) \quad (1 - x^2 - y^2)^2 ds^2 = (1 - x^2 - y^2)(dx^2 + dy^2) + (x dx + y dy)^2.$$

Similmente l'angolo  $\sigma$  di due rette  $p, q$  è definito da

$$(1.4) \quad \sigma = \frac{i}{2} \log (pquv),$$

ove  $u$  e  $v$  sono le tangenti dell'assoluto  $o$  (1.1) appartenenti al fascio  $pq$ . In particolare le rette  $p$  e  $q$  sono dette ortogonali ( $\sigma = \pi/2, \text{ mod. } \pi$ ), se  $(pquv) = -1$ , cioè

---

(\*) Entrata in Redazione il 26 giugno 1973.

se  $p$  e  $q$  sono reciproche rispetto alla conica assoluta  $o$  ( $p$  contiene il polo assoluto di  $q$  e viceversa).

Com'è ben noto [1], le trasformazioni congruenti (movimenti) di questa geometria non-euclidea sono rappresentate dalle collineazioni che mutano la conica assoluta in sè. Tali collineazioni formano un gruppo  $G_3$  e lasciano invariati i birapporti e quindi anche tutte le distanze e tutti gli angoli.

Le evolventi di una curva arbitraria  $c$  sono le traiettorie ortogonali dell'insieme delle rette tangenti a  $c$ . Per ottenere un'evolvente  $l$  di  $c$ , si può procedere nel modo seguente: misurare l'arco  $s = P_0P$  da un punto fisso  $P_0$  ad un punto variabile  $P$  di  $c$  e portare, nel senso inverso, la lunghezza  $s$  sulla tangente  $t$  di  $c$  dal punto di contatto  $P$ ; l'estremo  $Q$  del segmento  $PQ = s$  appartiene a quell'evolvente  $l$  di  $c$  che incontra  $c$  in  $P_0$  (formando qui una cuspidale).

Le misurazioni necessarie si eseguono per mezzo della formula (1.3). — Per misurare segmenti di una retta  $g$  è conveniente servirsi del « punto centrale »  $C$  di  $g$ , situato sulla perpendicolare dall'origine  $O$ . Basta considerare la retta  $y = a$ . Il segmento  $OC$  della perpendicolare  $x = 0$  ha la lunghezza euclidea  $a$  e la lunghezza iperbolica  $\alpha$ , determinata secondo (1.3) per

$$(1.5) \quad \alpha = \operatorname{arth} a \quad \text{oppure} \quad \operatorname{th} \alpha = a.$$

La distanza iperbolica  $s$  dei punti  $C(0, a)$  e  $P(x, a)$  della retta  $g$  è allora data da

$$(1.6) \quad \operatorname{th} s = x \cdot \operatorname{ch} \alpha = x / \sqrt{1 - a^2}.$$

Nei paragrafi seguenti saranno esaminate le evolventi di cerchi e cicli reali del piano iperbolico; ricordiamo che i cerchi e i cicli sono rappresentati nel modello attuale da coniche bitangenti all'assoluto  $o$ . Siccome considereremo non soltanto curve proprie (all'interno di  $o$ ), ma anche curve ideali (all'esterno di  $o$ ), sarà necessario con l'occasione estendere la validità delle formule a casi eccezionali, ove le lunghezze di archi e segmenti reali assumono valori complessi. Contrariamente alla situazione nel piano euclideo, ove l'evolvente di cerchio è una curva trascendente, nel piano iperbolico troveremo anche evolventi algebriche.

Esiste una certa relazione fra le evolventi trattate e di eliche euclidee particolari, tracciate su quadriche a centro [2].

## 2. — Evolventi di cerchi propri.

Per cerchio proprio s'intende il luogo dei punti che hanno una distanza assegnata  $\alpha = \operatorname{cost}$  (reale,  $> 0$ ) da un punto proprio fisso, chiamato centro. Siccome è possibile trasferire mediante un movimento questo centro all'origine  $O$ , basta considerare il cerchio  $c$  dato da  $x^2 + y^2 = a^2$ , ove — secondo (1.5) —  $a = \operatorname{th} \alpha < 1$ .

Se facciamo uso della rappresentazione parametrica

$$(2.1) \quad c \dots x = a \cos u, \quad y = a \sin u \quad \text{con} \quad 0 < a = \operatorname{th} \alpha < 1,$$

troviamo per l'arco di  $c$ , limitato dai punti  $P_0(u_0 = 0)$  e  $P(u)$ , per mezzo di (1.3) la lunghezza

$$(2.2) \quad s = mu \quad \text{con} \quad m = \operatorname{sh} \alpha = a/\sqrt{1-a^2}.$$

La tangente  $t$  di  $c$  nel punto  $P(u)$  si scrive

$$(2.3) \quad t \dots x = a \cos u + v \sin u, \quad y = a \sin u - v \cos u,$$

con  $v$  variabile. Applicando il procedimento del § 1, arriviamo all'evolvente di  $c$  col punto iniziale  $P_0$ , se portiamo sulla tangente  $t$  il segmento  $PQ$  di lunghezza  $s = mu$ . Siccome il punto centrale di  $t$  coincide col punto di contatto  $P$ , possiamo usufruire della formula (1.6) e porre

$$(2.4) \quad v = \operatorname{th} s/\operatorname{ch} \alpha.$$

Tenendo conto di (2.2) e (2.3), la rappresentazione parametrica dell'evolvente si scrive:

$$(2.5) \quad l \dots \begin{cases} x = (m \cos u + \operatorname{th} mu \sin u)/\sqrt{1+m^2}, \\ y = (m \sin u - \operatorname{th} mu \cos u)/\sqrt{1+m^2}. \end{cases}$$

È chiaro che si tratta di una curva trascendente. Essa s'avvicina asintoticamente al cerchio assoluto  $o$ , poichè  $v \rightarrow 0$  con  $u \rightarrow \pm \infty$ .

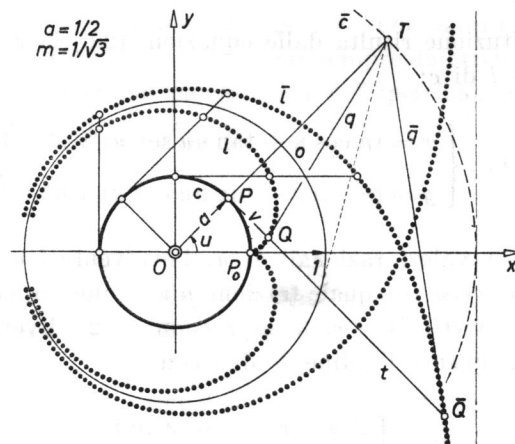


Fig. 1

Per trovare una delle evolventi ideali  $\bar{l}$  (all'esterno di  $o$ ), possiamo applicare alla evolvente propria  $l$  (2.5) la polarità assoluta. Ogni elemento  $(Q, q)$  di  $l$  si muta in un elemento  $(\bar{Q}, \bar{q})$  di  $\bar{l}$ , parimenti ortogonale alla tangente  $t$  del cerchio  $c$  (fig. 1). Siccome i punti  $Q, \bar{Q}$  sono armonicamente separati per  $c$ , le distanze euclidee  $v = PQ$  e  $\bar{v} = P\bar{Q}$  hanno il prodotto costante  $v\bar{v} = 1 - a^2 = 1/\text{ch}^2 \alpha$ . Quindi il valore

$$(2.6) \quad \bar{v} = \text{cth } mu / \text{ch } \alpha,$$

sostituito a  $v$  nelle equazioni (2.3), dà

$$(2.7) \quad \bar{l} \dots \begin{cases} x = (m \cos u + \text{cth } mu \sin u) / \sqrt{1 + m^2}, \\ y = (m \sin u - \text{cth } mu \cos u) / \sqrt{1 + m^2}. \end{cases}$$

Le curve  $l$  e  $\bar{l}$ , rappresentate nella fig. 1, occorrono quale proiezione centrale (gnomonica) di certe eliche euclidee, tracciate su un iperboloido rotondo a due falde o ad una falda, rispettivamente [3]. Le evolventi esterne  $\bar{l}$  s'incontrano anche in connessione con le evolutoidi spaziali di un cerchio euclideo  $\bar{c}$ ; queste sono linee geodetiche particolari sugli iperboloidi di rivoluzione (ad una falda) col cerchio focale  $\bar{c}$ , e la loro proiezione ortogonale sul piano di  $\bar{c}$  fornisce curve del tipo  $\bar{l}$  [4].

### 3. - Evolventi di cerchi ideali.

Chiamiamo « cerchio ideale » ogni conica reale all'esterno dell'assoluto  $o$  che possiede due punti complessi coniugati di contatto con esso. Basta considerare, quale esemplare normalizzato il cerchio  $c$  al centro  $O$ , descritto da (2.1) con  $a > 1$ . Allora la costante  $m$ , introdotta in (2.2), ha un valore immaginario puro:

$$(3.1) \quad m = ni \quad \text{con} \quad n = a/\sqrt{a^2 - 1} > 1.$$

Mediante questa sostituzione risulta dalle equazioni (2.5) la rappresentazione parametrica dell'evolvente  $l$  di  $c$ :

$$(3.2) \quad l \dots \begin{cases} x = (n \cos u + \tan nu \sin u) / \sqrt{n^2 - 1}, \\ y = (n \sin u - \tan nu \cos u) / \sqrt{n^2 - 1}. \end{cases}$$

È evidente che, per valori razionali di  $n$ , l'evolvente  $l$  è una curva algebrica di genere zero. Se si scrive  $n > 1$  quale frazione  $\mu/\nu$  di numeri naturali senza divisore comune, e se si pone  $\exp(iu/\nu) = w$ , le espressioni (3.2) diventano funzioni razionali di  $w$ . Si trova facilmente l'ordine  $N$  di  $l$  con

$$(3.3) \quad N = \begin{cases} 2(\mu + \nu), & \text{se } \nu \text{ impari;} \\ \mu + \nu, & \text{se } \nu \text{ pari.} \end{cases}$$

A causa di  $\mu > \nu$  l'esempio più semplice si presenta per  $n = \frac{3}{2}$  ( $a = 3/\sqrt{5}$ ); la evolvente è allora una quintica ( $N = 5$ ) con tre cuspidi, rappresentata nella fig. 2.

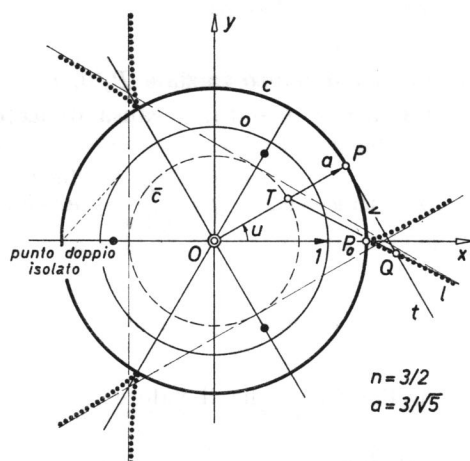


Fig. 2

La polarità assoluta muta un'evolvente del tipo (3.2) in una curva uguale. Tali evolventi si incontrano quale proiezione centrale di certe eliche euclinee, tracciate su un iperboloido rotondo ad una falda (asse verticale, pendenza dell'elica maggiore all'inclinazione delle generatrici).

#### 4. - Evolventi d'ipercicli propri.

Per iperciclo proprio s'intende il luogo dei punti che hanno una distanza assegnata  $\alpha = \text{const}$  (reale,  $> 0$ ) da una retta propria, nominata retta base. Se facciamo coincidere la retta base coll'asse  $x$  — posizione sempre da ottenere mediante un movimento —, una rappresentazione parametrica dell'iperciclo, derivata per mezzo di formule del tipo (1.5) e (1.6), si scrive:

$$(4.1) \quad c \dots x = \text{th } u, \quad y = a/\text{ch } u \quad \text{con} \quad 0 < a = \text{th } \alpha < 1.$$

Si tratta dell'ellisse  $x^2 + (y/a)^2 = 1$ .

L'arco di  $c$  cogli estremi  $P_0(u=0)$  e  $P(u)$  ha una lunghezza, da calcolare per valutazione della formula (1.3), di

$$(4.3) \quad s = nu \quad \text{con} \quad n = \text{ch } \alpha = 1/\sqrt{1-a^2}.$$

Siccome l'iperciclo  $c$  è mutato in sè per il gruppo  $G_1$  di movimenti (traslazioni iper-



boliche lungo la retta base)

$$(4.3) \quad x' = \frac{x + \sigma}{1 + \sigma x}, \quad y' = \frac{\tau y}{1 + \sigma x} \quad \text{con} \quad \sigma^2 + \tau^2 = 1,$$

basta considerare l'evolvente  $l$  col punto iniziale  $P_0(0, a)$ .

La tangente  $t$  di  $c$  nel punto  $P$  è data, a causa di  $dx:dy = -1:a \operatorname{sh} u$ , da

$$(4.4) \quad t \dots x = \operatorname{th} u - v, \quad y = \frac{a}{\operatorname{ch} u} + ax \operatorname{sh} u$$

oppure

$$(4.5) \quad t \dots ax \operatorname{sh} u + y = a \operatorname{ch} u.$$

La sua distanza euclidea dall'origine  $O$  ha il valore

$$(4.6) \quad p = \frac{a \operatorname{ch} u}{r} \quad \text{con} \quad r^2 = 1 + a^2 \operatorname{sh}^2 u,$$

ed il suo punto centrale  $C$  (§ 1) è determinato da

$$(4.7) \quad v_1 = \operatorname{th} u/n^2 r^2.$$

Fra la lunghezza euclidea  $v_1 r$  e la lunghezza iperbolica  $s_1$  del segmento  $PC$  di  $t$  esiste, secondo (1.6), la relazione

$$(4.8) \quad \operatorname{th} s_1 = v_1 r / \sqrt{1 - p^2} = n v_1 r^2.$$

Similmente abbiamo per il segmento  $CQ$ , ove  $Q$  indica il punto dell'evolvente  $l$  situato su  $t$  colla distanza  $s = nu$  da  $P$  (fig. 3), la relazione

$$(4.9) \quad \operatorname{th}(s - s_1) = n(v - v_1) r^2.$$

Pertanto, applicando un teorema d'addizione, otteniamo con

$$(4.10) \quad \operatorname{th} s = \frac{n v r^2}{1 + n^2 v_1 (v - v_1) r^4} = \frac{n v \operatorname{ch}^2 u}{1 + v \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}$$

un'equazione lineare per  $v$ . Il valore trovato

$$(4.11) \quad v = \frac{\operatorname{th} nu}{(n \operatorname{ch} u - \operatorname{th} nu \operatorname{sh} u) \operatorname{ch} u},$$

sostituito in (4.4), fornisce una rappresentazione parametrica dell'evolvente cercata:

$$(4.12) \quad l \dots \begin{cases} x = \frac{n \operatorname{ch} nu \operatorname{sh} u - \operatorname{sh} nu \operatorname{ch} u}{n \operatorname{ch} nu \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} nu \operatorname{sh} u} , \\ y = \frac{a n \operatorname{ch} nu}{n \operatorname{ch} nu \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} nu \operatorname{sh} u} . \end{cases}$$

Passando a coordinate omogenee  $x_0 : x_1 : x_2 = 1 : x : y$  ed applicando i teoremi d'addizione per le funzioni iperboliche, otteniamo

$$(4.13) \quad l \dots \begin{cases} x_0 = (n - 1) \operatorname{ch} (n + 1)u + (n + 1) \operatorname{ch} (n - 1)u , \\ x_1 = (n - 1) \operatorname{sh} (n + 1)u - (n + 1) \operatorname{sh} (n - 1)u , \\ x_2 = 2na \operatorname{ch} nu \quad \text{con} \quad a^2 + n^{-2} = 1 . \end{cases}$$

Quest'evolvente  $l$ , trascendente per  $n$  irrazionale, possiede un numero (infinito nel caso trascendente) di cuspidi situate su  $l$  e determinate da  $v = 0$ , cioè, secondo (4.11), dai valori  $u = ki\pi/n$  con  $k$  intero; esse sono immaginarie, eccetto la cuspidale reale  $P_0(0, a)$  per  $k = u = 0$ . La parte propria di  $l$  ha due punti limiti  $I(1, 0)$  e  $J(-1, 0)$  corrispondenti a  $u = \pm \infty$ , ove si trova osculazione coll'assoluto  $o$ . — Le altre evolventi proprie dell'iperciclo  $c$  si derivano da  $l$  (4.12) mediante l'applicazione delle traslazioni (4.3) che lasciano fissi i punti  $I$  e  $J$ .

Per trovare un'evolvente ideale  $\bar{l}$  di  $c$  (all'esterno di  $o$ ) possiamo trasformare  $l$  mediante la polarità assoluta. Un calcolo analogo a quello del § 2 conduce alla sostituzione di  $\operatorname{th}$  per  $\operatorname{cth}$  in (4.9) e (4.11). Pertanto dobbiamo soltanto scambiare fra di loro le funzioni  $\operatorname{ch} nu$  e  $\operatorname{sh} nu$  nelle equazioni (4.12). Invece della cuspidale  $P_0(0, a)$  di  $l$  ci appare un'asintoto d'inflessione  $ay = 1$  per  $\bar{l}$ .

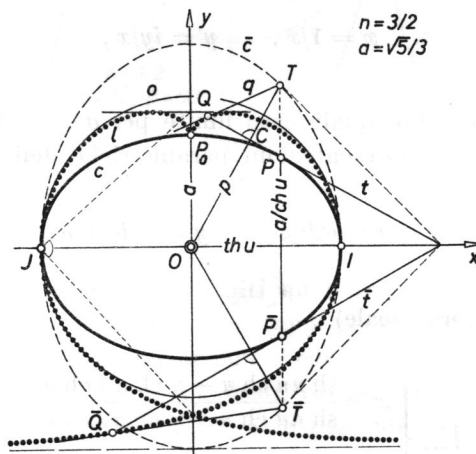


Fig. 3

Si vede senz'altro dalla rappresentazione (4.13) che, per valori razionali della costante  $n > 1$ , l'evolvente è una curva algebrica razionale. La parte interna e la parte esterna si uniscono nei punti limiti  $I$  e  $J$ . Seguendo lo stesso ragionamento come nel § 3 si trova di nuovo la formula (3.3) per l'ordine  $N$  dell'evolvente. — L'esempio più semplice si presenta per  $n = \frac{3}{2}$  ( $a = \sqrt{5}/3$ ). La curva, rappresentata in fig. 3, è una quintica ( $N = 5$ ) a contatto 5-punto al cerchio assoluto  $o$  in  $I$  e  $J$ ; oltre alla cuspide reale  $P_0(0, a)$  esistono due cuspidi immaginarie coniugate  $P_{1,2} (\pm i\sqrt{3}, -2a)$ . L'antipolarità rispetto al cerchio  $o$  muta la curva in sè.

### 5. — Evolventi d'ipercicli ideali.

Se assumiamo  $a > 1$  invece della supposizione  $0 < a < 1$  nel § 4, la conica  $c$  (4.1) è sempre un'ellisse bitangente all'assoluto  $o$  (1.1), ma situata all'esterno. Siccome quest'iperciclo ideale non ha importanza nella geometria iperbolica, non lo prenderemo in considerazione. Le sue evolventi (sempre ideali) sono rappresentate dal prototipo  $l$  (4.12), se si pone  $n = mi$  con  $m^2 = 1/(a^2 - 1)$ ; ne segue che le funzioni iperboliche  $ch nu$  e  $sh nu$  si mutano in  $\cos mu$  e  $i \sin mu$ . Pertanto le evolventi reali sono sempre trascendenti.

L'ipotesi di un valore immaginario puro  $a = bi$  ( $b > 0$ ) merita più d'attenzione, poichè quest'iperciclo ideale, rappresentato dall'iperbola bitangente  $x^2 - (y/b)^2 = 1$ , ha un significato essenziale [1]: Tutte le sue tangenti fanno un'angolo costante  $\beta = \arctan b$  con la retta base  $y = 0$ . Dunque un tale iperciclo può essere considerato quale evolutoide di una retta propria.

Possiamo utilizzare i risultati già esposti nel § 4, se applichiamo all'iperciclo proprio (4.1) ed alla sua evolvente (4.12) la traslazione complessa

$$(5.1) \quad x' = 1/x, \quad y' = iy/x,$$

contenuta nel gruppo  $G_1$  (4.3) quale caso limite per  $\sigma \rightarrow \infty$ . Con soppressione degli accenti troviamo così le rappresentazioni parametriche dell'iperciclo ideale

$$(5.2) \quad c \dots x = \text{cth } u, \quad y = -b/\text{sh } u,$$

e della sua evolvente (ora ideale)

$$(5.3) \quad \bar{l} \dots \begin{cases} x = \frac{\text{sh } nu \text{ sh } u - n \text{ ch } nu \text{ ch } u}{\text{sh } nu \text{ ch } u - n \text{ ch } nu \text{ sh } u}, \\ y = \frac{bn \text{ ch } nu}{\text{sh } nu \text{ ch } u - n \text{ ch } nu \text{ sh } u}. \end{cases}$$



Un'evolvente propria  $l$  (all'interno dell'assoluto  $o$ ) si trova, secondo un'osservazione analoga a quella nel § 4, per scambio delle funzioni  $\text{sh } nu$  e  $\text{ch } nu$  in (5.3). La rappresentazione omogenea si scrive:

$$(5.4) \quad l \dots \begin{cases} x_0 = (1-n) \text{ch } (1+n)u + (1+n) \text{ch } (1-n)u, \\ x_1 = (1-n) \text{sh } (1+n)u + (1+n) \text{sh } (1-n)u, \\ x_2 = 2nb \text{ sh } nu \quad \text{con} \quad n^2 - b^2 = 1. \end{cases}$$

Le altre evolventi interne od esterne si derivano dai prototipi  $l$  e  $\bar{l}$  mediante l'applicazione di movimenti reali (4.3). — Si vede da nuovo che le evolventi considerate sono curve algebriche di genere zero, se la costante  $n = \cos \beta$  è razionale; la formula (3.3) per l'ordine  $N$  è sempre valida, tenendo presente che adesso  $0 < n < 1$ . L'esempio più semplice si presenta ora per  $n = \frac{1}{2}$  ( $b = \sqrt{3}$ ,  $\beta = \pi/3$ ); l'evolvente  $l$ , rappresentata nella fig. 4, è una parabola cubica ( $N=3$ ). I rami interni ed esterni si uniscono, con osculazione al cerchio assoluto  $o$ , nei punti impropri  $I$  e  $J$  della retta base. La curva è autopolare rispetto al cerchio immaginario  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ .

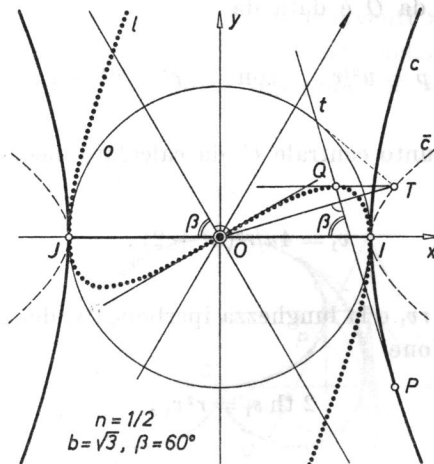


Fig. 4

## 6. - Evolventi di oricicli.

Gli oricicli del piano iperbolico, definiti quali traiettorie ortogonali di fasci di rette parallele (nel senso iperbolico), sono rappresentati nel modello proiettivo da coniche che hanno un contatto quadripunto con l'assoluto. Siccome tutti gli oricicli propri sono uguali fra di loro [1], basta considerare l'oriciclo  $e$  avente il suo punto assoluto (centro improprio) in  $I(0, 1)$  e passante per l'origine  $O$ :

$$(6.1) \quad e \dots x^2 + 2y^2 = 2y,$$

oppure in forma parametrica:

$$(6.2) \quad c \dots x = \frac{2u}{u^2 + 2}, \quad y = \frac{u^2}{u^2 + 2}.$$

Per l'arco  $s$  di  $c$ , misurato dall'origine  $O$ , si ha, conformemente a (1.3), la formula elementare

$$(6.3) \quad s = u.$$

Rispetto a  $dx:dy = (2 - u^2):2u$ , la tangente  $t$  nel punto  $P(u)$  di  $c$  si scrive

$$(6.4) \quad t \dots x = \frac{2u}{u^2 + 2} + (u^2 - 2)v, \quad y = \frac{u^2}{u^2 + 2} - 2uv$$

ossia

$$(6.5) \quad t \dots 2ux + (u^2 - 2)y = u^2.$$

La sua distanza euclidea da  $O$  è data da

$$(6.6) \quad p = u^2/r \quad \text{con} \quad r^2 = u^4 + 4,$$

ed il parametro del suo punto centrale  $C$ , da calcolare mediante (6.4) e  $(u^2 - 2)x = 2uy$ , ha il valore

$$(6.7) \quad v_1 = 4u/r^2(u^2 + 2).$$

Fra la lunghezza euclidea  $rv_1$  e la lunghezza iperbolica  $s_1$  del segmento  $PC$  di  $t$  esiste, a causa di (1.6), la relazione

$$(6.8) \quad 2 \operatorname{th} s_1 = r^2 v_1,$$

mentre per il segmento  $CQ$  coll'estremo  $Q$  ad un'evolvente  $l$  di  $c$  si ha

$$(6.9) \quad 2 \operatorname{th} (s - s_1) = r^2(v - v_1).$$

Eliminando  $s_1$  e  $v_1$  dalle equazioni (6.7)-(6.9) e tenendo conto di (6.6), si trova

$$(6.10) \quad v = \frac{2}{(u^2 + 2)[(u^2 + 2) \operatorname{cth} s - 2u]}.$$

Per ottenere l'evolvente  $l$  che ha il punto iniziale all'origine  $O$ , dobbiamo porre  $s = u$  (6.3); l'introduzione del valore corrispondente di  $v$  (6.10) nelle equazioni (6.4)



## BIBLIOGRAFIA

- [1] E. BOMPIANI, *Metriche non-euclidee*, Roma, 1951-52.
- [2] W. WUNDERLICH, *Über die Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung*. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, **155** (1947), pp. 309-331.
- [3] W. WUNDERLICH, *Über die Schleppkurven des Kreises*, Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien, **156** (1948), pp. 155-173.
- [4] W. WUNDERLICH, *Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken*, Mat. Tidsskrift (1951), pp. 9-26.

