

Zur normalen Axonometrie des vierdimensionalen Raumes

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 2 Abbildungen

(Eingegangen am 21. November 1973)

Abstract

Orthogonal Axonometry in Four-Space. The paper develops graphical methods for the construction of orthogonal projections of four-dimensional objects onto a hyperplane or a plane by means of the axonometric principle.

1. Orthogonalität im euklidischen R^4

1.1. Die Metrik des vierdimensionalen euklidischen Raumes R^4 wird bekanntlich in projektiver Auffassung durch eine nullteilige *absolute Quadrik* ω im Fernraum Π_u des projektiv erweiterten R^4 geregelt. Bei Benützung kartesischer Normalkoordinaten x, y, z, t wird nach Übergang zu homogenen Koordinaten $x_0:x_1:x_2:x_3:x_4 = 1:x:y:z:t$ diese Fläche ω durch

$$x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

beschrieben. Ihr Polarsystem ist maßgebend für die *Orthogonalität* im R^4 : So sind zwei normale Gerade p und q dadurch gekennzeichnet, daß ihre Fernpunkte P_u und Q_u konjugiert bezüglich ω liegen, zwei ganznormale Ebenen π und ϑ dadurch, daß ihre Ferngeraden p_u und q_u reziproke Polare bezüglich ω sind, und zwei normale Überebenen Π und Θ durch konjugierte Lage ihrer Fernebenen π_u und ϑ_u .

1.2. Sei Π eine eigentliche, als *Bildraum* vorgesehene Überebene, und M_u der Fernpunkt der zu Π normalen Richtung, also der absolute Pol der Fernebene π_u von Π . Der *Normalriß* $P_m \in \Pi$ eines Punktes $P \in R^4$ kann dann als Projektion von P aus M_u auf Π

erklärt werden. Ist Γ eine nicht zu Π parallele Überebene, γ ihre Schnittebene mit Π („Spur“ von Γ), und g eine zu Γ normale Gerade, so gilt der

Hilfssatz: Der Normalriß einer zur Überebene Γ normalen Geraden g ist eine zur Spurebene γ von Γ normale Gerade g^m .

Zum Beweis bedenke man, daß in der Polarität bezüglich ω dem Fernpunkt $G_u \neq M_u$ von g die Fernebene $\gamma_u \neq \pi_u$ von Γ entspricht; zum Sehstrahl $M_u G_u$ gehört daher als absolute Polare die Schnittgerade $\pi_u \gamma_u$, das ist die Ferngerade g_u von γ . Der Fernpunkt von g^m ist daher (wie jeder Punkt des Sehstrahls $M_u G_u$) konjugiert zu jedem Punkt von g_u , und dies bedeutet $g^m \perp \gamma$.

2. Dreidimensionale Axonometrie

2.1. Zur Anwendung des *axonometrischen Prinzips*, wie es von der darstellenden Geometrie des dreidimensionalen Raumes her geläufig ist [6/II, S. 79ff.], hat man mit dem darzustellenden Objekt $\mathfrak{G} \subset R^4$ ein diesem angepaßtes kartesisches Achsenkreuz $(O; x, y, z, t)$ zu verbinden. Ist dessen Normalriß $(Om; x^m, y^m, z^m, t^m)$ auf den Bildraum Π verfügbar, so kann man — gestützt auf die bei jeder Parallelprojektion herrschende Geraden-, Parallelen- und Teilverhältnistreue — für jeden Dingpunkt $P \in R^4$ den Bildpunkt $P^m \in \Pi$ durch koordinatenweises „Aufbauen“ leicht ermitteln. Hierzu ist allerdings die Kenntnis der den einzelnen Koordinatenrichtungen entsprechenden Verkürzungsfaktoren $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ nötig, die zunächst zu konstruieren sind. P. H. SCHOUTE [5, S. 123] geht hierauf nicht näher ein.

Werden außer dem Bild des Achsenkreuzes auch noch die Verkürzungen willkürlich gewählt, so liegt *schiefe Axonometrie* vor, für die der „Hauptsatz“ [6/II, S. 82] gilt, wonach das axonometrische Bild *affin* zu einer gewissen Parallelprojektion des Objektes ist. Ein Analogon zum klassischen „Satz von Pohlke“ [6/II, S. 83f.], demzufolge das axonometrische Bild sogar *ähnlich* zu einer bestimmten Parallelprojektion ist, gilt im R^4 nicht; E. KRUPPA [2] hat die einschränkende Bedingung für die entsprechende Annahme im Bildraum angegeben.

Die *normale Axonometrie* verspricht gewissermaßen eine axonometrische Bildfigur $\mathfrak{G}^m$ mit „richtigen“ Verzerrungen. Dieselbe wäre grundsätzlich als dreidimensionales Modell zu gestalten, doch wird

man sich meist mit einer Darstellung von $\mathfrak{G}^m \subset \Pi$ in zwei zugeordneten ebenen Normalrissen (etwa Grund- und Aufriß) begnügen müssen; man vergleiche hierzu die Wiedergabe des als axonometrisches Bild eines vierdimensionalen Würfels auftretenden affinen Rhomboeders in Abb. 2.

2.2. Unter der Voraussetzung $O \notin \Pi$ bilden die Schnittpunkte X, Y, Z, T der vier Koordinatenachsen mit dem Bildraum Π ein mit seiner Projektion identisches „Bildspurtetraeder“, das zufolge des Hilfssatzes aus Abschnitt 1,2 die Achsenbilder x^m, y^m, z^m, t^m zu Höhen besitzt: Aus $OX \perp OYZT$ folgt nämlich $OmX = x^m \perp YZT$ usw. Weil die vier Höhen einen Punkt, und zwar Om , gemeinsam haben — was bei einem Tetraeder im allgemeinen nicht der Fall ist —, handelt es sich um ein sogenanntes *orthozentrisches Tetraeder*.

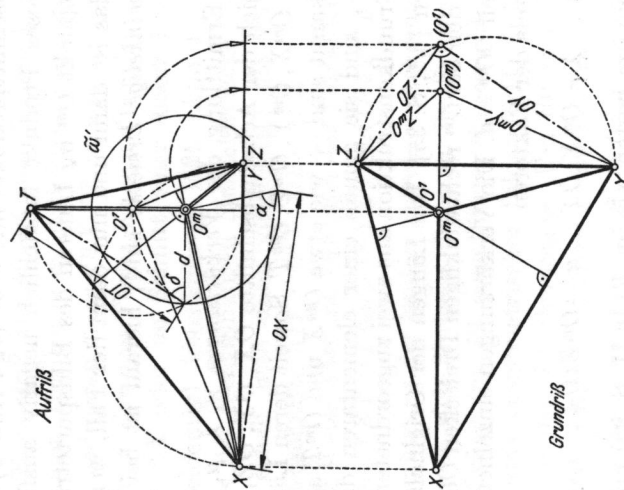


Abb. 1

Ein solches orthozentrisches Tetraeder $XYZT$ kann beispielsweise so gewonnen werden, daß man nach Wahl eines beliebigen Basisdreiecks XYZ die vierte Ecke T auf dem im Höhenschnittpunkt von XYZ errichteten Lot annimmt (Abb. 1). Es ist auch dadurch gekennzeichnet, daß es durchwegs *orthogonale Gegenkanten-*

paare besitzt, wobei bereits die Existenz von zwei Paaren orthogonaler Gegenkanten hinreicht [1, S. 126].

Aus dem Vergleich ähnlicher Dreiecke in der jeweils von zwei Höhen eines solchen Tetraeders aufgespannten Ebene schließt man leicht, daß das Produkt der beiden vom Höhengenschnittpunkt aus gemessenen Höhenabschnitte für alle vier Höhen den gleichen Wert hat [4, S. 614]. Eine andere Schlußweise kann von der Feststellung ausgehen, daß die Fernpunkte X_u, Y_u, Z_u, T_u der Koordinatenachsen wegen deren Orthogonalität ein Poltetraeder der absoluten Quadrik ω bilden; die Zentralprojektion dieser Punkte aus O auf Π lehrt dann, daß das Bildspurtetraeder $XYZT$ ein Poltetraeder jener nullteiligen Kugel ω' um O^m ist, die als Zentralriß von ω auftritt. Der Radius von ω' ist d , wenn d den Abstand von O und Π bezeichnet; damit ergibt sich dann auch der Wert des erwähnten Höhenabschnittprodukts mit $-d^2$ (vgl. Abb. 1)¹.

Damit dieses Produkt tatsächlich negativ ausfällt, muß der Höhengenschnittpunkt O^m im Inneren des Bildspurtetraeders $XYZT$ liegen, und das ist dann und nur dann der Fall, wenn alle Seitenflächen *spitzwinklige Dreiecke* sind; hierauf ist bei der Annahme zu achten.

2,3. Die Ermittlung der *Verkürzungen* $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ erfolgt nun durch Vergleich der Achsenabschnitte OX, OY, OZ, OT mit ihren Projektionen O^mX, O^mY, O^mZ, O^mT . Soweit deren Längen nicht unmittelbar bekannt sind — wie etwa O^mX und O^mT aus dem Aufriß in Abb. 1 —, sind sie gemäß einer elementaren darstellend-geometrischen Grundkonstruktion aus zwei zugeordneten Normalrisen zu bestimmen [6/I, S. 35]. Die Längen der Originalabschnitte OX etc. sind aus den bei O^m rechtwinkligen Dreiecken $O O^mX$ etc. leicht zu finden, weil $O O^m = d$. Die Verkürzungen einzelner Koordinatenstrecken mittels der Faktoren

$$\kappa = O^mX : OX, \quad \lambda = O^mY : OY, \quad \mu = O^mZ : OZ, \quad \nu = O^mT : OT \quad (1)$$

geschieht dann am besten wie im R^3 [6/II, S. 95] mit Verwendung entsprechender *Reduktionswinkel*

$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsin \kappa = \arctg (O^mX/d), \quad \beta = \arcsin \lambda = \arctg (O^mY/d), \\ \gamma &= \arcsin \mu = \arctg (O^mZ/d), \quad \delta = \arcsin \nu = \arctg (O^mT/d). \end{aligned} \quad (2)$$

¹ In Abb. 1 ist die nullteilige Kugel ω' durch ihre reelle „Vertreterkugel“ $\tilde{\omega}'$ mit dem Radius d repräsentiert.

Diese Winkel (vgl. Abb. 1) stellen die Neigungswinkel des durch O gehenden, zum Bildraum Π normalen Sebestrahls dar. Aus der bekannten Relation zwischen den Richtungskosinussen

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = 1 \quad (3)$$

folgt die Beziehung

$$\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 3. \quad (4)$$

2,4. Wenn man es vorzieht, kann man die wahren Längen der Achsenabschnitte auch folgendermaßen bestimmen: Man bringt etwa das Tetraeder $XYZZ$ durch *Drehung* um seine Basisebene $XYZ = \tau$ in den Bildraum Π . Während die Achsenpunkte X, Y, Z festbleiben, gelangt der Ursprung O in eine Neulage O^1 auf dem Achsenbild t^m , weil sein Bahnkreisbogen in einer zu τ ganznormalen Ebene verläuft, die auch das Lot $OT \perp \tau$ enthält und sich daher im Normalriß auf Π auf eine Teilstrecke der Geraden $O^mT = t^m$ abbildet. Das bei O rechtwinklige Tetraeder $XYZZ$ erscheint in der gedrehten Lage O^1XYZZ in wahrer Gestalt, so daß sich O^1 im Schnitt der drei Thales-Kugeln über den Durchmessern XY, YZ und ZX oder im Schnitt einer dieser Kugeln mit der Höhe t^m (zweideutig) konstruieren läßt (Abb. 1). Durch Umklappung eines der rechtwinkligen Manteldreiecke — etwa O^1YZZ in Abb. 1 — erhält man dann gleichzeitig die wahren Längen zweier Achsenabschnitte ($OY = O^1Y, OZ = O^1Z$).

In analoger Weise wäre die Drehung des Tetraeders $XYZT$ um seine Basisebene $YZT = \xi$ nach O^2YZT mit $O^2 \in x^m$ durchzuführen.

2,5. Mit Benützung der beiden gedrehten Achsentripel O^1XYZZ und O^2YZT ließe sich übrigens das von Th. SCHMID mit durchschlagendem Erfolg im R^3 eingeführte *Einschneideverfahren* zur Herstellung normalaxonomischer Bilder [6/II, S. 101 ff.] grundsätzlich auch auf den R^4 übertragen: Um für eine Figur $\mathfrak{F} \subset R^4$ das axonometrische Bild $\mathfrak{F}^m \subset \Pi$ zu ermitteln, trage man die dreidimensionalen Normalrisse $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ auf die Koordinatenräume $\Pi_1 = xyz$ bzw. $\Pi_2 = yzt$ kongruent in die gedrehten Achsenkreuze ein und ziehe durch zusammengehörige Bildpunkte $P' \in \mathfrak{F}'$ und $P'' \in \mathfrak{F}''$ (in ihrer neuen Position) Einschneidestrahlen in den Richtungen t^m bzw. x^m ; ihr Schnittpunkt ist dann das axonometrische Bild P^m des betreffenden Dingpunktes $P \in \mathfrak{F}$. Die beiden Einschneiderisse $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{F}''$ könnten natürlich noch in den zugehörigen Einschneiderichtungen aus der Bildmitte herausgezogen werden. —

Die praktische Durchführung dieses Verfahrens im dreidimensionalen Bildraum Π ist allerdings problematisch.

2.6. In der normalen Axonometrie des R^3 brauchen bekanntlich die drei Achsenbilder nicht eigens konstruiert zu werden, sondern dürfen im Prinzip frei gewählt werden — mit der bloßen Einschränkung, daß sie die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks bilden müssen [6/II, S. 93]. Im R^4 gilt nun:

Satz 1: Von den vier Achsenbildern im dreidimensionalen Bildraum einer normalaxonomischen Darstellung des R^4 dürfen — mit gewissen Einschränkungen — drei beliebig angenommen werden. Das vierte Achsenbild ist dann in den drei Normalebenen enthalten, die jeweils durch eines der angenommenen Achsenbilder auf die Verbindungsebene der beiden anderen gefällt werden können².

Seien etwa x^m, y^m, z^m die im Bildraum Π gewählten, durch einen gemeinsamen eigentlichen Punkt O^m gehenden Achsenbilder. Nach Annahme eines von O^m verschiedenen eigentlichen Punktes $X \in x^m$ lege man durch denselben die Normalebenen $\eta \perp y^m$ und $\zeta \perp z^m$ und bezeichne den Schnittpunkt von y^m und ζ mit Y , jenen von z^m und η mit Z . Im Normalriß auf die Ebene $XYZ = \tau$ bilden die Projektionen von y^m und z^m zwei Höhen des Dreiecks XYZ ; die dritte fällt daher mit dem Normalriß von x^m zusammen (vgl. den Grundriß in Abb. 1). Hieraus ist zu erkennen, daß es eine Ebene $\xi \perp x^m$ gibt, welche mit Y auch Z enthält. Die vier Ebenen ξ, η, ζ und τ bilden demnach ein Tetraeder $XYZT$ mit dem Höhenschnittpunkt O^m , dessen vierte Höhe O^mT das fehlende Achsenbild t^m darstellt. Daß die Verbindungsebene zweier Achsenbilder jeweils normal ist zur Verbindungsebene der beiden anderen, liegt auf der Hand.

Ein solches orthozentrisches Tetraeder $XYZT$ kann dann und nur dann als Bildspurtetraeder eines (reellen) vierdimensionalen orthogonalen Achsenkreuzes $(O; x, y, z, t)$ aufgefaßt werden, wenn sein Höhenschnittpunkt O^m im Inneren liegt. Gemäß Abschnitt 2, 2 erfordert dies, daß alle vier Seitenflächen spitzwinkelige Dreiecke sind, und hierauf bezieht sich die in Satz 2 erwähnte Einschränkung der Annahme. Der noch anzugebende Ursprung O liegt auf dem in O^m auf Π errichteten Lot in der Entfernung $O^mO = \pm d$, wobei $-d^2$ das gemeinsame Produkt der Höhenabschnitte $O^mX \cdot O\xi = \dots$ bedeutet.

² Dieser Strahl bildet das bei jedem Dreikant existierende bündelgeometrische Analogon zum Höhenschnittpunkt eines Dreiecks. Die vier Bündelstrahlen sind untereinander gleichberechtigt und wurden gelegentlich als „orthisches Vierkant“ bezeichnet [4, S. 615].

3. Zweidimensionale Axonometrie

3.1. Sei π eine dem Bildraum Π angehörende eigentliche Ebene, p_u ihre Ferngerade und N_u der Fernpunkt der zu π in Π gehörenden Normalenrichtung, also der Pol von p_u bezüglich des absoluten Kegelschnitts $o = \Pi \cap \omega$ von Π . Die Normalprojektion $P^m \rightarrow P^n = N_u P^m \cdot \pi$ auf die Bildebene π liefert einen Normalriß des Punktes $P \in R^4$, weil P^n direkt als Projektion von P aus der Ferngeraden q_u der zu π ganznormalen Stellung gedeutet werden kann: q_u , die absolute Polare von p_u , enthält nämlich die Zentren $M_u(\perp \Pi)$ und N_u , so daß der Sehstrahl $N_u P^m$ in der Sehebene $q_u P = M_u N_u P$ verläuft, in der auch das in Abschnitt 1, 2 erklärte Zwischenbild $P^m = M_u P \cdot \Pi$ liegt; das Endbild P^n kann daher als Treffpunkt der Sehebene mit π aufgefaßt werden.

Auch die Abbildung $P \rightarrow P^n$ ist geraden-, parallelen- und teilverhältnistreu, so daß wiederum das axonometrische Prinzip angewendet werden kann: Bei Kenntnis der Achsenbilder x^n, y^n, z^n, t^n und der zugehörigen Verkürzungsfaktoren $\lambda', \lambda'', \mu', \mu''$ kann der Bildpunkt $P^n \in \pi$ mit Benützung der kartesischen Koordinaten des Dingpunktes $P \in R^4$ durch Auflagen der verkürzten Koordinatenstrecken schrittweise „aufgebaut“ werden [5, S. 122].

3.2. Da die Projektion $P \rightarrow P^n$ nur von π abhängt, nicht aber vom Zwischenbildraum $\Pi \supset \pi$, so mag dieser der Einfachheit halber mit $O\pi$ zusammenfallen; dann ist $O^m = O$. Die in Π auftretenden Spurebenen ξ, η, ζ, τ der Koordinatenräume bilden nun allerdings kein Tetraeder, sondern ein Bündelvierflach mit dem Scheitel O . Sie verlaufen jedoch ganzparallel zu den Seitenflächen des in einer beliebigen zu Π parallelen Überebene Π_1 vorhandenen orthozentrischen Spurtetraeders $X_1 Y_1 Z_1 T_1$, und Gleiches gilt für die sechs Kanten. Die drei Gegenkantenpaare des Vierflachs $\xi\eta\zeta\tau$ sind mithin durchwegs orthogonal, also konjugiert bezüglich des von O ausstrahlenden Minimalkegels Oo .

Die Bildebene π schneidet den genannten Minimalkegel nach einem nullteiligen Kreis o , der als Zentralriß des absoluten Kegelschnitts o von Π aus O aufgefaßt werden kann; o hat den Distanzkreis δ von O zum reellen Vertreter (Mittelpunkt O^n , Radius $h = OO^n$). Das in π vorhandene Basisviereck $\tau\eta\zeta\tau$ des Vierflachs $\xi\eta\zeta\tau$ ist nach dem Gesagten ein Polviereck des nullteiligen Kreises o , d. h. ein Viereck, dessen drei Gegeneckenpaare bezüglich o konjugiert sind (antikonguiert bezüglich δ).

Für die x -Achse des kartesischen Koordinatensystems in R^4 gilt wegen $x \perp yzt$ auf Grund des Hilssatzes aus Abschnitt 1,2 zunächst $x^m \perp \xi$. Hieraus folgt nach einer bekannten Regel der darstellenden Geometrie [6/I, S. 37] für den Normalriß auf π : $x^n \perp \xi = \xi\pi$, wobei ξ auch als Bildspur des Koordinatenraums yzt angesehen werden kann. Zusammenfassend gilt demnach:

Satz 2: *Das Bildspurierteit ξyzt der vier Koordinatenräume eines vierdimensionalen orthogonalen Achsenkreuzes $(O; x, y, z, t)$ ist ein Polvierseit jenes nullteiligen Kreises δ in der Bildebene, welcher den Distanzreis δ des Ursprungs O zum reellen Vertreter hat. Die Normalrisse x^n, y^n, z^n, t^n der Achsen verlaufen normal zu den Spur geraden ξ, y, δ, t .*

3.3. Nach K. G. CH. V. STAUDT dürfen zwecks Angabe eines Polvierseits zwei Paare von Gegenecken unabhängig voneinander gewählt werden, wobei nur die Bedingung zu beachten ist, daß jedes der beiden Paare bezüglich des vorliegenden Grundkegelschnitts konjugiert sein muß; das dritte Gegeneckenpaar stellt sich dann von selbst als konjugiert heraus [3, S. 250f.]. Im gegenständlichen Fall bedeutet dies — nach Annahme des Distanzkreises δ — die Wahl zweier Paare bezüglich δ antikonjugierter Punkte $U, \bar{U}$ und $V, \bar{V}$ ($\angle UO\bar{U} = \angle VO\bar{V} = \pi/2$, vgl. Abb. 2): Das zugehörige Polvierseit besteht dann aus den Geraden $\xi = \bar{U}\bar{V}$, $\eta = U\bar{V}$, $\delta = UV$ und $t = \bar{U}\bar{V}$; für das dritte Gegeneckenpaar $W = \xi\eta$, $\bar{W} = \delta t$ gilt dann zwangsläufig $\angle W\bar{O}\bar{W} = \pi/2$. Dies steht in Einklang mit der in Abschnitt 2,2 erwähnten Tatsache, daß ein orthozentrisches Tetraeder bereits durch das Vorhandensein von zwei Paaren orthogonaler Gegenkanten hinreichend gekennzeichnet ist; das dritte Gegenkantenpaar ist notwendig ebenfalls orthogonal.

3.4. Nach Ermittlung eines solchen Vierseits ξyzt lassen sich gemäß Satz 2 die Achsenbilder $x^n \perp \xi$, $y^n \perp \eta$, $z^n \perp \delta$ und $t^n \perp t$ durch die Mitte O^n des Distanzkreises δ unmittelbar eintragen (Abb. 2). Die Bestimmung der zugehörigen Verkürzungen erfordert allerdings noch einige Umstände.

Zunächst kann man im Bildraum $\Pi = O\pi$ die Zwischenbilder x^m, y^m, z^m und t^m der Achsen aufsuchen, indem man die Antipole $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{T}$ von ξ, η, δ, t bezüglich δ mit $O^m = O$ verbindet. Diese Spurpunkte bilden ein *Polviereck* von δ , dessen Seiten zur Kontrolle durch je eine Ecke des Polvierseits gehen müssen: Die Polare von $W = \xi\eta$ etwa verbindet die Punkte $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ und enthält den zu W konjugierten Punkt $\bar{W}$.

Anschließend mag man dann das in einer Überebene $\Pi_1 \parallel \Pi$ vorhandene orthozentrische Spurtetraeder $X_1 Y_1 Z_1 T_1$ zuhelfen nehmen, dessen translationskongruenter Normalriß $X_1^m Y_1^m Z_1^m T_1^m$ auf Π die bereits bekannten Achsenbilder x^m, y^m, z^m, t^m zu Höhen hat. Nach Annahme etwa des Zwischenbildes $X_1^m \in x^m$ sind die Tetraederkanten durch bloßes Parallelenziehen leicht zu ergänzen: $X_1^m Y_1^m \parallel O\bar{W}$

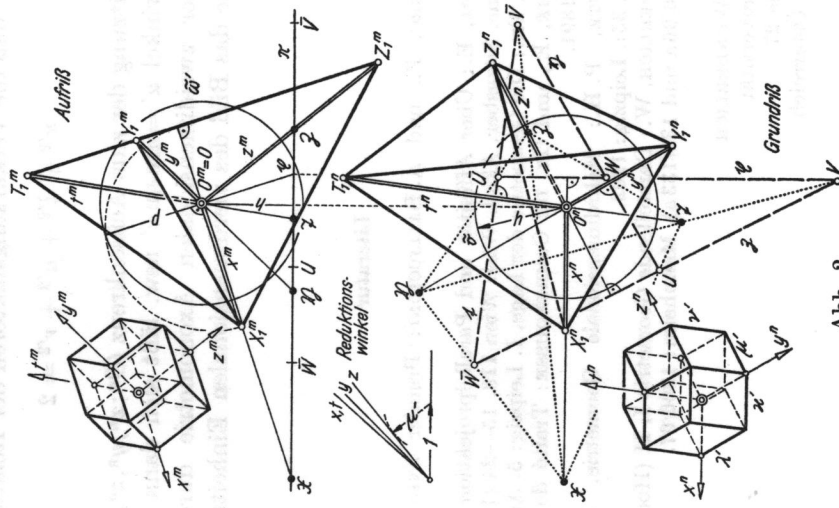


Abb. 2

usf. Alle räumlichen Konstruktionen sind natürlich zeichnerisch wieder in zugeordneten Normalrisen auszuführen, wobei der Normalriß P^n eines Punktes $P^m \in \Pi$ auf π in Abb. 2 als „Grundriß“ angesprochen wurde; der zugehörige „Aufriß“ wurde so eingeführt, daß die Achse x^m dort unverzerrt und die Ebene $\xi = O\xi$ projizierend erscheint. Dann ist die Grundkugel $\bar{\omega}'$ zu ermitteln, für welche $X_1^m Y_1^m Z_1^m T_1^m$ ein Antipoltetraeder ist; ihr Radius d gibt den Abstand zwischen Π und Π_1 an.

Durch Vergleich der wahren Länge des Höhenabschnitts OX_1 , bestimmt durch $(OX_1)^2 = (O^m X_1^m)^2 + d^2$, mit seiner Bildstrecke $O^n X_1^n$ ergibt sich schließlich die Verkürzung $\kappa' = O^n X_1^n : OX_1$. Die übrigen Verkürzungen $\lambda' = O^n Y_1^n : OY_1$ usw. sind ähnlich zu finden.

Ohne Beweis — der mittels der ein orthonomiertes Vierbein festlegenden orthogonalen 4×4 -Matrix (e_{ik}) leicht zu führen wäre — sei vermerkt, daß die Verkürzungsfaktoren der Relation

$$\kappa'^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 2 \quad (4)$$

genügen.

Mit Benützung der zum Achsenkreuz $(O^n; x^n, y^n, z^n, t^n)$ gehörigen Reduktionswinkel $\alpha' = \arcsin \kappa'$ usw. läßt sich dann das Aufbauverfahren der zweidimensionalen Axonometrie durchführen. In Abb. 2 wurde das Bild des vierdimensionalen Einheitswürfels konstruiert.

Literatur

- [1] COUDERC, P., und A. BALLICIONI: Premier livre du tétraèdre. Paris: 1935.
- [2] KRUPPA, E.: Über Affinität und Parallelprojektion im vierdimensionalen Raume. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 118, 15–24 (1909).
- [3] REYE, TH.: Die Geometrie der Lage, I. Leipzig: 5. Aufl. 1909.
- [4] ROUCHÉ, E., und CH. DE COMBEROUSSE: Traité de géométrie, II. Paris: 6e éd. 1891.
- [5] SCHOUTE, P. H.: Mehrdimensionale Geometrie, I. (Sammlung Schubert, Bd. 35), Leipzig: 1902.
- [6] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie I, II (Hochschultaschenbücher, Bd. 96/96a und 133/133a). Mannheim: 1966/67.

Prof. Dr. W. WUNDERLICH
Technische Universität
Gußhausstraße 27
A-1040 Wien, Österreich