

### Elementarer Zugang zur hyperbolischen Geometrie

Moderne Lehrpläne enthalten gelegentlich die Anregung, im Rahmen des Mathematikunterrichts an höheren Schulen in den Abschlussklassen auch auf die Gedankenwelt der nichteuklidischen Geometrien einzugehen. Wenngleich dies für das Gros der Schüler wohl als Hochstapelei anzusehen wäre, mag es in interessierten Arbeitsgemeinschaften nicht ganz aussichtslos sein, wenigstens eine Ahnung der Ideen zu vermitteln. Es erhebt sich dabei allerdings die Frage, wie man ohne ausreichende Vorkenntnisse aus projektiver Geometrie einen möglichst elementaren Zugang finden kann<sup>1)</sup>.

Rein axiomatische Entwicklungen scheiden als zu schwierig und unanschaulich zweifellos von vornherein aus, obwohl die Stellung des euklidischen Parallelenpostulats natürlich einführend grob skizziert werden muss. Anschliessend wird man sich aber auf das Operieren in geeigneten *Modellen* nichteuklidischer Ebenen konzentrieren dürfen, um die von der euklidischen Ebene abweichenden Phänomene hervorzuheben.

Für die *elliptische Ebene* bietet sich hier zwanglos das geläufige *Kugelmodell* an, bei welchem die Grosskreise einer euklidischen Kugel  $\Omega$  als «Geraden» und die Antipodenpaare von  $\Omega$  als «Punkte» angesprochen werden. Irgendzwei «Geraden» haben stets einen «Punkt» gemeinsam, so dass es also – im Gegensatz zum Postulat Euklids – überhaupt *keine Parallelen* (d. h. Geradenpaare ohne Schnittpunkt) gibt. Die Längen- und Winkelmessung auf der Kugel erfolgt bekanntlich durchwegs euklidisch, so dass keine grundsätzlichen Schwierigkeiten auftreten, sondern eher ein willkommener Anlass zur Behandlung der sphärischen Trigonometrie vorliegt. *Kongruenztransformationen* (also sämtliche Längen und Winkel erhaltende Abbildungen von  $\Omega$  auf sich selbst) sind die euklidischen Drehungen um die Durchmesser von  $\Omega$ ; sie bilden eine dreiparametrische Gruppe, die sich aus den Spiegelungen an den Durchmesser-ebenen von  $\Omega$  erzeugen lässt. Jede Spiegelung kann dabei selbst als Drehung aufgefasst werden, nämlich um den zur Spiegelebene normalen Durchmesser durch  $180^\circ$ ; eine Unterscheidung zwischen gleich- und gegensinnig-kongruenten Transformationen fällt mithin in der elliptischen Ebene weg. Die Kreislehre ist unschwer zu erledigen.

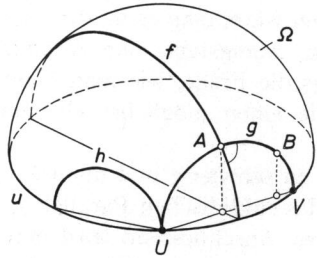
Bei der *hyperbolischen Ebene* ist die Frage nach einem geeigneten Modell nicht ohne weiteres zu beantworten. Das bevorzugte *projektive Modell* nach Cayley-Kleinschem Muster, das etwa R. Baldus [1] verwendet, verlangt Vertrautheit mit Doppelverhältnissen, Kollineationen und Imaginärgeometrie und ist daher für die Schule kaum passend. Das *konforme Modell* von H. Poincaré, das H. Meschkowski [3] und H. Zeitler [4] benutzen, hat zwar den Vorteil euklidischer Winkelmetrik, doch verursacht der Nachweis der Längentreue von Spiegelungen (die durch Inversionen an gewissen euklidischen Kreisen repräsentiert werden) ziemliche Umstände. Diese Schwierigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man auch hier wieder auf ein *Kugel-*

---

<sup>1)</sup> Der Verfasser wurde zur Beschäftigung mit dieser Problematik veranlasst, als er beim Innsbrucker Mathematikertag am 7. 10. 1974 ein einschlägiges Referat vor Mathematiklehrern zu halten hatte.

modell zurückgreift, allerdings um den Preis, etwas Raumgeometrie treiben zu müssen, was aber nicht unbedingt als Nachteil anzusehen ist.

Das betreffende Kugelmodell, das schon F. Klein [2] erwähnt, besteht aus einer euklidischen *Halbkugel*  $\Omega$ , berandet durch einen Grosskreis  $u$ . Als «Punkte» der hyperbolischen Ebene gelten dabei die Punkte von  $\Omega$  unter Ausschluss der Randpunkte, als «Geraden» die zu  $u$  normalen Halbkreise von  $\Omega$  (Fig. 1). Wie im Normal-



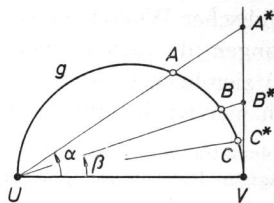
Figur 1. Kugelmodell der hyperbolischen Ebene. Von den «Geraden»  $f, g, h$  sind  $f$  und  $g$  schneidend,  $g$  und  $h$  parallel,  $h$  und  $f$  überparallel.

riss auf die Randkreisebene ohne weiteres zu erkennen ist, gibt es durch einen Punkt  $P$  unendlich viele «Geraden», die eine gegebene ( $P$  nicht enthaltende) «Gerade»  $g$  schneiden, und ebenso unendlich viele, welche dies nicht tun. Die beiden Mengen werden durch zwei ausgezeichnete «Gerade» getrennt, die mit  $g$  den einen oder den anderen Randpunkt gemeinsam haben; sie werden als die beiden durch  $P$  gehenden «Parallelen» zu  $g$  bezeichnet, während die übrigen  $g$  nicht schneidenden Geraden «überparallel» zu  $g$  heissen. Die Abweichung vom euklidischen Parallelenaxiom und zur Situation in der elliptischen Ebene liegt auf der Hand.

Die *Winkelmetrik* wird wieder durch die euklidische Winkelmessung auf  $\Omega$  erklärt. Zwei «Geraden» schneiden einander insbesondere unter rechtem Winkel, wenn die sie repräsentierenden Halbkreise so gelegen sind, dass die Ebene des einen den Pol der anderen (bezüglich  $\Omega$ ) enthält. Zwei Parallele bilden einen Winkel vom Betrag Null. Überparallele schliessen keinen Winkel ein, besitzen dafür aber ein «Gemeinlot».

Die *Längenmetrik* weicht demgegenüber von der euklidischen stark ab. Seien  $U$  und  $V$  die Randpunkte der (eindeutig bestimmten) Verbindungs-«Gerade»  $g$  zweier Punkte  $A$  und  $B$ , und  $\alpha = \sphericalangle VUA$ ,  $\beta = \sphericalangle VUB$  die «Erhebungswinkel» dieser Punkte (Fig. 2). Die hyperbolische Länge der von  $g$  getragenen (orientierten) Strecke  $AB$  wird dann definiert durch

$$\overline{AB} = \ln \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (1)$$



Figur 2. Zur hyperbolischen Streckenmessung.

Man bestätigt sofort die *Additivität* dieser Streckenmessung, indem man für drei Punkte  $A, B, C$  von  $g$  bei beliebiger Reihenfolge die Relation

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \tag{2}$$

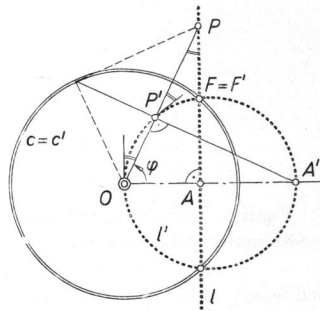
nachweist. Rückt bei der Strecke  $AB$  entweder  $A$  nach  $U$  oder  $B$  nach  $V$ , dann wird wegen  $\alpha = \pi/2$  bzw.  $\beta = 0$  in (1) das Längenmass gleich  $\infty$ ; die Randpunkte der Halbkugel  $\Omega$  spielen also die Rolle von «unendlich fernen Punkten» der hyperbolischen Ebene. – Eine nützliche Modifikation der Streckenformel (1) besteht in folgendem: Projiziert man die Streckenenden  $A$  und  $B$  aus  $U$  auf die in  $V$  berührende Tangente des Halbkreises  $g$  nach  $A^*$  bzw.  $B^*$  (Fig. 2), so kann man den Quotienten  $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta$  in (1) durch das Teilverhältnis  $(A^*B^*V) = \overline{VA^*} \cdot \overline{VB^*}$  ersetzen und hat

$$\overline{AB} = \ln (A^*B^*V) . \tag{3}$$

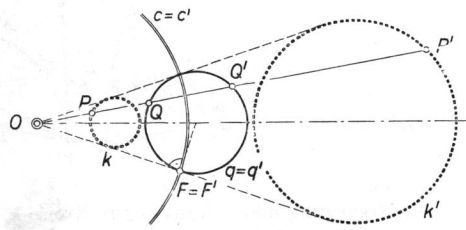
Zum Nachweis der Existenz von Kongruenztransformationen benötigt man den auch sonst wichtigen Begriff der *Inversion*, deren Eigenschaften zunächst kurz zusammengestellt werden sollen. In der (euklidischen) Ebene versteht man unter der Inversion an einem Kreis  $c$  (Mittelpunkt  $O$ , Radius  $a$ ) die eindeutige Abbildung, die einem Punkt  $P \neq O$  jenen Punkt  $P'$  auf dem Strahl  $OP$  zuordnet, welcher der Polare von  $P$  bezüglich  $c$  angehört. In Polarkoordinaten  $r, \varphi$  lauten die Transformationsgleichungen mithin:

$$r' = \frac{a^2}{r}, \quad \varphi' = \varphi . \tag{4}$$

Wegen der Gleichberechtigung der Zentralabstände  $\overline{OP} = r$  und  $\overline{OP'} = r'$  sind entsprechende Punkte vertauschbar, d.h. dem Punkt  $Q = P'$  wird der Punkt  $Q' = P$  zugewiesen. Diese «Transformation durch reziproke Radien» bildet das Innere von  $c$  auf das Aussengebiet von  $c$  ab und umgekehrt, wobei sämtliche Punkte von  $c$  fest bleiben. Jeder Durchmesser von  $c$  wird in sich übergeführt, während eine nicht durch  $O$  gehende Gerade  $l$  (ansetzbar durch  $r = b / \cos \varphi$ ) in einen Kreis  $l'$  ( $r' = a^2 / b \cdot \cos \varphi$ ) verwandelt wird, der das Inversionszentrum  $O$  in der Richtung von  $l$  passiert (Fig. 3). Jeder Orthogonalkreis  $q$  von  $c$  wird – mit Rücksicht auf den Potenzsatz  $\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = \overline{OF}^2 = a^2$  – in sich selbst transformiert, während ein Kreis  $k$  allgemeiner Lage in einen anderen Kreis  $k'$  übergeht. Zum Nachweis übe man in Figur 4 auf den Orthogonalkreis



Figur 3. Transformation einer Geraden durch reziproke Radien.



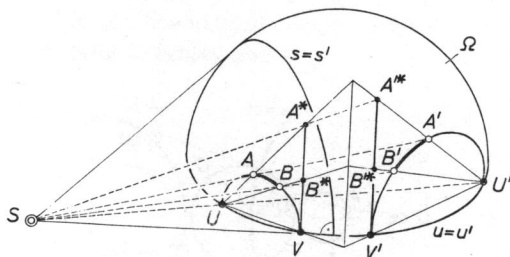
Figur 4. Inverse Kreise.

$q$  die zentrische Ähnlichkeit  $\tilde{r} = \lambda r$  aus; für den so gewonnenen Kreis  $k$  hängt dann das inverse Bild  $k'$  mit  $q' = q$  durch die zentrische Ähnlichkeit  $\tilde{r}' = r'/\lambda$  zusammen, ist also ebenfalls ein Kreis<sup>2)</sup>. – Neben dieser *Kreistreue* besitzt die Inversion auch noch die Eigenschaft der *Winkeltreue*. Zum Beweis suche man zu den Tangenten  $t_1$  und  $t_2$  im Schnittpunkt  $P$  zweier Kurven die entsprechenden Kreise  $t'_1$  und  $t'_2$  auf: Sie bilden in  $O$  und daher auch in  $P'$  den gleichen Winkel wie  $t_1$  und  $t_2$ .

Dehnt man die Abbildungsvorschrift (4) auf den Raum aus, so gelangt man zur Inversion an einer Kugel  $\Gamma$  (Mittelpunkt  $O$ , Radius  $a$ ). Diese *räumliche Inversion* ist, wie die Rotation der Figuren 3 und 4 um die jeweilige Symmetrieachse erkennen lässt, *kugeltreu*, daher auch *kreistreu*, und nach wie vor *winkeltreu*, was man genau so wie vorhin zeigt.

Als «*Spiegelung*» der hyperbolischen Ebene an einer «Geraden»  $s$  ist nun in dem hier verwendeten Modell – das der Kenner bereits als Ausschnitt aus dem Poincaré'schen Konformmodell des hyperbolischen Raumes identifiziert hat – die Inversion an jener Orthogonalkugel  $\Sigma$  von  $\Omega$  anzusehen, welche mit  $\Omega$  den Halbkreis  $s$  gemein hat; das Inversionszentrum  $S$  (der Mittelpunkt von  $\Sigma$ ) liegt natürlich in der Randkreisebene (Fig. 5). Wegen der Orthogonalität gehen bei dieser Inversion die Halbkugel  $\Omega$  und ihr Randkreis  $u$  in sich über, ferner wird auf Grund der Kreis- und Winkeltreue jeder  $\Omega$  angehörende Orthogonalhalbkreis von  $u$  wieder in einen solchen übergeführt. Die Spiegelung ist daher im hyperbolischen Sinn *geradentreu* und naturgemäß *winkeltreu*. Ihre *Längentreue* ist durch Betrachtung einer Strecke  $AB$  und ihres Spiegelbildes  $A'B'$  unschwer einzusehen (Fig. 5): Die Punktepaare  $A, A'$  und  $B, B'$  liegen auf Strahlen durch das Inversionszentrum  $S$ , ebenso die zugehörigen Randpunkte  $U, U'$  und  $V, V'$  sowie die gemäss Figur 2 hinzugefügten Hilfspunkte  $A^*, A'^*$  und  $B^*, B'^*$ ; wegen der parallelen Lage der Halbkreistangenten in  $V$  und  $V'$  besteht nun die Teilverhältnisgleichheit  $(A^*B^*V) = (A'^*B'^*V')$ , woraus über (3) die behauptete Abstandsgleichheit  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  folgt. – Abschliessend wäre noch zu ergänzen, dass zu den Spiegelungen in Gestalt der betrachteten Inversionen an Orthogonalkugeln von  $u$  als Grenzfälle auch noch die euklidischen Spiegelungen an den Normalebene von  $u$  hinzuzunehmen sind.

Bei allen diesen «Spiegelungen» ist festzustellen, dass die «Verbindungsstrecke» entsprechender Punkte  $P, P'$  zur «Spiegelachse»  $s$  normal ist und durch diese hal-



Figur 5. Zum Nachweis der Längentreue einer Spiegelung.

<sup>2)</sup> Zur Ergänzung dieser Aussage für Kreise  $k$ , die  $O$  umschliessen, gehe man von einem Kreis  $p$  aus, der  $c$  in den Endpunkten eines Durchmessers schneidet; ihm entspricht – wieder auf Grund des Potenzsatzes – der zu  $p$  bezüglich des genannten Durchmessers spiegelbildlich angeordnete Kreis  $p'$ .

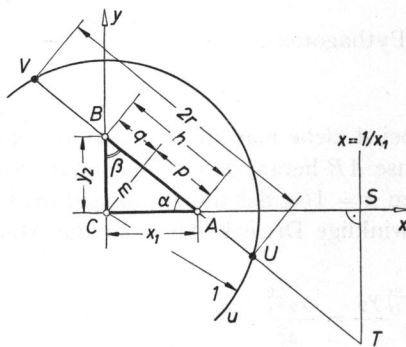
biert wird. Durch Zusammensetzung solcher Spiegelungen gelangt man zu den allgemeinsten *Kongruenzabbildungen* der hyperbolischen Ebene, wobei diesmal – im Gegensatz zu den Verhältnissen in der elliptischen Ebene – zwischen gleich- und gegensinnig-kongruenten unterschieden werden kann, je nachdem ob die Anzahl der komponierten Spiegelungen gerade oder ungerade ist. Ein dem Randkreis  $u$  aufgetragter Umlaufsinn bleibt dabei erhalten bzw. wird umgekehrt.

Aufschlussreiches Übungsmaterial würde die hyperbolische *Kreislehre* bieten. Man könnte alle drei Kreisarten in einheitlicher Weise gewinnen, indem man einen festen Punkt an sämtlichen «Geraden» eines eigentlichen Büschels, eines Parallelenbüschels bzw. eines uneigentlichen Büschels spiegelt, wobei letzteres als «Normalenschar» einer festen «Geraden» einzuführen wäre. Die solcherart als Ort sämtlicher Spiegelpunkte erzeugten «eigentlichen Kreise», «Grenzkreise» bzw. «Abstandskreise» werden im vorliegenden Modell durch euklidische Kreise bzw. Kreisbögen auf der Halbkugel  $\Omega$  repräsentiert, welche keinen, einen bzw. zwei (reelle) Randpunkte aufweisen.

Das Operieren mit dem Kugelmodell schult zwar bestens die Raumanschauung, besitzt aber den unleugbaren Nachteil, kaum unmittelbar ausführbar zu sein. Will man auf einer ebenen Fläche zeichnen – und zwar über blossen Skizzen hinausgehend –, so muss man Methoden der darstellenden Geometrie einsetzen. Der Normalriss auf die Randkreisebene führt so auf das projektive Modell nach Cayley-Klein [1], während die stereographische Projektion aus einem Randpunkt – die sich als räumliche Inversion deuten lässt – das konforme Modell nach Poincaré liefert [3, 4].

Abschliessend mag noch kurz der Weg zur *hyperbolischen Trigonometrie* gewiesen werden. Es handelt sich um die Herleitung der Beziehungen zwischen den Stücken eines *rechtwinkligen Dreiecks*  $ABC$ , dessen Winkel mit  $\alpha, \beta, \gamma = \pi/2$  und dessen (hyperbolisch ausgemessene) Seiten mit  $a, b, c$  bezeichnet seien. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn man der Einfachheit halber die rechtwinklige Ecke  $C$  im Scheitel der Halbkugel  $\Omega$  annimmt (Fig. 6), wohin sie ja durch eine geeignete Kongruenztransformation gebracht werden kann. Die «geographischen Breiten»  $2\varphi$  und  $2\psi$  von  $A$  bzw.  $B$  hängen mit den Dreieckskatheten zufolge (1) durch die Relationen

$$\cot \varphi = e^b, \quad \cot \psi = e^a \quad (5)$$



Figur 6. Zur Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks.

zusammen. In einem dem Dreieck  $ABC$  angepassten kartesischen Koordinatensystem  $O(x, y, z)$  haben dann bei Verwendung des Halbkugelradius als Längeneinheit die Punkte  $A$  und  $B$  die Koordinaten:

$$\begin{aligned} A \dots x_1 &= \cos 2\varphi = \operatorname{th} b, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \sin 2\varphi = 1/\operatorname{ch} b; \\ B \dots x_2 &= 0, \quad y_2 = \cos 2\psi = \operatorname{th} a, \quad z_2 = \sin 2\psi = 1/\operatorname{ch} a. \end{aligned} \quad (6)$$

Für den Ursprungsabstand  $m$  der Ebene des die Hypotenuse  $AB$  tragenden Halbkreises findet man aus Figur 6, die den Normalriss auf die Randkreisebene  $z = h$  darstellt,

$$m = \frac{x_1 y_2}{h} \quad \text{mit} \quad h^2 = x_1^2 + y_2^2, \quad (7)$$

woraus sich der Halbkreisradius  $r$  über

$$r^2 = 1 - m^2 = \frac{x_1^2 + y_2^2 - x_1^2 y_2^2}{x_1^2 + y_2^2} = \frac{1 - z_1^2 z_2^2}{h^2} \quad (8)$$

ergibt. Die durch die Höhe erzeugten Abschnitte der Hypotenusenprojektion  $h$  haben auf Grund ähnlicher Dreiecke die Längen

$$p = \frac{m x_1}{y_2}, \quad q = \frac{m y_2}{x_1}. \quad (9)$$

Nun erhält man für die zur hyperbolischen Ausmessung der Hypotenuse  $AB$  gemäss (1) benötigten Erhebungswinkel die Formeln

$$\operatorname{tg}(VUA) = \frac{z_1}{r-p} = \frac{y_2 z_1}{r y_2 - m x_1}, \quad \operatorname{tg}(VUB) = \frac{z_2}{r+q} = \frac{x_1 z_2}{r x_1 + m y_2}. \quad (10)$$

Mit Rücksicht auf (6) bis (10) hat man daher zunächst

$$e^c = \frac{\operatorname{tg}(VUA)}{\operatorname{tg}(VUB)} = \frac{y_2 z_1}{x_1 z_2} \cdot \frac{r x_1 + m y_2}{r y_2 - m x_1} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\sqrt{1 - z_1^2 z_2^2} + 1 - z_2^2}{\sqrt{1 - z_1^2 z_2^2} - 1 + z_1^2}. \quad (11)$$

Der Übergang zu  $e^c + e^{-c}$  führt dann nach einigen Umformungen auf

$$e^c + e^{-c} = \frac{2}{z_1 z_2}, \quad (12)$$

und damit über (6) auf den «hyperbolischen Pythagoras»:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b. \quad (13)$$

Zur Berechnung des Dreieckswinkels  $\alpha$  bei  $A$  ziehe man die Tangenten  $AS$  und  $AT$  an die Kathete  $AC$  bzw. an die Hypotenuse  $AB$  heran, deren Spurpunkte  $S$  und  $T$  in der Randkreisebene auf der Spurgeraden  $x = 1/x_1$  der die Halbkugel in  $A$  berührenden Ebene liegen (Abb. 6). Das rechtwinklige Dreieck  $AST$  hat die Abmessungen

$$\overline{AS} = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{z_1}{x_1} \quad \text{und} \quad \overline{ST} = \frac{(1 - x_1^2) y_2}{x_1^2} = \frac{y_2 z_1^2}{x_1^2}. \quad (14)$$

Der gesuchte Winkel  $\alpha = \sphericalangle TAS$  ergibt sich dann aus  $\operatorname{tg} \alpha = \overline{ST}/\overline{AS} = y_2 z_1 / x_1$ , also mit Rücksicht auf (6) aus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}. \quad (15)$$

Unter Hinzunahme der analogen Formel  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{th} b / \operatorname{sh} a$  können dann alle übrigen Relationen im rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  gefolgert werden. Sie lassen sich bekanntlich in einer modifizierten «Neperschen Regel» zusammenfassen [3].

W. Wunderlich, Technische Hochschule Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. BALDUS-F. LÖBELL: *Nichteuklidische Geometrie* (Sammlg. Göschen, Bd. 970/970 a). 4. Aufl. (Berlin 1964).
- [2] F. KLEIN-H. ROSEMAN: *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie* (Grundlehren d. math. Wiss., Bd. 28). (Berlin), 3. Aufl. 1928, Nachdruck 1968.
- [3] H. MESCHKOWSKI: *Nichteuklidische Geometrie*. 4. Aufl. (Braunschweig 1971). – Siehe auch: *Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie*. *El. Math.* 7, 130–132 (1952).
- [4] H. ZEITLER: *Hyperbolische Geometrie* (Beiträge f. d. math. Unterr., Bd. 3). (München 1970).