

Walter Wunderlich, Wien

Hinlegte bis zum 1. Februar 1938 bei der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Wien für die Prüfung der Dissertation vor.

ÜBER DIE TORSEN, DEREN ERZEUGENDEN ZWEI ACHSEN- PARALLELE DREHPARABOLOIDE BERÜHREN

Zusammenfassung. Es werden jene bemerkenswerten Kurven auf dem Drehparaboloid betrachtet, die im Normalriff auf die Scheiteltangentialebene als Epi-, Hypo- oder Pseudozykloiden erscheinen, in Grenzfällen auch als gleiche Zykloiden oder logarithmische Spiralen. Es zeigt sich, daß sämtliche Tangenten und Schmiegebenen einer solchen Kurve ein zweites Drehparaboloid berühren, und zwar in den Punkten einer Kurve, die zur Ausgangskurve affin ist. Umgekehrt erfaßt man auf diese Weise alle (nicht-trivialen) Torsen, die in der Kongruenz der gemeinsamen Tangenten zweier koaxialer oder achsenparalleler Drehparaboloiden enthalten sind. Für die betrachteten Kurven, unter denen sich übrigens die geodätischen Linien des Drehparaboloids finden, wird abschließend auch die Polartorse ermittelt, die sich als Verbindungstorse zweier Zykloiden erweist.

§ 1. Ausgangssituation

Unter Verwendung kartesischer Normalkoordinaten x, y, z wird auf dem *Drehpseudoparaboloid*

$$\varPhi \dots x^2 + y^2 = 2pz \quad (1.1)$$

eine Kurve k betrachtet, deren Normalprojektion auf die xy -Ebene (»Grundriß«) eine im Ursprung zentrierte gespitzte Radlinie ist. Nach geeigneter Wahl der x -Richtung kann diese Flächenkurve mit Benützung eines Winkelparameters u angesetzt werden durch:

$$k \begin{cases} x = a(n \cos u + \cos nu), \\ y = a(n \sin u + \sin nu), \\ z = \frac{a^2}{2p} [(n^2 + 1) + 2n \cos(n - 1)u]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Bei reellem $n \neq \pm 1$ ist der Grundriß für $n > 0$ eine *Epizykloide*, für $n < 0$ eine *Hypozykloide*. Reziproke Kennwerte n und $n' = 1/n$ liefern dieselbe Annahme, wenn $a' = na$ gewählt und $u' = mu$ gesetzt wird, so daß man

$|n| > 1$ voraussetzen dürfte. Für rationale Werte $n = \mu/\nu$ (μ, ν ganz und teilerfremd) ist k rational-algebraisch und hat die Ordnung $N = 2 \max(|\mu|, |\nu|, |\mu - \nu|)$, wie der Übergang zum neuen Parameter

$$t = \exp(iu/\nu)$$
 lehrt.¹

Die dem Paraboloid Φ längs k umschriebene Torse Θ wird eingehüllt von den Tangentialebenen

$$\begin{aligned} aX(n \cos u + \cos nu) + aY(n \sin u + \sin nu) &= \\ &= pZ + \frac{a^2}{2} [(n^2 + 1) + 2n \cos(n - 1)u]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Θ ist zu k bezüglich Φ polar und daher im algebraischen Fall von der Klasse N. Die zu einem Punkt P von k gehörige Tangente und die durch P gehende Erzeugende von Θ bilden ein Paar konjugierter Flächentangenten von Φ und erscheinen daher im Grundriß orthogonal. Hieraus folgt, daß der Grundriß der Gratlinie l von Θ mit der Evolute des Grundrisses von k zusammenfällt. Nach einem bekannten Satz über Radlinien ist aber die Evolute einer Zykloide zu dieser ähnlich [3, S. 105]. Der Ähnlichkeitsfaktor hat dabei den Wert $m = (n - 1)/(n + 1)$; er bedeutet den Quotienten der Zentralabstände der Scheitel und Spitzen für beide Zykloiden. — Zur analytischen Ermittlung der Gratlinie l benötigt man neben (1.3) noch die erste und zweite Ableitung dieser Gleichung nach u ; auf Grund einfacher Umformungen können diese Ableitungen ersetzt werden durch

$$\begin{aligned} X \sin \frac{n+1}{2}u - Y \cos \frac{n+1}{2}u &= (n-1)a \sin \frac{n-1}{2}u, \\ X \cos \frac{n+1}{2}u + Y \sin \frac{n+1}{2}u &= \frac{(n-1)^2}{n+1}a \cos \frac{n-1}{2}u. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Aus (1.3) und (1.4) erhält man dann für die Gratlinie l der Torse Θ die Parameterdarstellung:

$$\begin{cases} X = ma(n \cos u - \cos nu) & \text{mit } m = \frac{n-1}{n+1}, \\ Y = ma(n \sin u - \sin nu), \\ Z = \frac{a^2}{2p} [(n^2 - 4n + 1) - 2n \cos(n - 1)u]. \end{cases} \quad (1.5)$$

¹ In diesem Fall enthalten die Kurven k der ersten Art unter der Festsetzung $\mu > \nu > 0$ ν -fach die absoluten Punkte der xy -Ebene; jene der zweiten Art bestehen hingegen unter der Festsetzung $-\mu > \nu > 0$ den Fernpunkt der z -Achse zum 2ν -fachen Punkt.

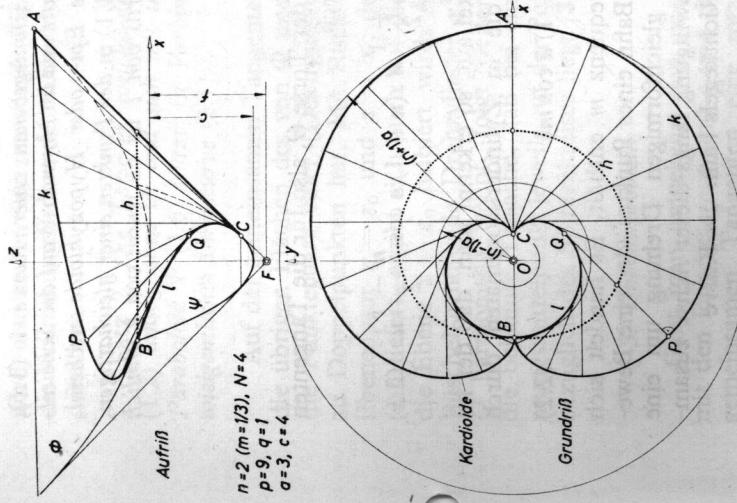


Fig. 1

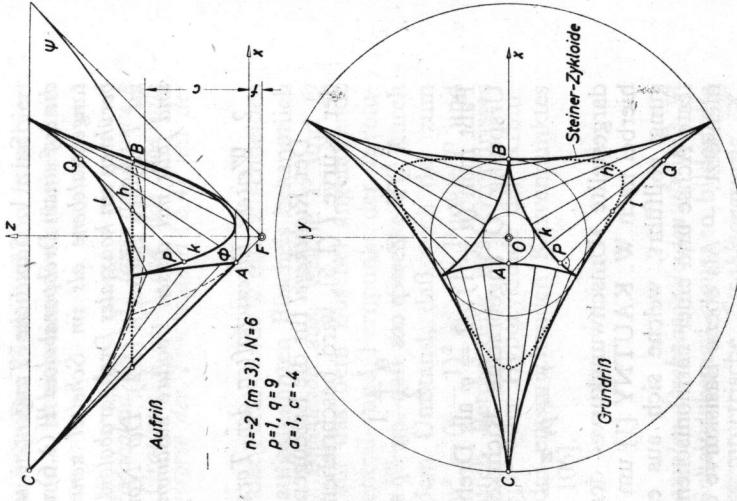


Fig. 2

Wie leicht nachzuprüfen ist, verläuft diese Kurve l auf dem Drehparaboloid

$$(1.6) \quad \Psi \dots X^2 + Y^2 = 2q(Z + c) \text{ mit } q = m^2 p \text{ und } c = 2na^2/p.$$

Die Kurven k und l sind mithin offenbar von gleicher Art. Genauer gesagt: Der zum Parameterwert u gehörige Punkt von k geht in den zu $u + \delta$ gehörigen Punkt von l durch die Affinität

$$\begin{aligned} X(u + \delta) &= m[x(u) \cos \delta - y(u) \sin \delta], \\ Y(u + \delta) &= m[x(u) \sin \delta + y(u) \cos \delta], \\ Z(u + \delta) &= z(u) - c \text{ mit } \delta = \pi/(n-1) \end{aligned} \quad (1.7)$$

über. Man vergleiche hierzu die Figuren 1 und 2, welche die Annahmen $n = 2$ bzw. $n = -2$ illustrieren.

Faßt man jetzt die Kurve l als die primäre und die Kurve k als die sekundäre auf, so hat man

Satz 1. Sämtliche Tangenten und Schmiegebenen einer Kurve l (1.5), die auf einem Drehparaboloid Ψ (1.6) verläuft und im Normalriff auf die Scheitel-tangentialebene als im Scheitel zentrierte Epi- oder Hypozykloide erscheint, berühren ein koaxiales Drehparaboloid Φ (1.1) in den Punkten einer gleichartigen, zu l affinen Kurve k (1.2). Der Normalriff von l ist zu jenem von k ähnlich und fällt mit dessen Evolute zusammen.

2. Weitere Eigenschaften der Torse Θ

Der Richtkegel für die Erzeugenden der Torse Θ , also für die Tangenten der Kurve l (1.5), wird beschrieben durch

$$\dot{X} : \dot{Y} : \dot{Z} = p \cos \frac{n+1}{2} u : p \sin \frac{n+1}{2} u : (n+1) a \cos \frac{n-1}{2} u. \quad (2.1)$$

Faßt man $(n+1)u/2 = \varphi$ als Drehwinkel auf, so erkennt man, daß der im Ursprung O angebrachte Richtkegel die in Zylinderkoordinaten durch

$$r = p, z = (n+1) a \cos m\varphi \quad (2.2)$$

dargestellte »Umschwingkurve« der Frequenz m enthält. Es handelt sich hierbei nach W. KAUTNY [1] um die Bahn eines Punktes, der eine Bewegung vollführt, welche sich aus einer gleichförmigen Drehung um eine feste Achse und einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse zusammensetzt. — Als ebene Basiskurve des Richtkegels kann die Kurve

$$r = \frac{p}{\cos m\varphi}, z = (n+1) a \quad (2.3)$$

dienen; es ist dies eine sogenannte »Ährenkurve«, bekannt als Polarreziproke einer Epi- bzw. Hypozykloide [3, S. 108].

Mit der Fernkurve des Richtkegels steht die uneigentliche Leitkurve der Torse Θ zur Verfügung. Eine weitere (ebene) Leitkurve h ergibt sich im Ort der Halbierungspunkte der Erzeugendestrecken PQ zwischen den Paraboloiden Φ und Ψ ; sie wird beschrieben durch

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}(x+X) = \frac{a}{n+1}(n^2 \cos u + \cos mu), \\ y_0 = \frac{1}{2}(y+Y) = \frac{a}{n+1}(n^2 \sin u + \sin mu), \\ z_0 = \frac{1}{2}(z+Z) = \frac{a^2}{2p}(n-1)^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Es handelt sich um eine in der Ebene des Φ und Ψ gemeinsamen Parallelkreises verlaufende Epi- bzw. Hypotrochoid, die durch Flachpunkte ausgezeichnet ist, nämlich an jenen Stellen, wo l von der Ebene $z = z_0$ berührt

wird, also in den Spitzten von k (Fig. 1 und 2). Der Grundriff von h halbiert die Krümmungsradien der Bildzykloide von k , ist also eine »Zwischenevolute« derselben.

Satz 2. Die Torse Θ , welche dem Paraboloid Φ (1.1) längs der Kurve k (1.2) umschrieben ist und sich mit ihrer Grattlinie l (1.5) auf das coaxiale Paraboloid Ψ (1.6) stützt, ist Verbindungstorse der Trochoiden h (2.4) mit der un-eigentlichen Ährenkurve (2.1).

Auf der gemeinsamen Tangente PQ der Paraboloider Φ und Ψ schneiden die übrigen Flächen des von Φ und Ψ aufgespannten Büschels bekanntlich die Punktpaare einer (Desarguesschen) *Involution* aus, welche P und Q zu Doppelpunkten hat. Mit Rücksicht auf das dem Büschel angehörende Ebenenpaar $z = z_0$ und $z = \infty$, das Zentral- und Fernpunkt der Involution liefert, ergibt sich auch auf diesem Wege, daß die Strecke PQ durch die Ebene $z = z_0$ halbiert wird. Aus dem Umstand, daß auch der zum Büschel gehörende Drehzylinder $x^2 + y^2 = (n-1)^2 a^2$ die Punkte P und Q harmonisch trennt, folgt weiters durch Betrachtung des Grundrisses die bekannte Tatsache, daß bei einer Epi- oder Hypozykloide der Krümmungsmittelpunkt jeweils auf der Polare des entsprechenden Kurvenpunktes bezüglich des Spitzenkreises liegt [3, S. 106].

§ 3. Umkehrproblem

Geht man umgekehrt von zwei coaxialen Drehparaboloiden Φ und Ψ mit den Parametern p und q und dem Scheitelabstand c aus, so bilden die gemeinsamen Tangenten eine rotationssymmetrische *Strahlkongruenz* \mathcal{K} vierten Grades. Sieht man von dem gemeinsam berührenden Drehkegel ab (vgl. §4), so läuft die Frage nach den in \mathcal{K} enthaltenen *abwickelbaren Flächen* auf, die Ermittlung jener Kurven l auf Φ oder Ψ hinaus, deren Tangenten das andere Paraboloid berühren. Wenn es also gelingt, aus p , q und c die in l verwendeten Kenngrößen n und a zu bestimmen, dann ist die Frage im wesentlichen beantwortet, denn die eine Schar der fraglichen Flächen geht aus der Torse Θ durch Drehung um die Achse hervor, und die andere ergibt sich analog nach Rollentausch der beiden Paraboloiden. Aus (1.6) findet man zunächst

$$m = \sqrt{qp}, \quad (3.1)$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel ohne Belang ist. Anschließend erhält man gemäß (1.5)

$$n = \frac{1+m}{1-m} = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}, \quad (3.2)$$

und weiterhin zufolge (1.6):

$$a^2 = cp/2n. \quad (3.3)$$

Setzt man nun also Φ und Ψ durch (1.1) und (1.6) an, so werden die Kongruenztorsen der ersten Art durch die Tangentenfläche Θ der auf Ψ verlaufen-

den Kurve l (1.5) repräsentiert. Für die in \mathcal{X} enthaltenen Torsen der zweiten Art sind p und q zu vertauschen und c durch $-c$ zu ersetzen. Man sieht, daß dabei der Kennwert n sein Vorzeichen wechselt.

Je nach den Realitätsverhältnissen sind verschiedene Fälle zu unterscheiden:

- i) Ist $p > q > 0$ und $c > 0$, sind also die Paraboloide Φ und Ψ nach derselben Seite geöffnet und haben sie einen reellen Parallelkreis gemeinsam, so liegt genau die Annahme aus §1 vor. Die Kongruenztorsen erster Art sind Φ längs einer durch Drehung von k (1.2) entstehenden Kurve berührend angeschrieben und stützen sich mit ihrer durch dieselbe Drehung aus l (1.5) hervorgehenden Gratlinie auf Ψ ; die Berührungs- und Gratlinien erscheinen im Grundriß als Epizykloiden (Fig. 1). Die Kongruenztorsen zweiter Art sind hingegen Ψ umgeschrieben und haben ihre Gratlinie auf Φ ; im Grundriß bilden sich die Berührungs- und Gratlinien auf Hypozykloiden ab (Fig. 2, wobei die Bezeichungen Φ und Ψ zu vertauschen sind).
- ii) Ist $p > 0$, $q < 0$ und $c > 0$, sind also die Paraboloide nach verschiedenen Seiten geöffnet und haben sie einen reellen Parallelkreis gemeinsam, so wird m wieder rein-imaginär. Der Ansatz (1.2) für k erweist sich allerdings nicht als geeignet, um mit der Darstellung (3.7) einen reellen Kurvenzug zu erfassen, weil b auch rein-imaginär ausfällt. Das Ziel wird jedoch erreicht, wenn man die Gleichungen (1.2) in der Weise modifiziert, daß man bei den Schlußgliedern das Vorzeichen umkehrt (was nur eine Drehung um die z -Achse bedeutet). Nach dieser Maßnahme, und wenn $b = bi$ mit reelem b' gesetzt wird, erhält man für k die Darstellung:

$$a = \frac{\sqrt{cp}(1-m)}{\sqrt{2}(1-m^2)}. \quad (3.4)$$

Trotzdem gibt es *reelle Kurven* k und l . Setzt man nämlich, wie bereits in §2, $(n+1)u/2 = \varphi$, also

$$(3.5) \quad u = (1-m)\varphi, \quad mu = (1+m)\varphi,$$

dann nimmt die Darstellung (1.2) folgende Form an:

$$k \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2a}{1-m} (\cos m\varphi \cos \varphi + m \sin m\varphi \sin \varphi), \\ y = \frac{2a}{1-m} (\cos m\varphi \sin \varphi - m \sin m\varphi \cos \varphi). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Schreibt man nun im vorliegenden Fall $m = m'i$ mit reelem m' , und beachtet man, daß $a/(1-m) = b$ zufolge (3.4) reell ist, so erhält man für reelle Parameterwerte φ tatsächlich einen reellen Kurvenzug, beschrieben durch:

$$k \left\{ \begin{array}{l} x = 2b(\operatorname{ch} m'\varphi \cos \varphi - m' \operatorname{sh} m'\varphi \sin \varphi), \\ y = 2b(\operatorname{ch} m'\varphi \sin \varphi + m' \operatorname{sh} m'\varphi \cos \varphi), \\ z = \frac{b'^2}{p} [(1+3m'^2) - (1+m'^2)] \operatorname{ch} 2m'\varphi. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Ähnlich findet man über (1.5) für die Gratlinie l den reellen Kurvenzug:

$$l \left\{ \begin{array}{l} X = -2m'b(m' \operatorname{ch} m'\varphi \cos \varphi + \sin m'\varphi \sin \varphi), \\ Y = -2m'b(m' \operatorname{ch} m'\varphi \sin \varphi - \operatorname{sh} m'\varphi \cos \varphi), \\ Z = -\frac{b^2}{p} [(1+3m'^2) + (1+m'^2)] \operatorname{ch} 2m'\varphi. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Beide Kurven sind offensichtlich für sämtliche (reellen) Werte der Kennzahl m' transzendent. Die auf dem Paraboloid Φ verlaufende Berührungsline k der Kongruenztorsse Θ erscheint im Grundriß als *Hyperzykloide*, die auf Ψ verlaufende Gratlinie l hingegen als *Parazykloide*, welche die Evolute der Hyperzykloide darstellt [3, S. 119 ff.]. Die in §1 angeführte Affinität (1.7), die k mit l verknüpft, ist jetzt natürlich imaginär.

iii) Ist $p > 0$, $q < 0$, und $c < 0$, sind also die Paraboloide nach verschiedenen Seiten geöffnet und haben sie einen reellen Parallelkreis gemeinsam, so wird m wieder rein-imaginär. Der Ansatz (1.2) für k erweist sich allerdings nicht als geeignet, um mit der Darstellung (3.7) einen reellen Kurvenzug zu erfassen, weil b auch rein-imaginär ausfällt. Das Ziel wird jedoch erreicht, wenn man die Gleichungen (1.2) in der Weise modifiziert, daß man bei den Schlußgliedern das Vorzeichen umkehrt (was nur eine Drehung um die z -Achse bedeutet). Nach dieser Maßnahme, und wenn $b = bi$ mit reelem b' gesetzt wird, erhält man für k die Darstellung:

$$k \left\{ \begin{array}{l} x = -2b'(m' \operatorname{ch} m'\varphi \cos \varphi + \operatorname{sh} m'\varphi \sin \varphi), \\ y = -2b'(m' \operatorname{ch} m'\varphi \sin \varphi - \operatorname{sh} m'\varphi \cos \varphi), \\ z = \frac{b'^2}{p} [(m'^2 - 1) + (m'^2 + 1)] \operatorname{ch} 2m'\varphi. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Ebenso findet man über die entsprechenden Gleichungen (1.5), in welchen ebenfalls die Endglieder das Vorzeichen wechseln, für die Gratlinie l die Darstellung:

$$l \left\{ \begin{array}{l} X = -2m'b'(\operatorname{ch} m'\varphi \cos \varphi - m' \operatorname{sh} m'\varphi \sin \varphi), \\ Y = -2m'b'(\operatorname{ch} m'\varphi \sin \varphi + m' \operatorname{sh} m'\varphi \cos \varphi), \\ Z = \frac{b'^2}{p} [1 + 3m'^2] - (1 + m'^2) \operatorname{ch} 2m'\varphi. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Diesmal erscheint die Berührungsline k im Grundriß als *Parazykloide*, während sich die Gratlinie l als *Hyperzykloide* abbildet, welche die Evolute der Parazykloide darstellt [3, S. 119 ff.].

iv) Ist $p > 0$, $q < 0$ und $c = 0$, berühren einander also die beiden nach verschiedenen Seiten geöffneten Drehparaboloid Φ und Ψ im gemeinsamen Scheitel O , dann sind in diesem Grenzfall die bisherigen Ansätze

nicht mehr brauchbar. Anstelle der Pseudozykloiden in ii) und iii) treten jetzt *logarithmische Spiralen*. Um dies zu bestätigen, setze man die Ausgangskurve k auf Φ (1.1) durch

$$k \dots x = a e^{m\varphi} \cos \varphi, y = a e^{m\varphi} \sin \varphi, z = \frac{a^2}{2p} e^{2m\varphi} \quad (3.11)$$

an (wobei die reellen Konstanten a und m nicht mehr die frühere Bedeutung haben). Die Φ längs k umschriebene Torsse Θ wird eingehüllt von den Tangentialebenen

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \frac{p}{a} Z e^{-m\varphi} + \frac{a}{2} e^{m\varphi}. \quad (3.12)$$

Unter Heranziehung der ersten beiden Ableitungen nach φ erhält man für die Grathlinie l von Θ die Darstellung:

$$l \dots X = -ma e^{m\varphi} \sin \varphi, Y = ma e^{m\varphi} \cos \varphi, Z = -\frac{a^2}{2p} e^{2m\varphi}. \quad (3.13)$$

Dies ist offensichtlich eine Kurve gleicher Art, die auf dem Paraboloid

$$\Psi \dots X^2 + Y^2 = 2qZ \text{ mit } q = -m^2 p \quad (3.14)$$

verläuft. Da sich bei gegebenem q der Kennwert $m = \pm \sqrt{-q/p}$ berechnen läßt, erfaßt man mit den aus k und l durch Drehung um die z -Achse hervorgehenden Flächenkurven die Berührungs- und Gratlinien aller Torsen in der aus den gemeinsamen Tangenten von Φ und Ψ gebildeten Kongruenz \mathcal{K} .

Die Kurven k und l sind Bahnen der *eingliegenden Affinitätsgruppe*

$$G_1 \left\{ \begin{array}{l} x = e^{m\varphi} (x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi), \\ y = e^{m\varphi} (x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi), \\ z = e^{2m\varphi} z_0, \end{array} \right. \quad (3.15)$$

also räumliche *W-Kurven*. Die Gruppe G_1 führt sämtliche Paraboloide des Büschels $x^2 + y^2 = Cz$ einander in sich über. Wird eines dieser Drehparaboloide als Maßquadrik Q einer projektiven Metrik nach Cayley-Kleinschem Muster aufgefaßt, so kann die Gruppe G_1 nach K. STRUBECKER [5] als *nichteuklidische Schraubung* um die z -Achse interpretiert werden. Wird Q so gewählt, daß Φ im Inneren liegt, dann ist k als (eigentliche) *hyperbolische Schraublinie* anzusprechen, Θ als *Schraubtorse* (mit uneigentlicher Grat-schraublinie l). Die Kurve k ist im Sinne der hyperbolischen Metrik *geodätische Linie* auf der »Abstandsfläche« Φ der z -Achse, und überdies *Gewindekurve*, weil ihre Tangenten einem gewissen linearen Strahlkomplex (mit der Achse z) angehören. Wie Strubecker hervorgehoben hat, zerfällt die vorliegende Kongruenz 4. Grades in zwei Kongruenzen 2. Grades, die in je einem Gewinde enthalten sind.

§ 4. Metrische Deutungen

Die beiden Drehparaboloide Φ (1.1) und Ψ (1.6) besitzen einen gemeinsamen *Tangentialkegel* I , der seine Spitze im Ähnlichkeitszentrum $F(0, 0, f)$ hat; dieses teilt den Scheitelabstand c im Verhältnis $p : q = 1 : m^2 = (n+1)^2 : (n-1)^2$, hat also die Kone

$$f = \frac{c}{m^2 - 1} = -(n+1)^2 \frac{a^2}{2p}. \quad (4.1)$$

Die Gleichung des Drehkegels Γ lautet daher:

$$I \dots x^2 + y^2 + \frac{p}{2f} (z - f)^2 = 0. \quad (4.2)$$

Die Paraboloide Φ und Ψ gehören einer linearen Schar von Flächen 2. Klasse an, welche aus den koaxialen, dem Kegel I eingeschriebenen Drehparaboloiden besteht und als ausgearbeitetes Individuum auch den Fernkreis o von I enthält. Sei nun t eine gemeinsame Tangente von Φ und Ψ , also ein Strahl der Kongreuzenz \mathcal{K} mit den Brennflächen Φ und Ψ (§3); die Berührungs-punkte P und Q sind die »Brennpunkte« von t . Die aus t an die einzelnen Scharflächen legbaren Paare von Tangentialebenen bilden nach Desargues eine quadratische Involution, welche die zu P und Q gehörigen Tangentialebenen (»Brennebenen« von t) zu Doppel-ebenen hat. Dieselben liegen zu allen Ebenenpaaren der Involution harmonisch, insbesondere also auch zu den an o gehörenden Tangentialebenen. Macht man nun den Fernkegelschnitt o zum Maßgebilde einer *parabolischen Metrik*, die gemäß (4.2) durch das Bogenelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{p}{2f} dz^2 \quad (4.3)$$

gekennzeichnet ist, so können die genannten Brennebenen als *normal* im Sinne dieser Metrik angesehen werden; \mathcal{K} ist mithin im gleichen Sinn eine *Normalenkongruenz*. Da eine der beiden Brennebenen die Schnieglobene der Kurve l in Q darstellt, die andere hingegen die Tangentialebene von Ψ in Q , so folgt:

Satz 3. *Die Kurve l (1.5, 3.8, 3.10) stellt eine geodätische Linie des Drehparaboloids Ψ (1.6) im Sinne der auf das Bogenelement (4.3) gegründeten parabolischen Metrik dar.*

Im Falle $p = 2f$ herrscht die *euklidische Merrik*; die Paraboloide Φ und Ψ sind dann im gewöhnlichen Sinne konfokal (mit F als gemeinsamem Brennpunkt). Diese Annahme fällt unter den Typ iii) aus §3, woraus folgt, daß die gewöhnlichen geodätischen Linien des Drehparaboloids sich im Normalriß in Achsenrichtung auf *Hyperzykloiden* abbilden, was der Verfasser erstmals in [9] bemerkt hat. Um eine Geodätische etwa auf dem Paraboloid mit Einheitsparameter zu erhalten, setze man zunächst $q = 1$ und gemäß (3.1) $p = -1/m^2 = 1/m^2$. Für den Scheitelabstand c hat man dann

$2c = q - p$, weiters auf Grund von (3.4) $b = a/(1-m) = \pm ip/2$, also bei Verwendung des unteren Vorzeichens $b' = -ib = -p/2 = -1/2m'^2$. Die Darstellung (3.10) der geodätischen Linie l nimmt schließlich nach Änderung des Vorzeichens von Z und passender Verschiebung längs der Z -Achse folgende Gestalt an:

$$l \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{m'} \operatorname{ch} m'\varphi \cos \varphi - \operatorname{sh} m'\varphi \sin \varphi, \\ Y = \frac{1}{m'} \operatorname{ch} m'\varphi \sin \varphi + \operatorname{sh} m'\varphi \cos \varphi, \\ Z = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m'^2} \operatorname{ch}^2 m'\varphi + \operatorname{sh}^2 m'\varphi \right). \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Sie steht in Einklang mit [9] und [7, S 227 f.], wo man auch eine entsprechende Illustration findet.

Legt man der Maßbestimmung im Raum statt (4.3) das Bogenelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4.5)$$

zugrunde, so hat man den von K. STRUBECKER [6] ausgiebig erforschten *isotropen Raum*, dessen absolutes Maßgebilde in die Ferngeraden des *Minimalebenenpaars* $x \pm iy = 0$ zerfallen ist. Da die Paraboloiden Φ (1.1) und Ψ (1.6) dieses absolute Geradenpaar enthalten, können sie im Sinne dieser isotropen Metrik als »Kugeln« angesehen werden. Die vorliegenden Untersuchungen stellen demnach das isotrope Seitenstück zu früheren dar, die sich im Anschluß an E. J. NYSTRÖM [4] mit jenen Torsen befaßten, deren Erzeugenden zwei euklidische Kugeln berühren [9]; neuerdings hat J. KRAMES [2] weitere Beiträge hierzu geleistet. Die meisten der für die Nyströmsche Strahlkongruenz erzielten Ergebnisse lassen sich auf die hier betrachtete Kongruenz \mathcal{K} und ihre Torsen Θ übertragen, worauf jedoch nicht näher eingegangen werden soll. — Bei der Annahme zweier Paraboloiden mit nunteiliger Schnittkurve (§3, ii) besteht mit dem Sonderfall berührender Kugeln in [9] sogar ein unmittelbarer Zusammenhang, der durch eine *Kollineation* hergestellt werden kann, welche die Schnittkurve in den absoluten Kugelkreis transformiert.

Vom Standpunkt der isotropen Geometrie aus ist die bisher vorausgesetzte koaxiale Lage der beiden Drehparaboloiden Φ und Ψ irrelevant; wesentlich ist bloß, daß die beiden Achsen die gleiche Richtung haben. In der Tat kann man durch Anwendung einer linearen Transformation

$$x' = x, y' = y, z' = z + ax + by, \quad (4.6)$$

welche das absolute Geradenpaar invariant läßt, die Paraboloiden in zwei zu ihnen kongruente mit parallelen Achsen überführen, wobei sich im Grundriß nichts ändert. Umgekehrt können zwei *achsenparallele Drehparaboloiden* Φ' , Ψ' nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems durch eine Transforma-

tion der Bauart (4.6) in koaxiale Lage gebracht werden, vorausgesetzt daß ihre Parameter p und q verschieden sind.² Demach gilt in Verallgemeinerung bisheriger Resultate:

Satz 4. *Für die in der Kongruenz der gemeinsamen Tangenten zweier achsenparalleler Drehparaboloiden mit verschiedenen Parametern enthaltenen (nichtkonischen) Torsen bilden sich die Grat- und Berührungslien bei Normalprojektion in Achsenrichtung auf konzentrische Epizykloiden, Pseudozykloiden oder logarithmische Spiralen ab.*

§ 5. Grenzfall

Zur Erledigung des vorhin ausgeschlossenen Grenzfalls *translations-kongruenter Drehparaboloiden* ($p = q$) gehe man von einer Kurve k auf dem Paraboloid Φ (1.1) aus, die im Grundriß als *gemeine Zykloloide* erscheint:

$$k \left\{ \begin{array}{l} x = a(1 - \cos u), \\ y = a(u + \sin u), \\ z = \frac{a^2}{2p}(u^2 + 2u \sin u - 2 \cos u + 2). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Die der Fläche Φ längs k umschriebene Torse Θ wird von der Schar der Tangentialebenen

$$\begin{aligned} X(1 - \cos u) + Y(u + \sin u) &= \\ &= \frac{p}{a} Z + a \left(\frac{u^2}{2} + u \sin u - \cos u + 1 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

eingehüllt. Unter Heranziehung der aus den ersten beiden Ableitungen gewonnenen Gleichungen

$$\begin{aligned} X \sin \frac{u}{2} + Y \cos \frac{u}{2} &= a \left(2 \sin \frac{u}{2} + u \cos \frac{u}{2} \right), \\ X \cos \frac{u}{2} - Y \sin \frac{u}{2} &= a \left(4 \cos \frac{u}{2} - u \sin \frac{u}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

ergibt sich dann für die Gratlinie l von Θ die Darstellung:

$$l \left\{ \begin{array}{l} X = a(3 + \cos u), \\ Y = a(u - \sin u), \\ Z = \frac{a^2}{2p}(u^2 - 2u \sin u - 2 \cos u + 2). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

² Die z -Achse ist parallel zu den Flächennachsen und durch den Mittelpunkt der Schnittellipse der beiden Paraboloiden anzunehmen.

Man bestätigt leicht, daß die Kurve l auf dem Dreiparaboloid

$$\Psi \dots (X - 4a)^2 + Y^2 = 2pZ \quad (5.5)$$

verläuft und im Grundriß ebenfalls als gemeinsame Zyklide erscheint.

Die Berührungs- und Gratlinien der übrigen (gleichartigen) Torsen aus der Kongruenz \mathcal{K} der gemeinsamen Tangenten von Φ und Ψ ergeben sich durch Anwendung der die beiden Paraboloiden festlassenden »isotropen Grenzdrehungskurve«

$$x' = x, y' = y + pv, z' = z + vy + \frac{p}{2}v^2 \quad (5.6)$$

auf die Kurven k (5.1) und l (5.4), deren Grundrisse hierbei lediglich eine Verschiebung längs der y -Achse erfahren. Mit Rücksicht auf die Transformationen (4.6) gilt mithin die den Satz 4 ergänzende Aussage:

Satz 5. Für die in der Kongruenz der gemeinsamen Tangenten zweier translationskongruenter Dreibiparaboloiden enthaltenen (nichtzyndrischen) Torsen bilden sich die Grat- und Berührungslien bei Normalprojektion in Achsenrichtung auf untereinander kongruente gemeinsame Zykliden ab.

Abschließend sei noch die Ortslinie h der Mittelpunkte der Tangentenstrecken zwischen Φ und Ψ bestimmt. Aus ihrer Darstellung im Normalfall,

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2}(x + X) = 2a, \\ h \left\{ \begin{array}{l} y_0 = \frac{1}{2}(y + Y) = au, \\ z_0 = \frac{1}{2}(z + Z) = \frac{a^2}{2p}(u^2 - 2\cos u + 2), \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.7)$$

ist zu erkennen, daß es sich um eine der Ebene der Schnittparabel von Φ und Ψ — der Mittelfläche von \mathcal{K} — angehörende Additionskurve aus Parabel und Sinuslinie handelt. Sie ist wiederum durch Flachpunkte ausgezeichnet, nämlich an den Stellen, wo sie l berührt, also in den (abzählbar unendlich vielen) Spitzen von k (vgl. Satz 2).

§ 6. Polartorse der Kurve k

Für die auf dem Dreiparaboloid Φ (1.1) verlaufende Kurve k (1.2) ist die Fortschreitrichtung festgelegt durch

$$\dot{x} : \dot{y} : \dot{z} = \sin \frac{n+1}{2}u : -\cos \frac{n+1}{2}u : \frac{a}{p}(n-1)\sin \frac{n-1}{2}u. \quad (6.1)$$

Damit ergibt sich für die Normalebene die Darstellung

$$\begin{aligned} \Psi \sin \frac{n+1}{2}u - Y \cos \frac{n+1}{2}u + (Z - g) \frac{a}{p}(n-1)\sin \frac{n-1}{2}u &= \\ = \frac{a^3}{2p^2}(n-1)n \sin \frac{3n-3}{2}u &\text{ mit } g = p + \frac{a^2}{2p}(n^2 - n + 1), \end{aligned} \quad (6.2)$$

oder, nach Übergang zu dem bereits in § 2 benützten Parameter $\varphi = (n+1)u/2$:

$$\begin{aligned} X \sin \varphi - Y \cos \varphi + \frac{2ma}{(1-m)p}(Z - g) \sin m\varphi &= \\ = \frac{(1+m)ma^3}{(1-m)^2 p^2} \sin 3m\varphi. & \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die von der Schar der Normalebenen (6.3) eingehüllte *Polar- oder Evolutionstorse II* von k soll abschließend noch näher untersucht werden. Für ihre Schichtenlinien $Z = \text{const}$ findet man unter Heranziehung der ersten Ableitung von (6.3) nach einiger Rechnung die komplexe Darstellung:

$$\begin{aligned} X + iY &= \frac{(1+m)ma^3}{2(1-m)p^2} [(3m-1)e^{(1+3m)i\varphi} + \\ + (3m+1)e^{(1-3m)i\varphi}] + \frac{ma}{(1-m)p}(g-Z)[(m-1)e^{(1+m)i\varphi} + \\ + (m+1)e^{(1-m)i\varphi}]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Es handelt sich mithin im allgemeinen um (zykloidale) Radlinien 4. Stufe mit der Charakteristik $(1-3m) : (1-m) : (1+m) : (1+3m) = (2-n) : 1:n : (2n-1)$ [8]. Auszunehmen sind lediglich die (äquivalenten) Annahmen $n = 2$ oder $1/2$ ($m = \pm 1/3$, vgl. Fig. 1), welche auf gespitzte Radlinien mit der Charakteristik $1:2$ führen, also auf Kardioden. Hervorzuheben ist ferner die in der Ebene $Z = g$ verlaufende »Hauptschichtenlinie«, die sich für $m \neq \pm 1/3$ auf eine *Epi- oder Hypozykloide* mit der Charakteristik $(1-3m) : (1+3m) = (2-n) : (2n-1)$ reduziert. Im Fall $m = \pm 1/3$ schrumpft dieselbe sogar auf einen Punkt zusammen; dies bedeutet, daß hier als Polartorse \mathcal{II} ein Kegel auftritt, was wieder damit zusammenhängt, daß die Ausgangskurve k (1.2) für $n=2$ eine sphärische Quartik ist.

Als Grenzform der Schichtenlinien Zur $Z \rightarrow \infty$ kann schließlich noch die *Fernkurve* der Torse \mathcal{II} eingeordnet werden. Wie aus dem maßgebenden Schlußterm von (6.4) zu entnehmen ist, erscheint sie im Zentralriß auf einer Schichtenebene als Epi- oder Hypozykloide mit der Charakteristik $(1-m) : (1+m) = 1:n$ und mag daher kurz als »Fernzykloide« bezeichnet werden. Die Torse \mathcal{II} kann mithin als Verbindungstorse der vorhin erwähnten Hauptschichtenlinie und der Fernzykloide aufgefaßt werden; sie gehört demnach zu einer speziellen Familie von Torsen, die eine eigene Untersuchung lohnen

würden, nämlich zu den Verbindungstorsen koaxialer Zykloiden. — Be- merkenswert ist, daß die Polartorsen sämtlicher auf demselben Drehpaboloïd φ verlaufenden Kurven k mit dem gleichen Kennwert m (oder n), die sich also nur durch den Formparameter a unterscheiden, trotz ihrer metrischen Definition auf Grund der gegenseitigen Lage der beiden Leitzkloiden untereinander *affin* sind; dies ist bereits aus der Gleichung (6.3) der erzeugenden Normalebene ersichtlich.

Walter Wunderlich:

Satz 6. *Die Polartorsen aller auf dem Drehpaboloïd φ (1.1) verlaufenden Kurven k (1.2) mit demselben Kennwert n sind untereinander affin und jeweils auffaßbar als Verbindungstorsen einer eigentlichen Zykloide mit der Charakteristik $(2-n):(2n-1)$ und einer Fernzykloide mit der Charakteristik $1:n$.*

Auf die Ermittlung der Gratlinie der Polartorse II soll wegen der ziemlich aufwendigen Rechnung hier verzichtet werden.

LITERATUR

- [1] W. Kautny: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. 60 (1956), 66–82.
- [2] J. Krames: Über Nyströmsche Strahlkongruenzen. Sitzgesber. Österr. Akad. Wiss. 175 (1966), 87–106.
- [3] G. Loria – F. Schütt: Spezielle algebraische und transzendentale ebene Kurven, II. Leipzig (Berlin, 2. Aufl. 1911).
- [4] E. J. Nyström: Die gemeinsamen Tangenten zweier Kugeln, als Strahlenkongruenz betrachtet. Soc. Sci. Fennica, Comm. Phys. Math. 7 (1933), 1–28. Ferner: Die Umhüllungstorsen zweier Kugeln; ebenda 9 (1936), 1–15.
- [5] K. Strubecker: Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), 63–84.
- [6] K. Strubecker: Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. J. reine angew. Math. 178 (1938), 135–173.
- [7] K. Strubecker: Differentialgeometrie, II (Sammlung Göschens, Bd. 1179; Berlin, 2. Aufl. 1969).
- [8] W. Wunderlich: Höhere Radlinien. Österr. Ingen. Archiv I (1947), 277–296.
- [9] W. Wunderlich: Über die Torsen, deren Erzeugenden zwei Kugeln berühren. Soc. Sci. Fennica, Comm. Phys. Math. 14 (1949), 1–16. Ferner: Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades; ebenda 15 (1950), 1–8.

TORZE KOJIH IZVODNICE DIRAJU DVA ROTACIONA PARABOLOIDA USPOREDNIH OSI

Sadržaj

Na jednom rotacionom paraboloidu \varPhi (1.1) promatrane su najprije takve krivulje k (1.2), koje se *okomito na tjemenu dirnu ravninu projiciraju* u epicikloide ili hipocikloide, sa središtem u tjemenu paraboloida. Za torzu opisanu duž krivulje k (1.5) paraboloida \varPhi izvedeno je da je njena grebenska krivulja l (1.5) na jednom koaksijalnom paraboloidu ψ (1.6), te da se s onom prvom nalazi u afinom odnosu. Daljim potanjem razmatranjima uz pomoć određenih afnosti (4.6) obuhvaćene su na taj način sve netrivijalne torze, koje se nalaze unutar kongruencije zajedničkih tangenata dvaju paraboloida usporednih osi. Namjesto epicikloida i hypocikloida mogu se ovdje pojaviti i pseudocikloide, kao i logaritanske spirale, koje sada više nisu smještene s ishodištem u tjemenu paraboloida. Među krivuljama l nalaze se i geodetske linije (4.4) rotacionog paraboloida, što omogućuje i odgovarajuća tumačenja u ostalim slučajevima.

Shvatimo li oba paraboloida kao kugle jednog izotropnog prostora, tada nam ova istraživanja predstavljaju jedan dio prijašnjih proučavanja kongruencije zajedničkih tangenata dviju euklidskih kugala. Pri kraju je izvedena i polarna torza izvorne krivulje k (1.2), za koju se ovdje pokazuje da je kolinearno pridružena spojnoj torzi dviju koaksijalnih cikloida.

Primljeno za publikaciju 17. I. 1975. u Razredu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

Angenommen zur Veröffentlichung am 17. I. 1975. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslavischen Akademie in Zagreb.