Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 1. Jänner 1974

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1976, Nr. 1

(Seite 10 bis 12)

Das wirkl. Mitglied Walter Wunderlich übersendet eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung:

„Ein kubischer Hyperzykel."

1. Die vor allem von E. Müller [3] ausgiebig studierte *zyklographische Abbildung* ordnet bekanntlich jedem reellen Raumpunkt $P(X,Y,Z)$ den Bildkreis

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=Z^2, \quad z=0 \tag{1}$$

zu, der dann noch mit einem dem Vorzeichen von Z entsprechenden Umlaufsinn zu versehen ist und dadurch zu einem „Zykel" wird. Der Bildkreis (1) kann dabei als die Projektion eines gewissen, durch den Richtkegel $x^2+y^2=z^2$ definierten Fernkreises c aus dem Zentrum P auf die Bildebene π $(z=0)$ angesehen werden.

Durchläuft der Punkt P eine glatte Kurve k, so erzeugt sein Bildzykel eine bestimmte Zykelreihe, deren (orientierte) Einhüllende h als das zyklographische Bild von k aufgefaßt wird; h kann als die in π verlaufende Spur der k mit c verbindenden Böschungstorse Γ gedeutet werden.

Ist k speziell ein *Kegelschnitt*, dann wird die Bildkurve h in Anlehnung an E. Laguerre [2] als *Hyperzykel* bezeichnet. Da die Verbindungstorse zweier Kegelschnitte im allgemeinen von 4. Klasse und 8. Ordnung ist, handelt es sich bei einem Hyperzykel für gewöhnlich um eine algebraische Kurve 4. Klasse und 8. Ordnung. Bei besonderer Lage des Kegelschnitts k zum Fernkreis c können sich allerdings die algebraischen Charaktere von h verringern. Eine diesbezügliche Klassifikation der Hyperzykel hat seinerzeit W. Blaschke [1] vorgenommen. Er unterscheidet sechs Familien, deren letzte der Annahme von

Parabeln k entspricht, welche mit c eine Tangente gemeinsam haben, ohne c zu berühren; die Torse Γ hat nun die Klasse 3 und daher die Ordnung 4, und gleiches gilt für den zugehörigen Hyperzykel h. Eine weitere Reduktion der Ordnung von h scheint nach der Tabelle auf S. 22 nicht mehr möglich.

2. Betrachtet man allerdings eine *Parabel* k, welche den Fernkreis c trifft (also eine unter 45° gegen die Bildebene geneigte Achse besitzt) und π in einem Punkt O rechtwinkelig durchsetzt, dann tritt doch ein weiterer Ordnungsabfall des Hyperzykels ein, während die Klasse 4 erhalten bleibt. Die zur gespitzten Raumquartik duale Torse Γ ist dann nämlich von 4. Klasse und 5. Ordnung, enthält aber die beiden durch O gehenden Minimalstrahlen in π als Erzeugende. Dieselben spalten sich vom Schnitt 5. Ordnung $\Gamma\pi$ ab, sodaß für den Bildhyperzykel h von k eine *Kurve 3. Ordnung* (4. Klasse) verbleibt.

Unter den die Parabeln mit 45° Achsenneigung abbildenden Hyperzykeln von im allgemeinen 5. Ordnung — Familie V nach Blaschke ([1], S. 45—48) — gibt es also einen ausgezeichneten, der nur die Ordnung 3 hat und bisher anscheinend übersehen wurde.

Die gleiche Ordnungsreduktion um zwei Einheiten tritt auch ein, wenn k ein Mittelpunktskegelschnitt ist, der die Bildebene π an einer Stelle orthogonal durchsetzt. Solche Hyperzykel (die naturgemäß axial-symmetrisch sind) sind ebenfalls noch nicht näher untersucht worden. Die Annahme hingegen, daß ein Kegelschnitt k die Bildebene an zwei Stellen rechtwinkelig schneidet (k ist dann symmetrisch bezüglich π), ist sehr wohl beachtet worden ([3], S. 285 ff). Hier spalten sich vier in π verlaufende Minimalerzeugende der Torse Γ ab, und der Bildhyperzykel h reduziert sich im allgemeinen auf einen doppelt zählenden Kegelschnitt.

3. Um die Art des kubischen Hyperzykels zu klären, sei noch eine kurze Rechnung durchgeführt. Setzt man die in Nr. 2 betrachtete Parabel k in Parameterform ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit

$$X = u^2, \quad Y = 0, \quad Z = u - u^2 \tag{2}$$

an, dann wird die zugehörige Zykelreihe zufolge (1) beschrieben durch

$$x^2 + y^2 - 2u^2 x = u^2 - 2u^3. \tag{3}$$

Für die Einhüllende h findet man mit Benützung der partiellen Ableitung nach u zunächst die Parameterdarstellung

$$x = \frac{1}{2}(3u - 1), \quad y^2 = u^3 - \frac{1}{4}(3u - 1)^2. \tag{4}$$

Elimination des Parameters u liefert schließlich für h die kartesische Gleichung

$$27y^2 = (x - 1)^2 (8x + 1). \tag{5}$$

Die Konsultation eines Kurvenlexikons — etwa H. Wieleitner [4] (S.55 f) — lehrt zu guter Letzt, daß es sich bei dem kubischen Hyperzykel h (5) um die wohlbekannte *Tschirnhausen-Kubik* handelt, die etwa als negative Fußpunktkurve einer Parabel vom Brennpunkt O aus erklärt werden kann und u. a. als Reflexionsbrennlinie einer Parabel für ein Parallelenbüschel von Lichtstrahlen (normal oder schräg zur Achse) auftritt.

Literatur

[1] Blaschke, W.: Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene. Monatsh. Math. Phys. *21* (1910), 3—60.

[2] Laguerre, E.: Sur les hypercycles. Comptes rendus Acad. Sci. (1882); Oeuvres II, 620—635 (Paris, 1905).

[3] Müller, E., Krames, J.: Die Zyklographie (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. II). Leipzig/Wien, 1929.

[4] Wieleitner, H.: Spezielle ebene Kurven (Sammlg. Schubert, Bd. 56). Leipzig, 1908.

Österreichische Staatsdruckerei. L61 26956