

Zur Schraubung im vierdimensionalen euklidischen Raum

Von Walter Wunderlich in Wien

Herrn Professor K. Strubecker zum 70. Geburtstag

1. Grundlagen

Unter den *Schraubungen* eines euklidischen oder nichteuklidischen Raumes von mehr als zwei Dimensionen werden die stetigen *eingliedrigen Bewegungsgruppen* allgemeiner Art verstanden. Zu diskontinuierlichen, unter Umständen endlichen Untergruppen gelangt man zwangsläufig durch Iteration einer beliebigen, von der Identität verschiedenen gleichsinnig-kongruenten Transformation $\mathfrak{A}$ und ihrer Umkehrung $\mathfrak{A}^{-1}$ unter Hinzunahme der Identität $\mathfrak{A}^0$ als Einheitsselement.

Die Metrik des vierdimensionalen euklidischen Raumes R^4 gründet sich, nach projektivem Abschluß und komplexer Erweiterung desselben, auf eine dem Fernraum Ω angehörende nullteilige *absolute Quadrik* ω . Bei Verwendung homogener kartesischer Punktkoordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ wird ω dargestellt durch

$$(1.1) \quad x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Eine *kongruente Transformation* $\mathfrak{A}$ ist linear und führt die Quadrik ω in sich über, und wenn sie *gleichsinnig* ist, auch jede der beiden Erzeugendenscharen von ω . In jeder Schar hängen die Anfangs- und Endlage einer Erzeugenden durch eine Projektivität zusammen, deren zwei Doppelstrahlen $i, \bar{i}$ bzw. $j, \bar{j}$ gegenüber $\mathfrak{A}$ unempfindlich sind. Es existiert mithin auf der absoluten Quadrik ein windschiefes, gegenüber $\mathfrak{A}$ *invariantes Erzeugenden-vierseit* $ij\bar{i}\bar{j}$, dessen Gegenseiten bei reellem $\mathfrak{A}$ konjugiert-hochimaginär sind. Seine paarweise konjugiert-imaginären Ecken $I, \bar{I}$ und $J, \bar{J}$ geben vier der fünf Doppelpunkte von $\mathfrak{A}$ ab. Der fünfte Fixpunkt wird im allgemeinen ein eigentlicher, reeller Punkt O sein; hinsichtlich möglicher Ausnahmefälle vgl. Abschn. 10.

Die beiden Diagonalen $g = I\bar{I}$ und $h = J\bar{J}$ des invarianten Erzeugenden-vierseits sind reell und ebenfalls fest. Sie bilden zwei reziproke Polare der Quadrik ω , so daß ihre Verbindungsebenen α bzw. β mit dem Zentrum O „ganznormal“ sind: jeder Strahl des Büschels (O, α) bildet mit jedem Strahl des Büschels (O, β) einen rechten Winkel. Wählt man im ersten Büschel irgendzwei normale Geraden $x \perp y$ und ebenso im zweiten zwei normale Geraden $z \perp t$, so hat man ein orthogonales Achsenkreuz $(O; x, y, z, t)$ des R^4 , auf welches die hinfür benutzten inhomogenen Koordinaten bezogen seien.

Es liegt nahe, die beiden Fixebenen α und β als *Bildebenen* einer darstellend-geometrischen Abbildung des R^4 zu verwenden, die jeden Raumpunkt $P(x, y, z, t)$ durch seinen „Grundriß“ $P'(x, y, 0, 0) \in \alpha$ und seinen „Aufriß“ $P''(0, 0, z, t) \in \beta$ festlegt. Es handelt sich hierbei um ein geläufiges Konzept der zeichnerischen Darstellung des R^4 durch zwei Normalrisse auf zwei ganznormale Ebenen [3], [9]: P' kann als Projektion von P aus h auf α , P'' als Projektion von P aus g auf β aufgefaßt werden.

Die Strecke PP'' stellt den Normalabstand des Punktes P von der Ebene $\beta(x=y=0)$ dar und erscheint im Grundriß unverkürzt als Strecke OP' , weil das Bild der (ganzerstprojizierenden) Ebene $\beta \supset h$ auf den Ursprung $O = \beta'$ zusammenschrumpft. Bedenkt man, daß dieser Abstand $\beta P = a$ bei Ausübung der kongruenten Transformation $\mathfrak{A}$ erhalten bleibt und daß das Bündel der β enthaltenen Überebenen ($x/y = \text{const}$) als starres Gebilde eine Verlagerung erfährt, die im Grundriß als Drehung des Strahlbündels (O, α) um einen gewissen Winkel φ erscheint, so gelangt man unter gleichartiger Betrachtung des Abstandes $\alpha P = OP'' = b$ zur nachstehenden analytischen Darstellung der Bewegung $P_0 \mapsto P_1 = \mathfrak{A}P_0$:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi, & y_1 &= x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi, \\ z_1 &= z_0 \cos \psi - t_0 \sin \psi, & t_1 &= z_0 \sin \psi + t_0 \cos \psi. \end{aligned}$$

2. Schraubung und Schraublinien

Auch bei n -maliger Anwendung der Bewegung $\mathfrak{A}$ bleiben das Zentrum O und die beiden Ebenen α und β fest. In der Darstellung (1.2) ist lediglich der Index 1 durch n zu ersetzen, und anstelle der Drehwinkel φ und ψ treten ihre Vielfachen $n\varphi$ und $n\psi$. Erweitert man die Definition der so erhaltenen Bewegungen $\mathfrak{A}^n$ auf $n \leq 0$, so hat man in $\{\mathfrak{A}^n, n \text{ ganz}\}$ eine diskontinuierliche *Bewegungsgruppe* mit der Verknüpfungsregel $\mathfrak{A}^m \cdot \mathfrak{A}^n = \mathfrak{A}^{m+n}$. Läßt man schließlich für n beliebige reelle oder komplexe Zahlen zu, so liegt eine kontinuierliche eingliedrige Gruppe vor. Nach Einführung des Parameters $u = n\varphi$ und der Abkürzung $\psi/\varphi = c$ schreibt sich dann die so gewonnene *Schraubung* $P_0 \mapsto P$ in der Form:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x &= x_0 \cos u - y_0 \sin u, & y &= x_0 \sin u + y_0 \cos u, \\ z &= z_0 \cos cu - t_0 \sin cu, & t &= z_0 \sin cu + t_0 \cos cu. \end{aligned}$$

Die beiden Fixebenen $\alpha(z=t=0)$ und $\beta(x=y=0)$ sollen die „Achsebenen“ der Schraubung heißen, die Konstante c die „Übersetzung“. Für $c=0$ liegt die Drehung um β vor, für $c=\infty$ — nach Vornahme des Parameterwechsels $v=cu$ — die Drehung um α . Zusammenfassend gilt somit der erstmals von K. Strubecker [12] ausgesprochene

Satz 1. Die allgemeine Schraubung des R^4 setzt sich aus zwei proportionalen Drehungen um zwei ganznormale Achsebenen zusammen.

Das Gleichungssystem (2.1) der Schraubung beschreibt bei festen Werten x_0, y_0, z_0, t_0 und veränderlichem Parameter u die Bahnkurve $l = \{P\}$, welche der Punkt P_0 unter Einwirkung der Schraubung durchläuft. Für $P_0 \neq O$ verläuft diese Schraublinie l wegen der Erhaltung des Zentralabstandes $OP_0 = r > 0$ auf der Sphäre Σ

$$(2.2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2 \quad \text{mit} \quad r^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2 = a^2 + b^2.$$

Unter der Voraussetzung $P_0 \notin \alpha \cup \beta$ und $c \neq 0, \infty$ besteht das Bildpaar der Schraublinie l aus zwei im Ursprung O zentrierten Kreisen $l' \subset \alpha$ (Radius a) und $l'' \subset \beta$ (Radius b), die durch proportionale Zentriwinkel u und $v = cu$ aufeinander bezogen sind (Abb. 1).

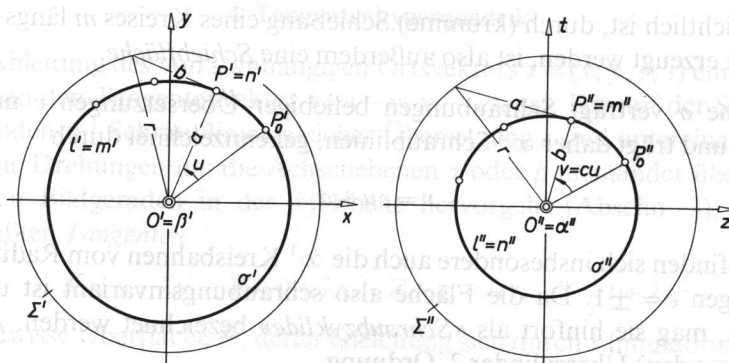


Abb. 1. Einfachste Darstellung der vierdimensionalen Schraubung durch Grund- und Aufriß.

Soweit sie nicht — als Kreise — in den Achsenebenen α oder β verlaufen, sind die ∞^3 Bahnkurven einer Schraubung untereinander *affin*, wie aus (2. 1) zu ersehen ist. Als Prototyp mag die Schraublinie

$$(2. 3) \quad x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = \cos cu, \quad t = \sin cu$$

dienen; sie ist die Bahn etwa des Punktes $P_0(1, 0, 1, 0)$.

Für rationale Übersetzungen c stellen sich geschlossene, *algebraische Schraublinien* ein. Schreibt man in einem solchen Fall $c = \mu/\nu$ als gekürzten Bruch an (μ, ν ganz und teilerfremd), und führt man in (2. 3) mittels der Eulerschen Formeln den neuen (komplexen) Parameter $w = \exp(iu/\nu)$ ein, so erhält man

$$(2. 4) \quad x = \frac{1}{2}(w^\nu + w^{-\nu}), \quad y = \frac{i}{2}(w^{-\nu} - w^\nu), \quad z = \frac{1}{2}(w^\mu + w^{-\mu}), \quad t = \frac{i}{2}(w^{-\mu} - w^\mu),$$

woraus der rational-algebraische Charakter der Schraublinie zu erkennen ist. Um ihre *Ordnung* N festzustellen, hat man sie mit einer Überebene allgemeiner Lage zu schneiden; dies führt auf eine algebraische Gleichung für w vom Grad

$$(2. 5) \quad N = 2 \max(|\mu|, |\nu|).$$

Speziell für $c = \pm 1$ ergibt sich $N = 2$; die Bahnkurven sind *Kreise*, und zwar Großkreise der jeweiligen Trägersphäre Σ . Für $c \neq \pm 1$ gehen die Schraublinien durch zwei konjugiert-imaginäre Ecken des invarianten Erzeugendenvierseits der absoluten Quadrik ω ($w = 0$ bzw. ∞); für $|c| < 1$ sind dies die absoluten Kreispunkte $I, \bar{I}$ der Achsenebene α , für $|c| > 1$ jene von β .

3. Schraubzykliden

Bei willkürlicher Paarung der Bildpunkte P' und P'' auf den Kreisen $l'(O, a > 0)$ bzw. $l''(O, b > 0)$ erfüllen die ∞^2 dadurch dargestellten Punkte $P \in R^4$ eine (doppelt-projizierende) zweidimensionale Fläche σ mit der Parameterdarstellung

$$(3. 1) \quad x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = b \cos v, \quad t = b \sin v.$$

Die u -Linien ($v = \text{const}$) sind untereinander und zu l' kongruente *Kreise* m in zu α ganzparallelen Ebenen; ebenso sind die v -Linien ($u = \text{const}$) untereinander und zu l'' kongruente Kreise n in zu β ganzparallelen Ebenen. Es handelt sich um Bahnen der in Abschn. 2 erwähnten Drehungen um die Achsenebenen β bzw. α . Die Fläche σ ist demnach in zweifacher Weise als *Drehfläche* aufzufassen. Sie kann aber auch, wie aus (3. 1)

unmittelbar ersichtlich ist, durch (krumme) Schiebung eines Kreises m längs eines Kreises n oder umgekehrt erzeugt werden, ist also außerdem eine *Schiebfläche*.

Die Fläche σ verträgt Schraubungen beliebiger Übersetzungen c um die Achsen-ebenen α und β und trägt daher ∞^2 Schraublinien, gekennzeichnet durch

$$(3.2) \quad v = cu + d.$$

Unter diesen befinden sich insbesondere auch die ∞^1 Kreisbahnen vom Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Schraubungen $c = \pm 1$. Da die Fläche also schraubungsinvariant ist und vier Kreisscharen enthält, mag sie hinfort als «*Schraubzyklide*» bezeichnet werden. Als Schnitt der beiden (projizierenden) Überzylinder 2. Ordnung

$$(3.3) \quad \Gamma \dots x^2 + y^2 = a^2, \quad \Delta \dots z^2 + t^2 = b^2$$

ist σ eine *Fläche 4. Ordnung*, welche das invariante Erzeugendenvierseit $ij\bar{i}\bar{j}$ der absoluten Quadrik ω zum Ferngebilde und dessen Ecken $I, \bar{I}, J, \bar{J}$ zu Doppelpunkten hat.

Irgendzwei Kreise m und m_1 der ersten Schar decken sich im Grundriß mit dem Kreis $l' = m' = m'_1$ und erscheinen im Aufriß als Punkte m'' und m''_1 von l'' (vgl. Abb. 1). Deutet man die Verbindungsgerade von m'' und m''_1 als Aufriß einer zweitprojizierenden Überebene, dann schneidet diese aus der σ enthaltenden Überkugel Σ (2. 2) eine Kugel heraus, welche die beiden Kreise m und m_1 verbindet. Rückt nun m_1 gegen m , so wird aus der genannten Verbindungskugel eine Kugel, welche σ längs ihres Großkreises m berührt. Die Schraubzyklide σ ist demnach Einhüllende von ∞^1 auf l'' zentrierten Kugeln vom Radius a , und ebenso von ∞^1 auf l' zentrierten Kugeln vom Radius b ; sie kann daher in doppelter Weise als *Rohrfläche* angesehen werden.

Auf Grund des aus (3. 1) zu ermittelnden Bogenelementes

$$(3.4) \quad ds^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2$$

ergibt sich die von K. Strubecker [12] hervorgehobene *isometrische Abbildung* der Schraubzyklide σ auf eine *euklidische Ebene*: Man hat bloß dem Punkt $P(u, v)$ von σ den Punkt $\tilde{P}$ mit den kartesischen Koordinaten $\tilde{x} = au, \tilde{y} = bv$ in der Bildebene zuzuordnen. Zur Erfassung der gesamten, ringartig geschlossenen Oberfläche von σ genügt dabei ein Rechteck mit den Seitenlängen $2\pi a$ und $2\pi b$. Die $\tilde{x}$ - und $\tilde{y}$ -Linien entsprechen den u - und v -Kreisen auf σ , woraus unmittelbar zu entnehmen ist, daß auch letztere ein orthogonales Netz bilden.

Allgemeiner gilt, weil sich alle ∞^1 auf einer Schraubzyklide σ verlaufenden Schraublinien l mit einer bestimmten Übersetzung c zufolge (3. 2) auf parallele Gerade $\tilde{l}$ abbilden, daß diese untereinander kongruenten Schraublinien l *Loxodromen* der Kreisscharen von σ sind; insbesondere ergibt sich ihr Kurswinkel γ , unter welchem sie die Schar der u -Kreise m durchsetzen, aus $\operatorname{tg} \gamma = bc/a$. Aus der Geradlinigkeit der Bilder $\tilde{l}$ folgt überdies, daß die ∞^2 auf σ verlaufenden Schraublinien die *geodätischen Linien* auf σ bedeuten.

Satz 2. Die ∞^2 in bestimmten Abständen von den Achsenebenen verlaufenden Schraublinien aller Übersetzungen c erfüllen eine ringartige, einer Sphäre angehörende Fläche 4. Ordnung σ (3. 1), die in zweifacher Weise als Dreh-, Schieb- oder Rohrfläche aufgefaßt werden kann und vier Kreisscharen trägt ($c = 0, \infty, \pm 1$). Die auf dieser schraubungsinvarianten Zyklide σ vorhandenen Schraublinien (3. 2) sind ihre geodätischen Linien und überdies Loxodromen der genannten Kreisscharen.

4. Tangentenhyperquadrik

Durch Ableitung des von u abhängigen Ortsvektors $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ einer Schraublinie l (2. 1) erhält man den Tangentenvektor $\dot{\mathbf{x}} = (-y, x, -ct, cz)$. Die auf der Schraubzyklide σ (3. 1) verlaufenden ∞^1 Schraublinien gleicher Übersetzung c sind untereinander kongruent, da sie durch die Drehungen um die Achsenebenen α oder β ineinander übergehen, wie aus ihren parallelen Bildgeraden in der $\tilde{x}\tilde{y}$ -Ebene hervorgeht (Abschn. 3). Ihre ∞^2 durch $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \lambda \dot{\mathbf{x}}$ erfaßten *Tangenten*

$$(4. 1) \quad X = x - \lambda y, \quad Y = y + \lambda x, \quad Z = z - \lambda ct, \quad T = t + \lambda cz$$

erfüllen eine gewisse Überflähe Θ , deren Gleichung sich durch Elimination von λ aus

$$(4. 2) \quad X^2 + Y^2 = (1 + \lambda^2)(x^2 + y^2) = (1 + \lambda^2)a^2,$$

$$Z^2 + T^2 = (1 + c^2\lambda^2)(z^2 + t^2) = (1 + c^2\lambda^2)b^2$$

mit

$$(4. 3) \quad b^2c^2(X^2 + Y^2) - a^2(Z^2 + T^2) = a^2b^2(c^2 - 1)$$

ergibt; es handelt sich mithin um eine *Hyperquadrik*. Dieselbe gestattet die Drehungen um die Achsenebenen α und β , und daher auch sämtliche Schraubungen um dieses Ebenenpaar.

Die zu verschiedenen Übersetzungen c gehörigen Hyperquadriken Θ gehören einem *Büschel* an, das auch die Überzylinder Γ und Δ (3. 3) enthält ($c = \infty$ bzw. 0), also die Schraubzyklide σ zur Basis hat. Die ∞^2 bei einer bestimmten Übersetzung c auftretenden Bahntangenten der Punkte von σ bilden nur eine Teilmannigfaltigkeit der ∞^3 auf der Hyperquadrik Θ vorhandenen Geraden; sie sind unter diesen — zusammen mit den zur Übersetzung $-c$ gehörigen Schraubtangente der Punkte von σ — dadurch gekennzeichnet, daß sie die Basiszyklide σ berühren.

Satz 3. Die ∞^2 Tangenten der ∞^1 auf einer Schraubzyklide σ (3. 1) verlaufenden, untereinander kongruenten Schraublinien mit den Übersetzungen $\pm c$ erfüllen eine σ enthaltende Hyperquadrik Θ (4. 3)¹⁾.

Die von den beiden Ableitungsvektoren $\dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}} = -(x, y, c^2z, c^2t)$ im Punkt $P(\mathbf{x})$ aufgespannte *Schmiegeebene* der Schraublinie l berührt die Tangentenfläche χ von l längs der zu P gehörigen Tangente e , und daher wegen $\chi \subset \Theta$ auch die Hyperquadrik Θ . Die drei Ableitungsvektoren $\dot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}} = (y, -x, c^3t, -c^3z)$ sind für $c^2 \neq 1$ linear unabhängig und spannen dann die *Schmiegeebene* von l in P auf; deren Gleichung ergibt sich durch Nullsetzen der Determinante $(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$ in der Form

$$(4. 4) \quad c^2(z^2 + t^2)(xX + yY) - (x^2 + y^2)(zZ + tT) = (c^2 - 1)(x^2 + y^2)(z^2 + t^2).$$

Die Punkte $P \in R^4$ und ihre Bahnschmiegeebenen sind mithin durch ein *biquadratisches Nullsystem* verknüpft. Für $P \in \sigma$ ist $x^2 + y^2 = a^2$ und $z^2 + t^2 = b^2$; wie der Vergleich mit (4. 3) lehrt, fällt dann die Schmiegeebene von l mit der Tangentialebene von Θ in P zusammen.

Satz 4. Die einem verschraubten Raumpunkt P zugeordnete Bahnschmiegeebene berührt die Tangentenhyperquadrik Θ längs der Bahntangente von P , während die für $c \neq 0, \infty, \pm 1$ eindeutig bestimmte Bahnschmiegeebene die Hyperquadrik Θ in P berührt.

¹⁾ Diese Hyperquadrik hat Herr R. Müllner 1973 im Rahmen einer Diplomarbeit an der Technischen Hochschule Wien bemerkt.

5. Dreidimensionale Parallelrisse

Bei der Projektion des R^4 aus einem uneigentlichen Zentrum L auf eine (L nicht enthaltende) Überebene Π wird jedem eigentlichen Punkt $P \in R^4$ eindeutig ein eigentlicher Bildpunkt $P^a \in \Pi$ zugeordnet ($PP^a \parallel L$). Dieses Abbildungsverfahren ist geraden-, ebenen-, parallelen- und teilverhältnistreu. Es kann daher nach dem *axonomischen Prinzip* gehandhabt werden: Legt man für die auf den Koordinatenachsen liegenden Einheitsstrecken OA, OB, OC, OD die Bildstrecken $O^aA^a, O^aB^a, O^aC^a, O^aD^a$ in Π durch Vektoren a, b, c, d fest, so wird der Bildpunkt P^a eines Raumpunktes $P(x, y, z, t)$ durch seinen Ortsvektor

$$(5.1) \quad O^aP^a = \vec{x}^a = xa + yb + zc + td$$

bestimmt. Nimmt man die Vektoren a, b, c, d willkürlich an, so erhält man ein axonomisches Bild, das zu einer bestimmten Parallelprojektion des dargestellten Objekts zwar affin ist, jedoch — im Gegensatz zu dem im R^3 geltenden Satz von Pohlke — keineswegs ähnlich. Bedingungen für die Ähnlichkeit gab E. Kruppa [6] an, Anweisungen für die Entstehung einer Normalprojektion findet man in [17].

Für die als Schiebfläche aufgefaßte *Schraubzyklide* σ (3.1) ergibt sich als Parallelriß σ^a wieder eine *Schiebfläche 4. Ordnung*

$$(5.2) \quad \vec{x}^a = a\alpha \cos u + ab \sin u + bc \cos v + bd \sin v,$$

jetzt natürlich im dreidimensionalen Bildraum Π . Im allgemeinen, nämlich für $L \notin \alpha \cup \beta$, entsteht sie durch Verschiebung einer *Ellipse* m^a ($v = \text{const}$) längs einer zweiten Ellipse n^a ($u = \text{const}$). Die gleichförmige Durchlaufung eines Kreises m oder n im Zuge einer Schraubung mit konstanten Drehgeschwindigkeiten überträgt sich auf eine Durchlaufung der Ellipse m^a bzw. n^a mit konstanter Flächengeschwindigkeit des vom Ellipsenzentrum ausgehenden Radiusvektors.

Sind die beiden Vektoren a und b orthogonal und von gleichem Betrag, ebenso die Vektoren c und d , dann entsteht σ^a durch Verschiebung eines *Kreises* längs eines zweiten, wobei noch erreicht werden kann, daß die beiden Kreisebenen zueinander normal sind. Man verwende etwa den Koordinatenraum $t = 0$ als Bildraum Π und wähle die Projektionsrichtung parallel zum Vektor $l = (0, 1, 0, -1)$: die Vierbeinvektoren sind dann $a = (1, 0, 0, 0)$, $b = d = (0, 1, 0, 0)$ und $c = (0, 0, 1, 0)$. Die als Parallelriß der Schraubzyklide σ auftretende *Kreisschiebfläche* σ^a wird daher gemäß (5.2) in Parameterform dargestellt durch

$$(5.3) \quad x = a \cos u, \quad y = a \sin u + b \sin v, \quad z = b \cos v,$$

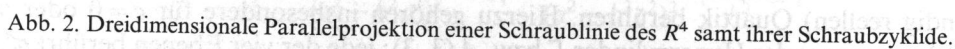
oder implizit durch

$$(5.4) \quad (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(x^2 - a^2)(z^2 - b^2).$$

Die Fläche ist orthogonal-symmetrisch zu den Koordinatenebenen in Π und enthält in der xz -Ebene eine gleichseitige *Doppelhyperbel*

$$(5.5) \quad x^2 - z^2 = a^2 - b^2, \quad y = 0,$$

die für $a = b$ in ein normales Geradenpaar zerfällt. — Da sich die allgemeine Fläche σ^a (5.2) durch eine geeignete Affinität in eine Normalform vom Typ (5.3) überführen läßt (vgl. Abb. 2 und 3), herrschen dort ähnliche Verhältnisse, bloß daß die Symmetrien nicht orthogonal und die Doppelhyperbel nicht gleichseitig zu sein brauchen.



Bezeichne A jene Durchmesserebene der Tangentenhyperquadrik Θ (4. 3), die polar zum uneigentlichen Projektionszentrum L ist. Sie schneidet Θ nach einer *Quadrik* $\mathfrak{Q}$, die nach darstellend-geometrischer Terminologie als (wahrer) *Umriß* von Θ anzusprechen ist. Für $L \notin A$ (also $L \notin \Theta$) hat $\mathfrak{Q}$ einen nichtzerfallenden Fernkegelschnitt, wie aus der Betrachtung der Fernquadrik von Θ hervorgeht, welche zwei Scharen reeller Erzeugenden trägt; $\mathfrak{Q}$ ist daher (unter Ausschluß der Grenzfälle $c = 0$ und $c = \infty$) für $c \neq \pm 1$ ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid, für $c = \pm 1$ ein einteiliger Kegel 2. Ordnung.

Satz 5. *Sämtliche Tangenten und Schmiegeebenen der dreidimensionalen Parallelrisse aller ∞^1 auf einer Schraubzyklide σ (3. 1) verlaufenden Schraublinien des R^4 mit denselben*

Übersetzungen $\pm c$ berühren eine gewisse Leitquadrik, sofern die Projektion nicht aus einem Punkt der Tangentenhyperquadrik Θ (4. 3) erfolgt. Diese Leitquadrik ist zu der die Bildkurven tragenden, als Bild von σ auftretenden Schiebfläche 4. Ordnung σ^a (5. 2) konzentrisch und berührt sie längs einer Raumkurve 4. Ordnung; auf derselben liegen die Henkelpunkte der Schraublinienbilder.

Zum Beweis des zweiten Teiles von Satz 5 bedenke man: Die Überebene Λ schneidet die Schraubzyklide 4. Ordnung $\sigma = \Theta \cap \Sigma$ nach einer sphärischen Raumkurve 4. Ordnung $q \subset \mathcal{Q}$, die aus lauter Umrißpunkten von Θ besteht. In jedem solchen Punkt $V \in q$ ist also der Tangentialraum von Θ projizierend und bildet sich daher zusammen mit den in ihm enthaltenen, zu V gehörigen Tangentialebenen von σ und $\mathcal{Q}$ auf eine Ebene ab, die σ^a und $\mathcal{Q}^a$ in V^a berührt. Die von den Punkten V^a erfüllte Berührungslinie q^a ist affin zur sphärischen Quartik q und mithin wie diese eine Raumkurve 4. Ordnung (I. Art.). Für einen Punkt $V \in q$ fällt der Tangentialraum von Θ laut Satz 4 mit der Schmiegeüberebene der Bahn l von V zusammen. Seine Bildebene, die gemeinsame Tangentialebene von σ^a und $\mathcal{Q}^a$, hat daher vier in V^a zusammengedrängte Punkte mit l^a gemeinsam, ist also eine stationäre Schmiegeebene von l^a ; V^a ist somit ein *Henkelpunkt* von l^a . — Läßt man die Übersetzung c variieren, so erhält man ∞^1 Umrißquadriken $\mathcal{Q}^a$, welche die Schiebfläche σ^a jeweils längs einer (nicht notwendig reellen) Quartik berühren. Hierzu gehören insbesondere für $c=0$ oder ∞ die Umrißebenenpaare der Hyperzylinder Γ bzw. Δ (3. 3); jede der vier Ebenen berührt σ^a längs einer Ellipse.

Nun ist noch die vorhin ausgeschlossene Annahme $L \in \Lambda$, also $L \in \Theta$ zu erledigen, wobei der zu $c = \pm 1$ gehörige Fall eines Überkegels Θ außer Betracht bleiben kann. Jetzt ist Λ ein Tangentialraum und schneidet daher Θ nach einem Zylinder 2. Ordnung $\mathcal{Q}$ mit dem Scheitel L . Die Projektion $\mathcal{Q}^a$ schrumpft somit auf einen Kegelschnitt zusammen, der auch das Bild q^a der sphärischen Quartik $q = \sigma \cap \Lambda$ darstellt, die wegen $\sigma \subset \Theta$ dem Zylinder $\mathcal{Q} = \Theta \cap \Lambda$ angehört. Weil jede Zylindererzeugende die Sphäre Σ und damit die Kurve q in zwei Punkten trifft, erscheint q^a doppelt überdeckt und ist daher mit der oben erwähnten *Doppelhyperbel* der Schiebfläche σ^a identisch. — Jede Tangente e einer auf σ verlaufenden Schraublinie l trifft die Überebene Λ in einem Punkt $U \in \mathcal{Q}$, dessen Projektion U^a als Treffpunkt der Tangente e^a von l^a mit q^a erscheint. Da also sämtliche Tangenten von l^a den Kegelschnitt q^a treffen, kann l^a als *projektive Böschungslinie* angesprochen werden. In Ergänzung zu Satz 5 gilt also

Satz 6. *Sämtliche Tangenten der dreidimensionalen Parallelrisse aller ∞^1 auf einer Schraubzyklide σ (3. 1) verlaufenden Schraublinien mit denselben Übersetzungen $\pm c$ ($c^2 \neq 1$) treffen die Doppelhyperbel der als Bild von σ auftretenden Schiebfläche 4. Ordnung σ^a (5. 2), sofern die Projektion aus einem Fernpunkt der Tangentenhyperquadrik Θ (4. 3) erfolgt. Die Schmiegeebenen der Schraublinienbilder berühren diese Leithyperbel.*

Die festgestellten Sachverhalte mögen noch an Hand des Prototyps (5. 3) näher ausgeführt werden. Der zur Projektionsrichtung $l = (0, 1, 0, -1)$ polare Durchmesserraum Λ von Θ (4. 3) hat die — jetzt in Kleinbuchstaben geschriebene — Gleichung

$$(5. 6) \quad b^2 c^2 y + a^2 t = 0.$$

Der projizierende, Θ berührende Überzylinder ergibt sich durch geeignete Linearkombination aus (4. 3) und dem Quadrat von (5. 6) mit

$$(5. 7) \quad (a^2 - b^2 c^2) (b^2 c^2 x^2 - a^2 z^2) + a^2 b^2 c^2 (y + t)^2 = a^2 b^2 (a^2 - b^2 c^2) (c^2 - 1).$$

Sein Schnitt mit dem Bildraum Π ($t=0$) liefert dann die *Leitquadrik* $\mathcal{Q}^a$, deren Gleichung unter der Voraussetzung $(a^2 - b^2 c^2) c^2 \neq 0$ in der Gestalt

$$(5.8) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2 c^2} - \frac{z^2}{b^2 c^2} = \frac{c^2 - 1}{c^2}$$

angeschrieben werden kann. Für $c^2 \neq 1$ handelt es sich um ein Hyperboloid, für $c^2 = 1$ um einen Kegel 2. Ordnung.

Die von A aus der Sphäre Σ (2. 2) ausgeschnittene Kugel hat als Parallelriß das *Drehellipsoid*

$$(5.9) \quad x^2 + \frac{a^4 + b^4 c^4}{(a^2 - b^2 c^2)^2} y^2 + z^2 = a^2 + b^2,$$

welches die Berührungsquartik q^a der Leitquadrik $\mathcal{Q}^a$ mit der zyklischen Schiebfläche 4. Ordnung σ^a (5. 3) enthält. Diese Raumkurve 4. Ordnung I. Art gehört auch den elliptischen Zylindern

$$(5.10) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{(a^2 - b^2 c^2)^2} = 1, \quad \frac{b^2 c^4 y^2}{(a^2 - b^2 c^2)^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

an und geht durch die vier y -parallelen Zwickelmente in $(\pm a, 0, \pm b)$.

Für die ausgezeichneten Übersetzungen $c = \pm a/b$ schrumpft das Leithyperboloid auf die Doppelhyperbel q^a (5. 5) von σ^a zusammen. Die zu diesen Übersetzungen gehörigen Schraublinien durchsetzen die Schar der u -Kreise m ihrer Trägerzyklide σ unter dem Kurswinkel $\gamma = \pi/4$ (Abschn. 3). Der dreidimensionale Parallelriß l^a einer solchen Schraublinie l ist samt der zyklischen Trägerschiebfläche σ^a in Abb. 2 axonometrisch, in Abb. 4 durch Grund- und Aufriß dargestellt; zufolge (2. 5) handelt es sich bei der zugrundegelegten Annahme $c = 4$ um eine rationale Raumkurve 8. Ordnung. Die im Zwickpunkt $Q^a(-a, 0, b)$ von σ^a auftretende Spitze von l^a rührt davon her, daß der im entsprechenden Punkt $Q \in l$ ($u = \pi$) vorhandene Bahntangentenvektor $\dot{x} = (0, -a, 0, bc)$ zur Projektionsrichtung l parallel ist.

6. Umschwungbahnen

Nun ist noch der in Abschn. 5 zurückgestellte Fall der Projektion in einer zur Achsenebene α oder β parallelen Richtung nachzutragen. Sei das Projektionszentrum L also ein Fernpunkt etwa der Ebene β ($L \in h$); mit Rücksicht auf die Freiheit bei der Wahl des in Abschn. 1 eingeführten Koordinatensystems bedeutet es keine Einschränkung, wenn L mit dem Fernpunkt der t -Achse zusammenfällt. Wird wieder der Koordinatenraum $t=0$ als Bildraum Π verwendet, so liegt die *Normalprojektion* $P(x, y, z, t) \mapsto P^a(x, y, z, 0)$ vor; die Wahl eines anderen Bildraums würde höchstens eine affine Veränderung des Bildes bewirken.

Die als Normalriß der Schraubzyklide σ (3. 1) auftretende Schiebfläche σ^a schrumpft jetzt auf eine Grenzform

$$(6.1) \quad x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = b \cos v$$

ein, die als doppelt überdecktes *Drehzylinderband* vom Radius a und der Breite $2b$ zu erkennen ist. Die Parallelkreise $v = \text{const}$ stellen die Normalrisse m^a der Kreise m von σ dar, während die Bilder n^a der Kreise $n \subset \sigma$ sich auf die Erzeugendenstrecken $u = \text{const}$ reduziert haben.

Die auf dem Drehzylinder σ^a verlaufenden Bildkurven l^a der von σ getragenen Schraublinien l ($v = cu + d$) sind sogenannte *Umschwungkurven*, nämlich Punktbahnen des bekannten, von W. Kautny [5] ausführlich untersuchten „harmonischen Umschwungs“. Hierunter ist jene zwangsläufige Bewegung des R^3 zu verstehen, welche sich aus einer gleichförmigen Drehung um die z -Achse ($=\beta^a$) und einer Sinusschwingung längs dieser Achse mit der Frequenz c (und der Amplitude b) zusammensetzt. Bei der Abwicklung ihres Trägerzylinders gehen diese Umschwungbahnen in Sinuslinien über. Für $c = \pm 1$ sind die Bahnkurven Ellipsen (Mannheim-Darbouxscher Umschwung), für $c = \pm 1/2$ sind es rationale sphärische Raumkurven 4. Ordnung (Hippopeden), für $c = \pm 2$ rationale Quartiken mit einem isolierten Doppelpunkt im Fernpunkt der z -Achse (Abb. 3).²⁾

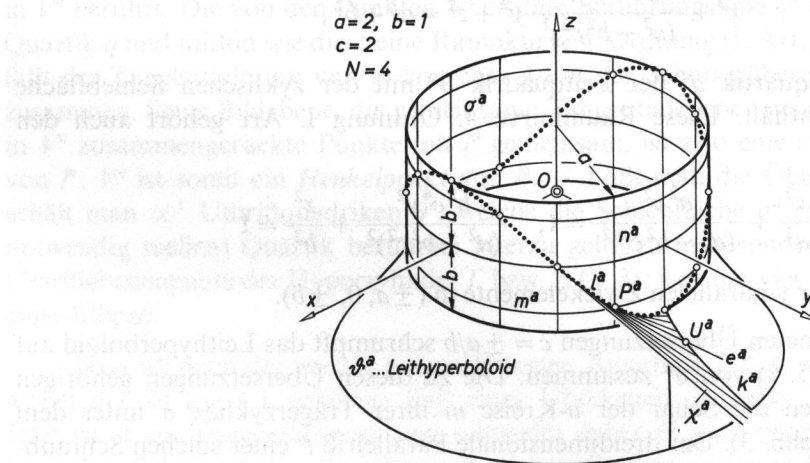


Abb. 3. Umschwungbahn samt Tangentenleithyperboloid.

Sämtliche Tangenten und Schmiegeebenen einer solchen Umschwungbahn l^a berühren nach dem in Abschn. 5 entwickelten Prinzip die zur Tangentenhyperquadrik Θ (4. 3) gehörige Umrißquadrik $\mathfrak{G}^a = \mathfrak{G}$:

$$(6. 2) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2 c^2} = \frac{c^2 - 1}{c^2}$$

$\mathfrak{G}$ enthält die beiden Randkreise $v = 0$ und $v = \pi$ des Zylinderbandes σ^a (6. 1) und ist ein einschaliges oder zweischaliges Drehhyperboloid bzw. ein Drehkegel, je nachdem ob $c^2 > 1$, < 1 oder $= 1$ ist. Für das in [5] etwas unvermutete Auftreten solcher Leitquadriken erscheint jetzt die tiefere Ursache aufgedeckt.

Satz 7. Im Normalriß auf eine zur Achsenebene α parallele Überebene erscheinen die ∞^1 auf einer Schraubzyklide σ (3. 1) verlaufenden Schraublinien des R^4 mit denselben Übersetzungen $\pm c$ als Umschwungbahnen mit der Frequenz c auf einem Drehzylinderband σ^a (6. 1). Ihre sämtlichen Tangenten und Schmiegeebenen berühren eine bestimmte, die Randkreise des Bandes enthaltende Drehquadrik $\mathfrak{G}^a$ (6. 2).

Abschließend noch eine Bemerkung über die *Berührungslinie* k^a der Tangentenfläche χ^a einer Umschwungkurve l^a mit dem Leithyperboloid $\mathfrak{G}^a$ (Abb. 3): Die Polarkorrelation von $\mathfrak{G}^a$ führt jede Erzeugende e^a von χ^a in die konjugierte Flächentangente f^a über, die k^a berührt.

²⁾ Der obere Teil von Abb. 4 kann als Aufriß einer Umschwungbahn mit der Frequenz $c = 4$ gedeutet werden, der untere Teil (mit etwas modifizierten Sichtbarkeitsverhältnissen) als Schrägriß.

Da alle e^a den Zylinder σ^a berühren, treffen alle f^a den dazu polaren Kreis

$$(6.3) \quad x^2 + y^2 = a^2 \frac{(c^2 - 1)^2}{c^4}, \quad z = 0.$$

k^a kann demnach als *projektive Böschungslinie* auf der Leitquadrik $\mathcal{Q}^a$ bezeichnet und durch eine geeignete Kollineation in eine gewöhnliche Böschungslinie auf einer Drehquadrik verwandelt werden. Nach [14] ist der Grundriß von k^a (die Normalprojektion auf die xy -Ebene) eine *nichteuklidische Kreisevolvente*: Die konjugierten Flächentangenten e^a und f^a erscheinen im Grundriß als bezüglich des Umrißkreises $z=0$ von $\mathcal{Q}^a$ (6.2) konjugiertes Geradenpaar, und dieses ist im Sinne der auf diesen Kreis gegründeten projektiven Metrik orthogonal; der Grundriß von k^a ist mithin Orthogonaltrajektorie der Tangentenschar des Basiskreises von σ^a , also dessen Evolvente im Sinne der genannten Cayley-Kleinschen Metrik, die für $c^2 < 1$ elliptisch und für $c^2 > 1$ hyperbolisch ist.³⁾

Satz 8. Die Berührungslinie der Tangentenfläche einer Umschwungbahn mit dem Leithyperboloid ist eine projektive Böschungslinie desselben. Im Normalriß auf eine achsennormale Ebene erscheint sie als nichteuklidische Kreisevolvente.⁴⁾

7. Zweidimensionale Parallelrisse

Wird der in Abschn. 5 für einen Punkt $P \in R^4$ durch Projektion aus einem Fernpunkt L auf einen Bildraum Π erklärte Parallelriß $P^a \in \Pi$ einer weiteren Parallelprojektion aus einem Fernpunkt $M \in \Pi$ auf eine Bildebene $\pi \subset \Pi$ unterworfen, so erhält man einen Bildpunkt $P^\alpha \in \pi$, der auch direkt durch Projektion von P aus der Ferngerade LM gewonnen werden könnte: Die „Sehebene“ LMP enthält nämlich mit dem Zwischenbild $P^a \in LP$ auch den Sehstrahl MP^a , so daß ihr (einziger) Treffpunkt mit π der Bildpunkt P^α ist. Weil auch bei der Abbildung $P \mapsto P^\alpha$ Geraden-, Parallelen- und Teilverhältnistreue herrscht, bewirkt ein Wechsel der Bildebene π lediglich eine affine Veränderung des Bildes. Ferner kann weiterhin das durch (5.1) ausgedrückte *axonometrische Prinzip* angewendet werden, nur daß jetzt in

$$(7.1) \quad O^\alpha P^\alpha = \mathbf{x}^\alpha = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} + t\mathbf{d}$$

die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ als komplanar vorauszusetzen sind. Bei willkürlicher Vorgabe dieser Vektoren gilt übrigens der Satz von Pohlke, demzufolge das dann durch (7.1) definierte axonometrische Bild zu einer bestimmten Parallelprojektion ähnlich ist [9]. Anweisungen hinsichtlich der Annahme zur Erzielung einer Normalprojektion sind wieder in [17] zu finden.

Das durch (5.2) — mit $\mathbf{x}^\alpha$ statt $\mathbf{x}^a$ — erfaßte Bildgebiet $\sigma^\alpha \subset \pi$ für die Schraubzyklide σ (3.1) ist im allgemeinen, d. h. wenn die Projektionsachse LM keine der beiden Achsenebenen α und β trifft, also nicht dem Fernstrahlnetz gh angehört, mit einem Netz aus zwei Scharen translationskongruenter Ellipsen überdeckt: es besteht aus den von den Kreisen $m \subset \sigma$ ($v = \text{const}$) herrührenden u -Linien $m^\alpha \cong l'^\alpha$ ($b = 0$), die auf der Ellipse l''^α ($a = 0$) zentriert sind, und aus den v -Linien $n^\alpha \cong l''^\alpha$, zentriert auf l'^α (vgl. Abb. 2). Die gemeinsame Einhüllende der beiden Ellipsenscharen — der (scheinbare) Umriß von σ — ist auf zweifache Weise als *affine Toroide* zu deuten: Verwandelt man nämlich die Mittenellipse l'^α der

³⁾ Solche Kreisevolventen hat der Verfasser kürzlich genauer untersucht [18].

⁴⁾ Auf Grund des kollinearen Zusammenhangs der Berührungslinie k^a mit einer Böschungslinie auf einer Drehquadrik ließe sich noch zeigen, daß ihr Zentralriß aus dem Ursprung auf eine achsennormale Ebene eine gespitzte Radlinie der Charakteristik $(1-c):(1+c)$ ist.

zweiten Schar durch eine Affinität in einen Kreis, so werden auch alle Ellipsen m^α der ersten Schar zu (kongruenten) Kreisen, und ihre Einhüllende wird zu einer Parallelkurve der l''^α entsprechenden Ellipse, also zu einer als Normalumriß des Torus wohlbekannten „Toroide“, einer algebraischen Kurve 8. Ordnung. Analog läßt sich auch die zweite Ellipsenschar durch eine passende Affinität in eine Schar kongruenter, auf einer Ellipse zentrierter Kreise verwandeln.⁵⁾

Benutzt man bei beliebig angenommener, jedoch weder α noch β treffender Projektionsachse LM eine zur Fixebene α oder β ganzparallele Bildebene π , so besteht die Schar $\{m^\alpha\}$ bzw. $\{n^\alpha\}$ von vornherein aus Kreisen, und man erhält als Umriß der Schraubzyklide σ unmittelbar eine Toroide. Nimmt man hingegen LM als von g und h verschiedene Treffgerade zweier Gegenseiten des invarianten Vierseits $ijij$ an (Abschn. 1), und wählt man die Bildebene π so, daß sie eine zweite Treffgerade desselben Erzeugendenpaares enthält, dann bestehen beide Scharen $\{m^\alpha\}$ und $\{n^\alpha\}$ aus Kreisen; die Umrißtoroide zerfällt hierbei in zwei konzentrische Kreise und deren isotropes, doppelt zählendes Asymptotenpaar. — Trifft jedoch die Projektionsachse etwa die Ferngerade h von β , so arten die Ellipsen n^α in Strecken aus und der Umriß reduziert sich auf zwei Ellipsen der Schar $\{m^\alpha\}$ und zwei parallele gemeinsame Tangenten (vgl. Abb. 3 und Abb. 4, unten). Trifft die Achse sowohl h als auch die Ferngerade g von α , so arten auch die Ellipsen m^α in Strecken aus (Abb. 4, oben).

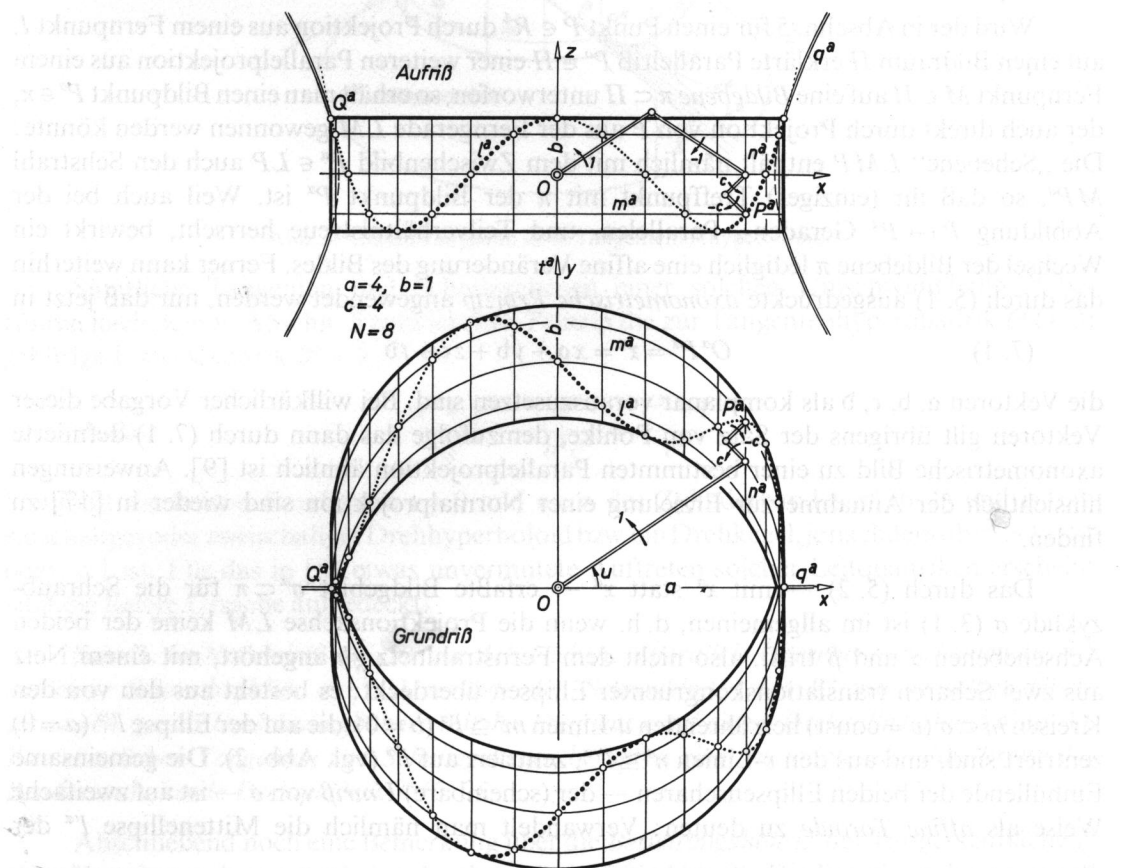


Abb. 4. Zweidimensionale Parallelprojektionen einer Schraublinie des R^4 (zugeordnete Normalrisse des Raumbildes aus Abb. 2).

⁵⁾ Hierin steckt auch die vielleicht noch nicht vermerkte Tatsache, daß sich jede Toroide durch eine geeignete Affinität in eine andere Toroide überführen läßt.

Satz 9. Bei Parallelprojektion auf eine Ebene tritt als scheinbarer Umriß der Schraubzyklide σ im allgemeinen eine affine Toroide auf; für besondere Annahmen kann dieselbe zerfallen.

Mit Hilfe der beiden Ellipsenscharen in der Bildebene π läßt sich der ebene Parallelriß l^π einer Schraublinie l ($v = cu + d$) leicht zeichnen: l^π erscheint als Bahn eines Punktes P^π , der auf der Ellipse m^π oder n^π mit konstanter Flächengeschwindigkeit wandert, während diese Ellipse ihre Translationsschar mit dazu proportionaler Flächengeschwindigkeit des Mittelpunkts durchläuft. Die Bildkurve l^π befindet sich ganz in dem von m^π oder n^π überstrichenen Bildgebiet σ^π der l tragenden Schraubzyklide σ und geht an dessen Grenze im allgemeinen berührend heran; ausnahmsweise kann sie auf dieser Grenze auch mit einer Spitze aufsetzen (Abb. 2 und Abb. 4, unten) oder aber — bei doppelter Überdeckung — einen parasitischen Zweig ins Außengebiet senden (Abb. 4, oben).

Faßt man die Zeichenebene π — nach Einführung kartesischer Koordinaten ξ, η mit dem Nullpunkt O^π — als Gaußsche Ebene für die komplexen Zahlen $\zeta = \xi + i\eta$ auf, so erhält man aus (7. 1) unter Anwendung der Eulerschen Formeln als komplexe Darstellung für den Parallelriß l^π einer reellen Schraublinie l eine Gleichung der Bauart

$$(7. 2) \quad \zeta = a_1 e^{iu} + a_2 e^{-iu} + a_3 e^{ciu} + a_4 e^{-ciu},$$

wobei die a_k komplexe Konstante bedeuten. Hieraus folgt mit Benützung der in [13] eingeführten Terminologie:

Satz 10. Der ebene Parallelriß einer Schraublinie des R^4 mit der Übersetzung c ist im allgemeinen eine höhere Radlinie 4. Stufe mit der Charakteristik $1 : -1 : c : -c$.

Solche Radlinien entstehen als Bahn des Endpunktes eines gelenkigen, im Ursprung O^π befestigten Polygonzuges $O^\pi A_1 A_2 A_3 P^\pi$, dessen starre, in der Ausgangslage $u=0$ durch die komplexen Konstanten a_k festgelegte Glieder sich mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten $1, -1, c$ und $-c$ drehen (Abb. 2 und 3). Ist speziell $|a_1| = |a_2|$ und $|a_3| = |a_4|$, dann entsteht eine *Lissajoussche Kurve*; dieser Fall tritt bei der oben erwähnten Parallelprojektion aus einer Treffgeraden der beiden Achsenebenen α und β ein (Abb. 4, oben).⁶⁾

Verschwindet eine der Konstanten a_k , dann liegt nur mehr eine *Radlinie 3. Stufe* vor. Dieser Fall tritt ein, wenn eine der beiden Ellipsenscharen $\{m^\pi\}$ oder $\{n^\pi\}$ aus Kreisen besteht, beispielsweise wenn die Bildebene π zu α oder β ganzparallel ist (Abb. 4, unten).⁷⁾ Bestehen beide Scharen aus Kreisen (s. o.), dann verschwinden zwei der Konstanten a_k und das Schraublinienbild l^π reduziert sich auf eine gewöhnliche Radlinie (2. Stufe), also eine *Trochoide* mit der Charakteristik $1 : c, 1 : -c$ oder $1 : -1$ (Ellipse, affin zu den Bildkreisen l' oder l'' in Abb. 1).

8. Stereographische Projektion

Vor der Behandlung der Zentralprojektion aus einem beliebigen eigentlichen Zentrum L (Abschn. 9) soll ein wichtiger Sonderfall erörtert werden, nämlich die Projektion aus einem reellen Punkt L der Sphäre Σ (2. 2) auf eine zu OL normale Überebene Π .

⁶⁾ Vgl. auch die bei K. Strubecker [12] in Fig. 10 und 11 wiedergegebenen Normalrisse von Schraublinien mit den Übersetzungen $c = 2$ bzw. $-3/2$.

⁷⁾ Vgl. W. Kautny [5], Abb. 2, unten.

Sie ordnet jedem von L verschiedenen Punkt $P \in R^4$ den auf dem Sehstrahl LP liegenden Bildpunkt $P^* \in \Pi$ zu. Bei Beschränkung auf Punkte $P \in \Sigma$ unter Ausschluß von $P = L$ liegt eine eindeutige, als *stereographische Projektion* bekannte Abbildung von Σ auf Π vor, die auch als Inversion von L ausgedeutet werden kann und daher durch Kreis-, Kugel- und Winkeltreue ausgezeichnet ist.

Bei Anwendung der stereographischen Projektion auf eine Schraubzyklide $\sigma \subset \Sigma$ geht diese, wenn man sie gemäß Satz 2 als doppelte Rohrfläche auffaßt, offenbar in eine doppelte Kanalfäche σ^* über, also in die gemeinsame Einhüllende zweier Kugelscharen; wie bekannt, ist dies eine *Dupinsche Zyklide* [7], § 10, und zwar im vorliegenden Fall eine solche vom *Ringtypus*, weil die vier von den Ecken des invarianten Vierseits $ij\bar{i}\bar{j}$ (Abschn. 3) herührenden konischen Doppelpunkte $I^*, J^*, \bar{I}^*, \bar{J}^*$ paarweise konjugiert-imaginär sind. Den ∞^1 Parallelkreisen m und n von σ entsprechen dabei die ebenfalls kreisförmigen Krümmungslinien m^* und n^* von σ^* . Die auf σ verlaufenden Schraublinien l werden in die *Loxodromen* l^* dieser Kreisscharen übergeführt; die Schar $\{m^*\}$ etwa wird gemäß Abschn. 3 unter dem konstanten Kurswinkel $\gamma = \arctg(bc/a)$ durchsetzt. Für $c = \pm 1$ ergeben sich insbesondere die Villarceauxschen Loxodromenkreise.

Gehört das Zentrum L nicht der Schraubzyklide σ (3. 1) an, so ist die Dupinsche Zyklide σ^* von 4. Ordnung. Nimmt man speziell L in einer der beiden Achsenebenen α oder β an, wie dies K. Strubecker [12] tut, so gelangt man wegen der bestehenden Rotationssymmetrie zu einem *Ringtorus* σ^* und seinen Loxodromen l^* . Für die stereographische Projektion aus $L(0, 0, 0, r)$ auf den Koordinatenraum Π ($t=0$) lauten die Abbildungsgleichungen:

$$(8. 1) \quad x^* = \frac{rx}{r-t}, \quad y^* = \frac{ry}{r-t}, \quad z^* = \frac{rz}{r-t}, \quad t^* = 0.$$

Ihre Anwendung auf die Schraublinie $l \subset \sigma$, beschrieben durch (3. 1) mit $v = cu$, liefert eine zweckmäßige Parameterdarstellung der Torusloxodrome l^* , wie sie der Verfasser (mit anderen Bezeichnungen) in [15] benutzte.

Bei der Projektion aus L besitzt die zur Übersetzung c gehörige, von den Schraubtangente aller Punkte von σ gebildete Hyperquadrik Θ (4. 3) wieder eine Umrißquadrik $\mathcal{Q}$ in der Polarüberebene A von L , welche diesmal nicht durch O geht. Auf Grund der gleichen Schlüsse wie in Abschn. 5 folgt, daß die Bildquadrik $\mathcal{Q}^* \subset \Pi$ von sämtlichen Tangenten und Schmiegeebenen der auf σ^* verlaufenden Schraublinienrisse l^* berührt wird. Diese *Leitquadrik* $\mathcal{Q}^*$ ist der Zyklide σ^* längs jener (unter Umständen zerfallenden) sphärischen Quartik q^* berührend angeschrieben, die als Stereoriß der Kurve $q = A \cap \sigma$ auftritt. Es gilt mithin analog zu Satz 5:

Satz 11. *Sämtliche Tangenten und Schmiegeebenen der ∞^1 auf einer Dupinschen Ringzyklide 4. Ordnung verlaufenden Loxodromen gleichen Kurswinkels berühren ein bestimmtes, der Zyklide längs einer sphärischen Quartik angeschriebenes Hyperboloid, das für die Loxodromenkreise zu einem Kegel 2. Ordnung ausartet. Auf dieser Quartik liegen die Henkelpunkte der Loxodromen.*

Daß es sich bei den nichtsingulären Leitquadriken $\mathcal{Q}^*$ um *Hyperboloide* handelt, ist aus der Betrachtung der auf der Symmetrieachse liegenden Scheitelpunkte der Dupinschen Zyklide σ^* zu erkennen: In diesen vier Punkten sind je zwei Loxodromentangenten parallel, und die zugehörigen, die Achse enthaltenden Schmiegeebenen fallen paarweise zusammen; die gemeinsamen Berührungspunkte mit $\mathcal{Q}^*$ sind daher reelle Fernpunkte.

Für die Projektion aus $L(0, 0, 0, r)$ hat der Polarraum Λ bezüglich Θ (4.3) die Gleichung $rt = b^2(1 - c^2)$. Die Umrißquadratik $\mathfrak{g} = \Lambda \cap \Theta$ wird demgemäß dargestellt durch

$$(8.2) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{c^2 - 1}{c^2},$$

ihre Projektion $\mathfrak{g}^*$ — also die Leitquadrik — zufolge (8. 1) durch

$$(8.3) \quad \frac{x^{*2} + y^{*2}}{a^2} - \frac{z^{*2}}{b^2 c^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 c^2} \cdot \frac{c^2 - 1}{c^2}.$$

Das Auftreten solcher Tangentenleitquadriken (ein- oder zweischalige Drehhyperboloide für $c^2 > 1$ bzw. $c^2 < 1$) für die Torusloxodromen hat der Verfasser in [15] auf direktem Wege festgestellt (vgl. Abb. 5). Die dadurch nahegelegte entsprechende Vermutung für Dupinsche Zykliken hat dann F. Dorau [2] mittels ziemlich aufwendiger Rechnungen bestätigt. Jetzt ist also der tiefere Grund für diese Tatsachen auf eine gemeinsame Wurzel zurückgeführt.

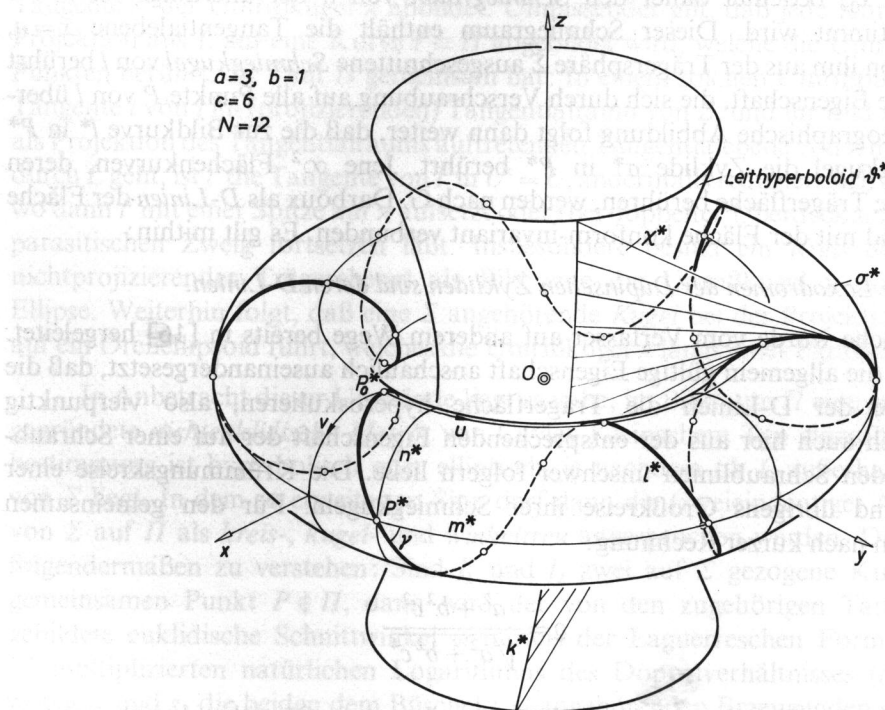


Abb. 5. Torusloxodrome samt Leithyperboloid.

Ergänzend ist noch der zurückgestellte Fall zu betrachten, daß das Projektionszentrum $L \in \Sigma$ der Schraubzyklide $\sigma = \Sigma \cap \Theta$ angehört. Ihr Stereoriß σ^* ist dann eine „parabolische“ *Dupinsche Zyklide 3. Ordnung* [7], § 10. Wegen $L \in \Theta$ ist nun Λ ein Tangentialraum, der Θ nach einem quadratischen Kegel $\mathfrak{g}$ mit der Spitze L schneidet. Seine Projektion $\mathfrak{g}^*$ reduziert sich daher auf einen *Kegelschnitt q^** , welcher auch als Bild der auf σ verlaufenden sphärischen Quartik $q = \mathfrak{g} \cap \Sigma$ aufgefaßt werden kann und demnach der Zyklide σ^* angehört. Die Loxodromen der parabolischen Dupin-Zykliden hat seinerzeit E. Bompiani [1] genauer betrachtet; die Existenz ihrer Tangentenleitkegelschnitte, welche diese Loxodromen als *projektive Böschungslinien* ausweisen, hat F. Dorau [2] festgestellt.

Satz 12. *Sämtliche Tangenten der ∞^1 auf einer Dupinschen Ringzyklide 3. Ordnung verlaufenden Loxodromen gleichen Kurswinkels treffen einen bestimmten Flächenkegelschnitt. Derselbe wird von allen Schmiegeebenen dieser Loxodromen berührt undartet für die Loxodromenkreise in ein Geradenpaar aus.*

Mit Rücksicht auf die ∞^2 Bewegungen in sich, welche die Schraubzyklide σ (3.1) gestattet, genügt es für lokale Untersuchungen, etwa die Stelle $P_0(a, 0, b, 0)$ zu betrachten. Für die durch $v = cu$ beschriebene Bahn l von P_0 lauten die ersten drei Ableitungsvektoren gemäß Abschn. 4:

$$(8.4) \quad \dot{x}_0 = (0, a, 0, bc), \quad \ddot{x}_0 = (-a, 0, -bc^2, 0), \quad \ddot{\bar{x}}_0 = (0, -a, 0, -bc^3).$$

Die von $\dot{x}_0$ und $\ddot{x}_0$ in P_0 aufgespannte Schmiegeebene wird dargestellt durch

$$(8.5) \quad bc^2x - az = ab(c^2 - 1), \quad bcy - at = 0.$$

Die durch die erste Gleichung bestimmte Überebene enthält auch den (in P_0 angebrachten) Vektor $\ddot{\bar{x}}_0$, bedeutet daher den Schmiegraum von l , der allerdings für $c^2 = 1$ ($l = \text{Kreis}$) unbestimmt wird. Dieser Schmiegraum enthält die Tangentialebene $x = a$, $z = b$ von σ ; die von ihm aus der Trägersphäre Σ ausgeschnittene Schmiegekugel von l berührt daher σ in P_0 , eine Eigenschaft, die sich durch Verschraubung auf alle Punkte P von l überträgt. Durch stereographische Abbildung folgt dann weiter, daß die zur Bildkurve l^* in P^* gehörige Schmiegekugel die Zyklide σ^* in P^* berührt. Jene ∞^2 Flächenkurven, deren Schmiegekugeln die Trägerfläche berühren, werden nach G. Darboux als *D-Linien* der Fläche bezeichnet; sie sind mit der Fläche konform-invariant verbunden. Es gilt mithin:

Satz 13. *Die Loxodromen der Dupinschen Zykliiden sind deren D-Linien.*

Diese Tatsache wurde vom Verfasser auf anderem Wege bereits in [16] hergeleitet. Dort wurde auch die allgemein gültige Eigenschaft anschaulich auseinandergesetzt, daß die Krümmungskreise der D-Linien die Trägerfläche hyperoskulieren, also vierpunktig berühren, was sich auch hier aus der entsprechenden Eigenschaft der auf einer Schraubzyklide verlaufenden Schraublinien unschwer folgern ließe. Die Krümmungskreise einer Schraublinie l sind übrigens Großkreise ihrer Schmiegekugeln. Für den gemeinsamen Radius findet man nach kurzer Rechnung:

$$(8.6) \quad \varrho = \frac{a^2 + b^2c^2}{\sqrt{a^2 + b^2c^4}}.$$

Das zum Punkt $P_0^* \in l^*$ gehörige Schmiegekugelzentrum Q_0^* rührt bei der stereographischen Projektion vom Pol Q_0 des Schmiegraums (8.5a) bezüglich der Sphäre Σ (2.2) her, dessen Koordinaten für $c^2 \neq 1$ durch

$$(8.7) \quad x_0 = \frac{(a^2 + b^2)c^2}{a(c^2 - 1)}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{a^2 + b^2}{b(1 - c^2)}, \quad t_0 = 0$$

gegeben sind. Die Ortslinie der Schmiegekugelzentren Q^* , also die *Planevolute* von l^* , ist mithin die Projektion der Bahnschraublinie von Q_0 aus L auf Π .

Satz 14. *Die Planevoluten der nicht kreisförmigen Loxodromen einer Dupinschen Zyklide sind dreidimensionale Zentralrisse von Schraublinien des R^4 .*

Die analytischen Darstellungen dieser Planevoluten sowie ihrer naturgemäß im allgemeinen ebenfalls existierenden Tangentenleitquadriken hat für die Loxodromen der Dupinschen Zykliken F. Dorau [2] angegeben; für die Torusloxodromen sind sie bereits in [15] zu finden.

9. Dreidimensionale Zentralrisse

Sei L jetzt ein eigentliches, jedoch nicht der Sphäre Σ angehörendes Projektionszentrum; als Bildraum Π mag vorläufig die Polarüberebene von L bezüglich Σ dienen. Jedem von L verschiedenen Punkt $P \in R^4$ wird dann als *Zentralriß* jener eindeutig bestimmte Bildpunkt $P^c \in \Pi$ zugeordnet, der auf dem Sehstrahl LP liegt. Ein Wechsel des Bildraums Π würde bloß eine kollineare Veränderung des Bildes bewirken.

Als wahrer und gleichzeitig scheinbarer *Umriß* von Σ tritt jene *Kugel* $\kappa = \kappa^c$ auf, die Π aus Σ ausschneidet; sie ist einteilig, wenn sich L außerhalb von Σ befindet ($OL > r$), andernfalls ist sie nullteilig ($OL < r$). Dem darstellend-geometrischen Prinzip folgend, welches bereits in Abschn. 5 bei der Überquadrik Θ angewendet wurde, kann man sagen, daß sich jede der ∞^3 (isotropen) Erzeugenden s von Σ auf eine (im allgemeinen imaginäre) Tangente s^c der Umrißkugel κ abbildet. Umfassender gilt, daß jede Kurve $l \subset \Sigma$ durch die Projektion aus L auf eine Kurve $l^c \subset \Pi$ abgebildet wird, welche die Umrißkugel κ in jenen Punkten berührt, die l mit Π gemeinsam hat: In einem solchen Umrißpunkt U verläuft die Tangente t von l im (projizierenden) Tangentialraum von Σ , und ihr Bild t^c gehört daher der als Projektion des Tangentialraums auftretenden Tangentialebene von κ in U an; falls t nicht durch L geht, ist t^c die Tangente von l^c in $U^c = U$, andernfalls reduziert sich t^c auf den Punkt U , wo dann l^c mit einer Spitze auf κ aufsetzt oder (bei doppelter Überdeckung) sich durch einen parasitischen Zweig fortsetzen läßt. Insbesondere besitzt ein *Kreis* der Sphäre Σ (mit nichtprojizierender Trägerebene) als Bild eine die Umrißkugel κ doppelt berührende Ellipse. Weiterhin folgt, daß eine Σ angehörende *Kugel* bei der Projektion im allgemeinen auf ein Drehellipsoid führt, welches die Umrißkugel κ längs eines Parallelkreises berührt.

In Anbetracht dieser Umstände liegt es nahe, im Bildraum Π eine auf die Maßkugel κ gegründete *nichteuklidische Metrik* von Cayley-Kleinschem Typ einzuführen; diese Maßbestimmung ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem ob L außerhalb oder innerhalb von Σ liegt. In dem so erweiterten Sinn darf dann die (zweieindeutige) Abbildung $P \mapsto P^c$ von Σ auf Π als *kreis-, kugel- und winkeltreu* angesprochen werden. Die Winkeltreue ist folgendermaßen zu verstehen: Sind l_1 und l_2 zwei auf Σ gezogene Kurven durch einen gemeinsamen Punkt $P \notin \Pi$, dann wird der von den zugehörigen Tangenten t_1 und t_2 gebildete euklidische Schnittwinkel φ mittels der Laguerreschen Formel durch den mit $i/2$ multiplizierten natürlichen Logarithmus des Doppelverhältnisses $(t_1 t_2 s_1 s_2)$ definiert, wobei s_1 und s_2 die beiden dem Büschel $t_1 t_2$ angehörenden Erzeugenden von Σ bezeichnen. Dieses Doppelverhältnis bleibt bei der Projektion erhalten und stimmt also mit jenem überein, das die Tangenten t_1^c und t_2^c von l_1^c und l_2^c in P^c mit den ihrem Büschel angehörenden Tangenten s_1^c und s_2^c der Maßkugel κ bilden; zufolge der der Laguerreschen nachgebildeten Cayley-Kleinschen Formel bedeutet dies, daß sich für den nichteuklidisch ausgemessenen Winkel $t_1^c t_2^c$ ebenfalls der Wert φ ergibt.

Die gleichen Überlegungen — mit gegebenenfalls geänderten Realitätsverhältnissen — lassen sich anstellen, wenn man die Überkugel Σ durch irgendeine andere, dem Büschel (4. 3) entnommene reguläre Hyperquadrik Θ ersetzt.⁸⁾ Geht Θ insbesondere durch das

⁸⁾ Für singuläres Θ wären gesonderte Betrachtungen durchzuführen, auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Projektionszentrum L , so artet die Umriß- und Maßquadrik in einen Kegelschnitt σ^c aus, der dem Bildraum Π eine *parabolische Metrik* aufprägt; dieselbe ist äquivalent zur euklidischen, wenn σ^c nullteilig ist (vgl. Abschn. 8), hingegen pseudoeuklidisch, wenn σ^c einteilig ausfällt.

Für die Bildfläche $\sigma^c \subset \Pi$ der *Schraubzyklide* σ (3. 1) läßt sich nun aussagen, daß sie stets eine *algebraische Fläche 4. Ordnung* ist, weil wegen der Voraussetzung $L \notin \Sigma$ auch $L \notin \sigma$. Sie besitzt einen *Doppelkegelschnitt* σ^c , gehört also zu einer im Anschluß an E. E. Kummer ausgiebig erforschten Flächenfamilie; ihre Deutung als dreidimensionale Projektion der Schnittfläche 4. Ordnung zweier Hyperquadriken des R^4 lag den Untersuchungen von C. Segre zugrunde [8], § 20. Die vorliegende Fläche σ^c besitzt im übrigen noch vier konische, von den Ecken des invarianten Vierseits $ij\bar{i}\bar{j}$ (Abschn. 3) herrührende Doppelpunkte $F, J, \bar{F}, \bar{J}$. Sie berührt die Maßkugel κ längs jener sphärischen Quartik $q = q^c$, die Π aus σ ausschneidet, und kann als gemeinsame Einhüllende der beiden nichteuklidischen Kugelscharen aufgefaßt werden, die den euklidischen Berührungskugeln der Zyklide σ entsprechen. Die zugehörigen Berührungslinien m^c und n^c sind nichteuklidische Kreise und bilden das Orthogonalnetz der Krümmungslinien von σ^c . Führt man den Doppelkegelschnitt σ^c durch eine Kollineation in den absoluten Kegelschnitt $\Pi \cap \omega$ über — was auf reelle Weise nur bei nullteiligem σ^c möglich ist —, so gehen die nichteuklidischen Scharkugeln in euklidische über, weil sie σ^c doppelt berühren, und σ^c wird in eine Dupinsche Zyklide verwandelt.

Wegen der „Winkeltreue“ der Abbildung $\sigma \mapsto \sigma^c$ können die Bildkurven F der von σ getragenen Schraublinien l als *nichteuklidische Loxodromen* der Krümmungslinienscharen von σ^c gedeutet werden. Unter ihnen finden sich für die Übersetzungen $c = \pm 1$ wieder Loxodromenkreise.

Satz 15. *Bei Zentralprojektion aus einem eigentlichen, weder der Sphäre Σ (2. 2) noch einer singulären Hyperquadrik des Büschels (4. 3) angehörenden Zentrum bildet sich die Schraubzyklide σ (3. 1) auf eine Fläche 4. Ordnung σ^c mit Doppelkegelschnitt und vier konischen Doppelpunkten ab, die als nichteuklidisches Seitenstück einer Dupinschen Zyklide im Sinne jener projektiven Metrik aufgefaßt werden kann, welche sich auf die Umrißquadrik von Σ als Maßfläche gründet. Die auf σ verlaufenden Schraublinien des R^4 erscheinen in der Projektion als Loxodromen der kreisförmigen Krümmungslinien von σ^c im Sinne der genannten Metrik. Die Loxodromen sind gleichzeitig die nichteuklidischen D-Linien der Fläche.*

Durch Betrachtung der mit einer bestimmten Übersetzung c auf der Schraubzyklide σ verlaufenden Schraublinien l und ihrer Tangentenhyperquadrik Θ (4. 3) sowie deren zur Projektion aus L gehörigen (wahren) Umrißquadrik $\mathfrak{Q} \subset \Theta$ schließt man wie in Abschn. 5 und 8, daß im Falle $L \notin \Theta$ alle Tangenten der Schraublinienrisse F die *Leitquadrik* $\mathfrak{Q}^c \subset \Pi$ berühren. Im Sonderfall $L \in \Theta$ wird $\mathfrak{Q}$ zu einem Kegel und die Leitquadrik artet in den *Doppelkegelschnitt* σ^c von σ^c aus, der von allen Tangenten der Loxodromen F getroffen wird.

Satz 16. *Sämtliche Tangenten und Schmiegeebenen der ∞^1 auf einer nichteuklidischen Dupin-Zyklide verlaufenden Loxodromen gleichen Kurswinkels berühren im allgemeinen eine bestimmte, dieser Zyklide längs einer Raumkurve 4. Ordnung angeschriebene Quadrik, die für die Loxodromenkreise zu einem Kegel 2. Ordnung ausartet. Für einen ausgezeichneten Kurswinkel kann diese Leitquadrik auf den Doppelkegelschnitt der Zyklide zusammenschrumpfen, der dann von allen Loxodromentangenten getroffen wird.*

Wendet man die dem Satz 15 zugrundeliegenden Überlegungen im Grenzfall der *Normalprojektion* auf den Koordinatenraum Π ($t = 0$) an — L ist dann der Fernpunkt der

t -Achse (Abschn. 6) —, so ergibt sich der Satz von W. Kautny [5], wonach die auf dem Zylinderband (6. 1) verlaufenden *Umschwungbahnen* als *nichteuklidische Loxodromen* der Parallelkreise und Erzeugenden desselben zu deuten sind, und zwar im Rahmen jener hyperbolischen Metrik, welche sich etwa auf die Kugel durch das Randkreispaar des Bandes stützt. In [5] wurde diese Tatsache aus der Betrachtung des Leithyperboloids (6. 2) gefolgert.

Die «*gnomonische Projektion*» aus dem Ursprung $L=O$ auf den Fernraum $\Pi=\Omega$ führt hingegen auf die mit der euklidischen Schraubung im R^4 verbundene *elliptische Schraubung* in Ω , die sich auf die absolute Maßkugel $\kappa=\omega$ (1. 1) gründet und von K. Strubecker [10] eingehend studiert wurde. Die Projektion der Schraubzyklide σ erweist sich hierbei aus Symmetriegründen als doppelt überdeckte *Quadrik* σ^c durch das Erzeugendenvierseit $ij\bar{i}\bar{j}$ von ω und ist als *Cliffordsche Abstandsfläche* der Diagonalen $g=\alpha^c$ und $h=\beta^c$ anzusehen. Die auf σ verlaufenden Schraublinien l bilden sich auf *elliptische Schraublinien* l^c von σ^c ab, die nichts anderes als die Schraubbahnen von Fernpunkten des R^4 sind; zu ihnen gehören für die Übersetzungen $c=\pm 1$ die beiden auf der Quadrik σ^c vorhandenen Scharen reeller geradliniger Erzeugenden. Das Auftreten von Tangentenleitquadriken $\mathfrak{g}^c$ in Gestalt weiterer Clifford-Flächen liegt im elliptischen Raum Ω auf der Hand; es wurde in [11] aus der wichtigen Eigenschaft gefolgert, daß die nichteuklidischen Schraublinien (wie die euklidischen) *Gewindekurven* sind.

10. Schlußbemerkungen

Übt man auf den R^4 zwei *simultane Projektionen* aus verschiedenen Zentren L_1 und L_2 auf denselben Bildraum Π aus, so besteht zwischen den beiden Bildpunkten eines Punktes $P \in R^4$ eine gewisse Relation: sie sind an die Strahlen eines bestimmten *Ordnerbündels* gebunden, welche die ∞^2 (doppeltprojizierenden) Ebenen durch die Gerade L_1L_2 aus Π ausschneiden; der Scheitel dieses Bündels liegt im Schnitt von L_1L_2 mit Π .

Verwendet man dieses Prinzip etwa bei der orthogonalen und der stereographischen Projektion auf den Koordinatenraum Π ($t=0$), so fällt der Doppelsehstrahl L_1L_2 mit der t -Achse zusammen, und der Ordnerbüschelscheitel befindet sich im Ursprung O . Für einen Raumpunkt $P(x, y, z, t)$ liegen daher der Normalriß $P^a(x, y, z, 0)$ und der Stereoriß P^* (8. 1) auf einem Ursprungstrahl. Unter Bezugnahme auf die Ergebnisse in Abschn. 6 und 8 fließt daraus durch Anwendung auf eine Schraublinie l des R^4 der in [15] abgeleitete Satz, daß die *Projektion einer Torusloxodrome l^* aus der Torusmitte O auf einen koaxialen Drehzylinder eine Umschwungkurve l^c ist*. Ein ähnlicher Satz muß offenbar auch für die Loxodromen einer Dupinschen Zyklide bestehen.

Mit Rücksicht darauf, daß bei der betrachteten euklidischen Schraubung des R^4 jede im eigentlichen Fixpunkt O zentrierte Überkugel Σ invariant bleibt, hat man offensichtlich auch die *nichteuklidischen Schraubungen* des vierdimensionalen Raums erfaßt, wenn man Σ als Maßquadrik auffaßt. Der elliptische Fall (Σ nullteilig) ist damit (im Reellen) vollständig erledigt, der hyperbolische Fall (Σ einteilig) allerdings nur für eigentliches Zentrum O ; die Annahme eines uneigentlichen oder „unendlich fernen“ Zentrums würde noch eine gesonderte Behandlung erfordern.

In Abschn. 1 wurde ausdrücklich vorausgesetzt, daß der neben den Ecken des invarianten Erzeugendenvierseits $ij\bar{i}\bar{j}$ der absoluten Quadrik ω vorhandene Fixpunkt O ein eigentlicher Punkt ist. Wäre — bei ständiger Beschränkung auf reelle Schraubungen — O ein (reeller) Fernpunkt, der keiner der beiden Vierseitdiagonalen g und h angehört, dann

wäre jeder Fernpunkt fest und die Schraubung würde zu einer *Schiebungsgruppe* mit parallelen Bahngeraden ausarten.

Nimmt man hingegen an, daß der zusätzliche Fixpunkt der gleichsinnig-kongruenten Ausgangstransformation $\mathfrak{A}$ etwa auf der Diagonale h liegt, dann bleibt jeder Punkt von h und damit jede Fernebene durch g fest. Wählt man nun eine beliebige eigentliche Ebene α durch g als Grundrißebene, so bilden sich sämtliche ∞^2 (ganzparallelen) Ebenen durch die Projektionsachse h auf Punkte in α ab, und ihre Abstände erscheinen dort in wahrer Größe. Hieraus folgt, daß die Bewegung $\mathfrak{A}: P_0 \mapsto P_1$ des R^4 in α eine kongruente Verlagerung $\mathfrak{A}: P'_0 \mapsto P'_1$ hervorruft, welche — da der Fall der Schiebung auszuschließen ist — als *Drehung* um ein eigentliches Zentrum β' aufgefaßt werden kann. Die Verbindungsebene β von β' mit h ist demnach (im Gegensatz zu α) invariant; da sie zu α ganznormal ist, mag sie als Aufrißebene dienen. Die in β induzierte kongruente Verlagerung $\mathfrak{A}'': P''_0 \mapsto P''_1$ ist nun eine *Schiebung*, weil alle Punkte der Ferngerade h festbleiben. Nach der in Analogie zu Abschn. 2 zu vollziehenden Gruppenbildung erkennt man, daß diese *spezielle Schraubung* des R^4 im Grundriß als kontinuierliche Drehung und im Aufriß als dazu proportionale Schiebung erscheint.

Zur analytischen Beschreibung wird man im R^4 ein kartesisches Normalkoordinatensystem einführen, dessen Ursprung im Schnittpunkt β' der Bildebenen α und β liegt, dessen xy -Ebene mit α und dessen zt -Ebene mit β zusammenfällt, wobei die z -Achse die Richtung der Schiebstrahlen in β haben mag. Die anstelle von (2. 1) tretende Darstellung der speziellen Schraubung lautet dann:

$$(10. 1) \quad x = x_0 \cos u - y_0 \sin u, \quad y = x_0 \sin u + y_0 \cos u, \quad z = z_0 + cu, \quad t = t_0.$$

Wie man sieht, bleibt also jede der ∞^1 Überebenen $t = \text{const}$ invariant und erfährt eine gewöhnliche *dreidimensionale Schraubung*. Der vorliegende Grenzfall, mit welchem sich H. Erfurth [4] befaßt hat, entsteht offenbar durch Ausdehnung einer euklidischen Schraubung eines $R^3 \subset R^4$ auf den ganzen R^4 . Abgesehen von den geradlinigen Bahnen in der Fixebene β ($x = y = 0$) sind die übrigen Punktbahnen *gewöhnliche Schraublinien* gleichen Parameters c in den invarianten, untereinander parallelen Überebenen $t = \text{const}$. Ihre dreidimensionalen Parallelprojektionen sind daher affine Schraublinien, während als zweidimensionale Parallelrisse im allgemeinen affine Radlinien auftreten, die in Sonderfällen zu affinen Sinuslinien oder Ellipsen werden können.

Literatur

- [1] E. Bompiani, Rappresentazione grafica delle cicli di Dupin e delle loro lossodromiche, Mem. Ist. Lomb. **21** (1915), 205—242.
- [2] F. Dorau, Über die Loxodromen der Dupinschen Zykliden, Diss. Univ. Wien, 1967.
- [3] L. Eckhart, Konstruktive Abbildungsverfahren, Wien 1926.
- [4] H. Erfurth, Über die konstruktive Behandlung der stetigen Schraubung des vierdimensionalen euklidischen Raumes, Wiss. Z. TH Leuna-Merseburg **3** (1960/61), 83—84.
- [5] W. Kautny, Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs, Monatsh. Math. **60** (1956), 66—82.
- [6] E. Kruppa, Über Affinität und Parallelprojektion im vierdimensionalen Raume, Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **118** (1909), 15—24.
- [7] R. v. Lilienthal, Besondere Flächen (Enzykl. math. Wiss. III D 5), Leipzig 1903.
- [8] W. F. Meyer, Spezielle algebraische Flächen (Enzykl. math. Wiss. III C 10), Leipzig 1930.
- [9] P. H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie (Sammlg. Schubert **35**), Leipzig 1902.
- [10] K. Strubecker, Über die Schraubungen des elliptischen Raumes, Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **139** (1930), 421—450.
- [11] K. Strubecker, Über nichteuklidische Schraubungen, Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 63—84.
- [12] K. Strubecker, Zur sphärischen Raumgeometrie, Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 275—290.

- [13] W. Wunderlich, Höhere Radlinien, Österr. Ingen. Archiv **1** (1947), 277—296.
- [14] W. Wunderlich, Beispiele für das Auftreten projektiver Böschungslinien auf Quadriken, Mat. Tidsskr. 1951, 9—26.
- [15] W. Wunderlich, Über die Torusloxodromen, Monatsh. Math. **56** (1952), 313—334.
- [16] W. Wunderlich, Euklidische und nichteuklidische D -Linien auf Quadriken, Annali mat. pur. appl. **33** (1952), 145—164.
- [17] W. Wunderlich, Zur normalen Axonometrie des vierdimensionalen Raumes, Monatsh. Math. **80** (1975), 231—240.
- [18] W. Wunderlich, Evolenti di cerchi e cicli nel piano iperbolico, Annali mat. pur. appl. **103** (1975), 109—120.

II. Institut für Geometrie, Technische Universität, Gußhausstr. 27, A-1040 Wien, Österreich

Eingegangen 4. März 1974