

Darbouxsche Verwandtschaft und Spiegelung an Flächen 2. Grades.

Von Walter Wunderlich in Berlin.

§ 1. Die spezielle Darbouxsche Verwandtschaft.

Die gebräuchlichsten ebenen Modelle zur Versinnbildlichung der nichteuklidischen Geometrien sind das Cayley-Kleinsche und das Poincarésche.

Im Falle der ebenen hyperbolischen Geometrie gelten im ersten Modell als „Punkte“ die Punkte innerhalb eines festen reellen Kreises a , des „Maßkreises“, als „Gerade“ dessen Sehnen. Im zweiten Modell sind „Punkte“ die bezüglich eines festen reellen Kreises b , des „Hauptkreises“ inversen Punktpaare, und „Gerade“ die denselben rechtwinklig schneidenden Kreise.

Für die elliptische Geometrie sind Maßkreis und Hauptkreis nullteilig. Das erste Modell arbeitet mit den Punkten und Geraden der projektiven Ebene, das zweite wieder mit den inversen Punktpaaren und Orthogonalkreisen des Hauptkreises; repräsentiert man diesen durch seinen reellen Vertreter b' , so erscheint der „Punkt“ als antiinverses Punktpaar bezüglich b' und die „Gerade“ als Kreis, der b' nach Gegenpunkten schneidet.

Abstand zweier „Punkte“ und Winkel zweier „Geraden“ werden dann in bekannter Weise ¹⁾ als der mit einem gewissen Faktor multiplizierte Logarithmus jenes Doppelverhältnisses erklärt, das die zu messenden Elemente „mit dem absoluten Gebilde (a bzw. b) einschließen“. — Als nichteuklidische „Kreise“ ergeben sich dann im ersten Modell die den Maßkreis doppelt berührenden Kegelschnitte, im zweiten Modell die euklidischen Kreise und Geraden, soweit sie nicht dem Bündel über dem Hauptkreis angehören.

Jedes der beiden Modelle besitzt seine ihm eigenen Vorzüge. Beim ersten haben die „Punkte“ und „Geraden“ die von der euklidischen Geometrie her vertraute Erscheinung, beim zweiten sind es die „Kreise“; überdies ist hier die Winkelmessung bekanntlich identisch mit der euklidischen.

Den Zusammenhang zwischen dem Modell von Cayley-Klein und jenem von Poincaré stellt nun eine auf Darboux zurückgehende einzweideutige quadratische Punkttransformation her ²⁾. Dieselbe läßt sich am übersichtlichsten durch einen räumlichen Projektionsvorgang erklären, wenn wir den Maßkreis a und den Hauptkreis b in der Ebene π zusammenfallen lassen (Abb. 1).

Im hyperbolischen Falle legen wir durch $a = b$ als Großkreis eine Kugel und projizieren jeden Punkt P des ersten (Cayley-Kleinschen) Feldes zunächst senkrecht

¹⁾ F. Klein, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie, Berlin 1928, S. 163ff.

²⁾ G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873. Siehe auch F. Klein, a. a. O., S. 293ff.; D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Berlin 1932, S. 224—226. R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig 1909, 4. Bd., S. 234—241. E. A. Weiß, Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation, Deutsche Mathematik 1 (1936), S. 447—453.

zu π auf die Kugel; durch Projektion der beiden so erhaltenen Kugelpunkte aus einem Endpunkt A des zu π normalen Durchmessers ergeben sich dann die P entsprechenden zwei Punkte P^* des zweiten (Poincaréschen) Feldes (Abb. 1a).

Der elliptische Fall läßt sich aus dem hyperbolischen auf komplexem Wege durch i -fache achsiale Streckung bezüglich des zu π normalen Durchmessers herleiten; die Verwandtschaft erklärt sich dann durch Projektion eines gleichseitigen zweischaligen Drehhyperboloides senkrecht zu π bzw. aus einem Scheitel A . — Mit Hilfe einer Kugel durch den reellen Vertreter $a^r = b^r$ von Maß- und Hauptkreis kann die Transformation folgendermaßen erzeugt werden (Abb. 1b): Man verbindet P mit einem Endpunkt A des zu π normalen Durchmessers und projiziert die Enden des hierzu parallelen Kugeldurchmessers aus A auf π zurück.

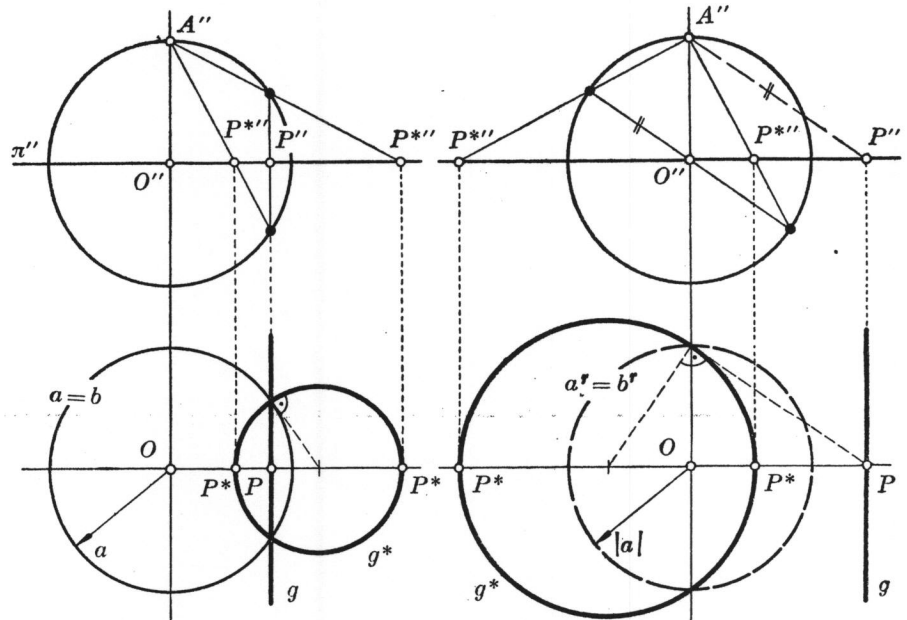


Abbildung 1a.

Abbildung 1b.

Diese räumliche Erklärung gestattet sämtliche Eigenschaften der Darbouxschen Verwandtschaft unmittelbar anzugeben. Insbesondere folgt aus der Tatsache, daß die Projektion aus A eine stereographische ist, daß einer Geraden g des ersten Feldes ein Kreis g^* des zweiten entspricht (Abb. 1) und zwar ein Orthogonalkreis von $a = b$ ³⁾. Das einem Punkt P entsprechende Punktepaar P^* liegt invers zum Hauptkreis⁴⁾. — Die euklidische Maßzahl ω des Schnittwinkels zweier Kurven auf

³⁾ K. Strubecker, Über eine Klasse spezieller Dreiecksnetze aus Kreisen, Mh. Math. Physik 39 (1932), leitet mit Hilfe dieser Verwandtschaft die von O. Volk bestimmten Dreiecksnetze aus Bündelkreisen aus den bekannten Geradenetzen von H. Graf und R. Sauer her. Ebenso R. Sauer und O. Baier, Über besondere Dreiecksnetze aus Kegelschnitten, Jber. dtsh. Math.-Ver. 43 (1934).

⁴⁾ Diese Inversion ist die der Darbouxschen Transformation „verbundene Verwandtschaft“. — In der Theorie der anallagmatischen Kurven (siehe etwa G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 2. Aufl., Bd. I, S. 428ff.) spielt die Darbouxsche Verwandtschaft die Vermittlerin zwischen der Polarkurve des Deferenten und der Kurve.

der Kugel kann mittels des Doppelverhältnisses erklärt werden, das die Kurventangenten mit dem konjugiert-komplexen Erzeugendenpaar durch den Schnittpunkt bilden. Bei der ersten Projektion (ins Cayley-Kleinsche Feld) entstehen aus den Erzeugenden Tangenten des Maßkreises, so daß unser Winkel nun zu einem solchen wird, dessen nichteuklidische Maßzahl ω ist; bei der zweiten Projektion (stereographisch ins Poincarésche Feld) bleibt hingegen der Winkel euklidisch erhalten. In diesem Sinne kann die Darboux'sche Verwandtschaft somit als winkeltreu bezeichnet werden.

Darboux selbst erklärt seine Transformation auf komplexem Wege: „Man ziehe aus P die Tangenten an den Maßkreis a und lege durch die konjugiert-komplexen Berührungspunkte die vier möglichen Minimalstrahlen; deren reelle Schnittpunkte P^* geben das P entsprechende Punktepaar ab.“ Demnach erscheint die Verwandtschaft als Aufeinanderfolge von Hesseschem Übertragungsprinzip und Laguerrescher Transformation.

Sowohl Grundriß als auch Aufriß in Abb. 1 stellen einfache Zeichenvorschriften zur konstruktiven Behandlung der Verwandtschaft dar.

Die Transformationsgleichungen in Polarkoordinaten r, φ (Ursprung O) lauten:

$$(1) \quad r^{*2} - 2a^2 \cdot \frac{r^*}{r} + a^2 = 0, \quad \varphi^* = \varphi,$$

wobei der Grundkreishalbmesser a im hyperbolischen Fall reell, im elliptischen rein imaginär anzunehmen ist.

§ 2. Die verallgemeinerte Darboux'sche Verwandtschaft.

Übt man auf eines der beiden Felder — etwa auf das zweite — von O aus eine zentrische Streckung $b:a$ aus, so gelangt man zu einer etwas allgemeineren Transformation

$$(2) \quad r^{*2} - 2ab \cdot \frac{r^*}{r} + b^2 = 0, \quad \varphi^* = \varphi,$$

die noch alle wesentlichen Merkmale beibehalten hat und die wir zum Unterschied von der in § 1 behandelten „speziellen“ die „verallgemeinerte“ Darboux'sche Verwandtschaft nennen wollen; der Quotient $a:b = \mu$ soll ihr „Modul“ heißen. Sie führt das Cayley-Kleinsche Modell mit dem Maßkreis a (Halbmesser a) in ein Poincarésches über dem Hauptkreis b (Halbmesser b) über ⁵⁾.

Abb. 2 zeigt die entsprechend abgewandelte räumliche Erklärung der Verwandtschaft durch Parallel- bzw. Zentralprojektion und stereographische Abbildung einer Kugel auf die Ebene π , wenn a und b als gleichmittig vorausgesetzt werden. Von Bedeutung ist der Spurkreis c der Kugel in π , der „Festkreis“, der die von O verschiedenen selbstentsprechenden Punkte der Verwandtschaft darbietet. Sein Halbmesser c ergibt sich aus

$$(3) \quad c^2 = 2ab - b^2.$$

Bei der speziellen Darboux'schen Verwandtschaft ($\mu = +1$) fallen die drei Kreise a, b, c zusammen. Sie kann demnach als Geraden-Kreis-Transformation einfach erklärt werden:

⁵⁾ Im Rahmen der allgemeinen Theorie der mehrdeutigen Verwandtschaften wäre a als „Grenzkurve“, b als „Doppelkurve“ zu bezeichnen (R. Sturm, a. a. O.).

Definition I. Einer Geraden g des 1. Feldes entspricht jener Kreis g^ des 2. Feldes, der den Hauptkreis a in seinen Treffpunkten mit g rechtwinklig schneidet (Abb. 1).*

Bei der verallgemeinerten Verwandtschaft heißt es dann:

Definition II. Einer Geraden g des 1. Feldes entspricht jener Kreis g^ des 2. Feldes, der den Hauptkreis b rechtwinklig schneidet und durch die Schnittpunkte von g mit dem Festkreis c geht (Abb. 2).*

In dieser Gestalt ersehen wir, daß sich die Inversion als Grenzfall für

$$b = 0, \quad c \neq 0 \quad (\mu = \infty)$$

der verallgemeinerten Verwandtschaft von Darboux unterordnen läßt.

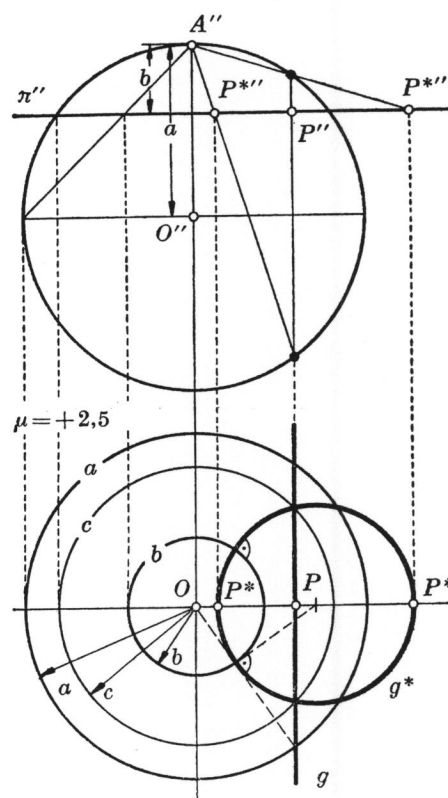


Abbildung 2a.

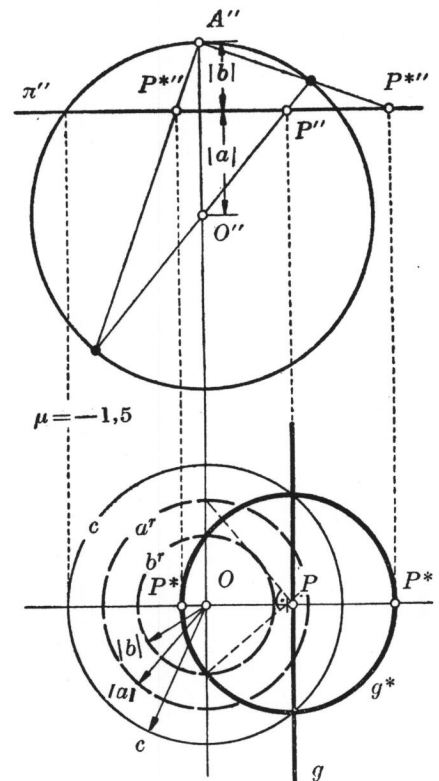


Abbildung 2b.

§ 3. Punktverwandtschaften, die alle Geraden in Kreise überführen.

Im Anschluß an die beiden eben ausgesprochenen Definitionen liegt es nahe, nach den allgemeinsten Punkttransformationen zu fragen, die Gerade in Kreise verwandeln. G. Scheffers ⁶⁾ beantwortete diese Frage und fand außer den Möbiusschen Kreisverwandtschaften noch drei Typen einzweideutiger Verwandtschaften; letztere

⁶⁾ Ber. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig 50 (1898), S. 261.

lassen sich durchwegs mit Hilfe (spezieller) Darboux'scher Verwandtschaften herleiten, wovon wir uns kurz überzeugen wollen. Wir stützen uns dabei auf die von Scheffers ausführlich bewiesene Tatsache, daß jedem Strahlbüschel des Geraden-Feldes ein Kreisbüschel im zweiten Felde entsprechen muß.

Wir wählen zu drei beliebigen Geraden des Feldes π die entsprechenden Kreise im Feld π^* ; diese besitzen i. a. einen Orthogonalkreis h . Den Schnittpunkten P, Q, X der Geraden entsprechen dann die bezüglich h inversen Schnittpunktpaare P^*, Q^*, X^* der Kreise. Unter der Voraussetzung, daß die Funktionaldeterminante der Transformationsgleichungen in P und Q nicht verschwindet, ist das Büschel der Fortschreitungsrichtungen P bzw. Q projektiv dem entsprechenden Büschel in P^* bzw. Q^* ; mit anderen Worten, das Strahlbüschel P bzw. Q und das Kreisbüschel P^* bzw. Q^* sind projektiv aufeinander bezogen. Ist diese Projektivität festgelegt — etwa durch Annahme eines vierten Punktes Y allgemeiner Lage und seines zu h inversen entsprechenden Paares Y^* — so ist die Verwandtschaft zwischen den beiden Feldern vollkommen bestimmt und wir haben bloß ihre Eigenschaften zu untersuchen. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns einer räumlichen Deutung, wobei wir je nach der Art von h drei Fälle zu unterscheiden haben.

a) *h ist ein Kreis.* Wir legen durch den Kreis eine Kugel und projizieren das 2. Feld stereographisch auf dieselbe, etwa aus dem „Nordpol“ A . Die Orthogonalkreise von h werden dabei zu Kugeln, deren Ebenen durch den Pol B der Feldebene bezüglich der Kugel gehen. Die Projektivität der Büschel P und P^* überträgt sich weiter auf das Büschel P^0 auf der Kugel, und wenn wir die Kugelpunkte nun auch noch aus B auf die Feldebene projizieren, auf das so erhaltene Strahlbüschel P' . Zwischen π und π' herrscht demnach eine Kollineation, bestimmt durch die Zuordnung der Vierecke $PQXY$ und $P'Q'X'Y'$, zwischen π' und π^* jedoch eine Darboux-Verwandtschaft. Unsere konstruierte Verwandtschaft $\pi \rightarrow \pi^*$ setzt sich daher aus einer Kollineation und einer darauffolgenden speziellen Darboux'schen Transformation zusammen; sie ist somit algebraisch, einzuwertig und führt tatsächlich Gerade in Kreise über.

b) *h ist eine Gerade.* Wenden wir auf das 2. Feld eine Inversion $\pi^* \leftrightarrow \pi''$ an, deren Zentrum nicht auf h liegt, so erhalten wir die Verhältnisse von a). $\pi \rightarrow \pi^*$ besteht daher aus einer Aufeinanderfolge von Kollineation, Darboux-Transformation und Inversion.

c) *h ist ein Punkt (Nullkreis).* Der Vorgang unter a) ist bloß insofern abzuändern, als die Kugel nicht durch h , sondern konzentrisch zu h gelegt wird. B wird dann der „Südpol“ und zwischen π' und π^* besteht eine Inversion. $\pi \rightarrow \pi^*$ als Produkt von Kollineation und Inversion ist sonach eine Möbiussche Kreisverwandtschaft; diese ist eineindeutig.

§ 4. Die nichteuklidische Darboux-Transformation.

Die letzte Definition in § 2 legt eine Erweiterung nahe, indem man nämlich für g^* die Kreise einer Cayley-Kleinschen Metrik über einem Maßkreis a_2 heranzieht:

Definition III. Einer Geraden g des 1. Feldes entspricht im 2. Feld ein den Maßkreis a_2 doppelt berührender Kegelschnitt (nichteuklidischer Kreis) g^ , der den Haupt-*

kreis b_2 in zwei Punkten rechtwinklig schneidet und durch die Schnittpunkte von g mit dem Festkreis c geht. Die Kreise a_2 , b_2 und c sollen gleichmässig sein (Abb. 3).

Die beste Übersicht über die dadurch erklärte Transformation gibt wieder die räumliche Deutung, wie sie Abb. 3 veranschaulicht: Wir nehmen auf der Achse des Festkreises c einen Punkt A an und legen durch c eine Drehfläche 2. Grades Φ derart,

daß sie den Kegel $[Aa_2]$ längs eines Kreises u_A berührt. Projizieren wir b_2 aus A auf Φ , so erhalten wir zwei Parallelkreise u_B ; die längs derselben umschriebenen Drehkegel haben ihre Spitzen B auch auf der Achse.

Projizieren wir nun das Feld π aus einem Zentrum B auf die Fläche Φ und von da aus A wieder auf die Ebene π als π^* zurück, so ergibt sich in $\pi \rightarrow \pi^*$ eine Punktverwandtschaft, die die in Definition III ausgedrückte Forderung erfüllt. Entscheiden wir uns von vornherein für einen bestimmten der beiden Punkte B , so verschwindet auch die (zweideutige) Unbestimmtheit des Wörtchens „ein“ in der 1. Zeile der Definition und wir setzen daher fest

Definition IV. Nichteuclidische Darboux-Transformation soll jene zweizweideutige quadratische Punktverwandtschaft heißen, welche zwischen den beiden Feldern herrscht, die man durch Projektion der Punkte einer Drehfläche 2. Grades aus zwei festen, nicht der Fläche angehörenden Punkten der Achse auf eine Parallelkreisebene erhält.

Schalten wir zwischen die Projektionen aus A und B noch die (stereographische) Projektion aus einem Achsenendpunkt ein, so stellt sich unsere Verwandtschaft als Produkt aus einer verallgemeinerten Darbouxtransformation mit der Umkehrung einer solchen dar.

Die Umkehrung $\pi^* \rightarrow \pi$ ist — im Gegensatz zu den Verhältnissen in § 1 und 2 — zur ur-

sprünglichen Transformation gleichartig. Einer Geraden h^* des zweiten Feldes entspricht im ersten ein Kegelschnitt h , der als nichteuclidischer Kreis der Cayley-Kleinschen Metrik über einem Maßkreis a_1 aufgefaßt werden kann, einen Hauptkreis b_1 in zwei Punkten rechtwinklig schneidet und durch die gemeinsamen Punkte von h^* und c geht. a_1 bzw. b_1 ergeben sich durch Projektion von u_B bzw. u_A aus B (Abb. 3) ⁷⁾.

⁷⁾ R. Sturm, a. a. O., S. 261—265; a_1 , a_2 sind die Grenzkurven, b_1 , b_2 die Doppelkurven in je einem der Felder. Projektion einer Fläche 2. Grades aus zwei Zentren auf eine Ebene wendet z. B. W. Schmid, Quadratische Transformationen und Kegelschnitt-Dreiecksnetze, Čas. Math. Fys. 66 (1937) auf die Geraden-Netze von H. Graf und R. Sauer an und erhält damit gewisse Dreiecksnetze aus Kegelschnitten, die einen festen (Maß-) Kegelschnitt doppelt berühren.

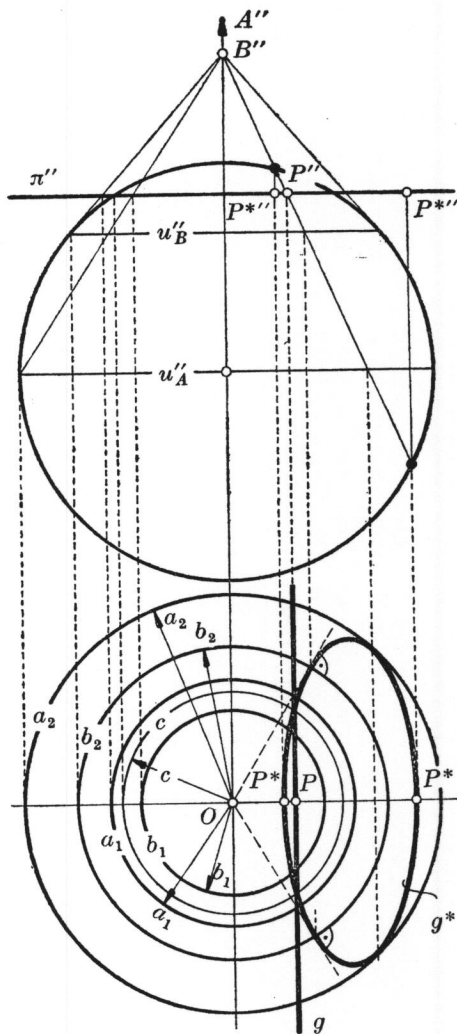


Abbildung 3.

Einem nichteuklidischen Kreis k der Metrik über a_1 im 1. Feld entspricht im allgemeinen ein Paar von nichteuklidischen Kreisen k^* der Metrik über a_2 im 2. Feld; denn der Projektionskegel 2. Grades $[Bk]$ berührt Φ in zwei Punkten, so daß sein Schnitt mit Φ in zwei Kegelschnitte zerfällt. Entsprechendes gilt für die Umkehrung der Transformation, so daß man in diesem Sinne von einer Kreisverwandtschaft sprechen kann. Sie kann auch als winkeltreu bezeichnet werden, denn die Erzeugenden von Φ werden bei den Projektionen zu Tangenten der betreffenden Maßkreise und jeder Winkel des 1. Feldes, gemessen mittels a_1 , bleibt der Maßzahl nach unverändert, wenn man seinen entsprechenden Winkel im 2. Feld mit Hilfe von a_2 mißt. Diese Verwandtschaft kann demnach dazu dienen, ein ebenes elliptisches Modell der hyperbolischen Geometrie herzustellen und umgekehrt.

Die Transformationsgleichungen lauten in Polarkordinaten r, φ :

$$(4) \quad r^2 r^{*2} + A r^2 + 2 B r r^* + C r^{*2} = 0, \quad \varphi = \varphi^*.$$

Mit Verwendung der Diskriminante $D = B^2 - AC$ ⁸⁾ ergeben sich die Radien der Maß- und Hauptkreise und des Festkreises aus

$$(5) \quad a_1^2 = \frac{D}{A}, \quad a_2^2 = \frac{D}{C}, \quad b_1^2 = \frac{CD}{B^2}, \quad b_2^2 = \frac{AD}{B^2}, \\ c^2 = -A - 2B - C.$$

§ 5. Spiegelung am Drehparaboloid.

Zunächst einige grundsätzliche Erläuterungen zur Spiegelung an einer Fläche Φ (Abb. 4):

Unter den von einem Objektpunkt P ausgehenden Lichtstrahlen kann es einen oder mehrere geben, der an Φ so reflektiert wird, daß er das Auge A des Betrachters trifft und einen aus der Richtung des „Spiegelpunktes“ („Reflexes“) P_s kommenden Bildeindruck hervorruft. Dessen Riß P'_s auf einer Bild- und Zeichenebene π soll das „Spiegelbild“ P^* von P genannt werden.

Die Reflexion in P_s findet bekanntlich so statt, daß die Flächennormale n den Winkel zwischen dem einfallenden „Spiegelstrahl“ PP_s und dem aus tretenden Sehstrahl $P_s A$ hälftet. Die Gesamtheit aller Spiegelstrahlen, die durch Reflexion des Sehstrahlbündels A an Φ erzeugt wird, bildet eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die „Spiegelstrahlkongruenz“. — Zieht man auch die mehrmalige Spiegelung an Φ in Betracht, so hat

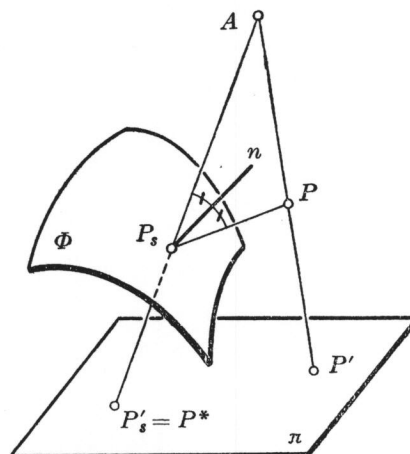


Abbildung 4.

⁸⁾ $D=0$ kennzeichnet jene Verwandtschaften, die durch Projektion einer singulären Drehfläche 2. Grades (die immer als Drehzylinder angenommen werden kann) aus zwei Achsenpunkten entstehen.

man zwischen primären, sekundären, tertiären, . . . Spiegelbildern, Spiegelstrahlkongruenzen usw. zu unterscheiden⁹⁾.

Wir betrachten nun den einfachsten Fall einer Spiegelung an einer krummen Fläche: Der Spiegel Φ sei ein Drehparaboloid, das Auge A der Fernpunkt der Achse. Auf Grund der Fokaleigenschaften der Parabel ist dann die primäre Spiegelstrahlkongruenz das Bündel mit dem Brennpunkt B als Scheitel, die sekundäre wiederum das Parallelenbündel A .

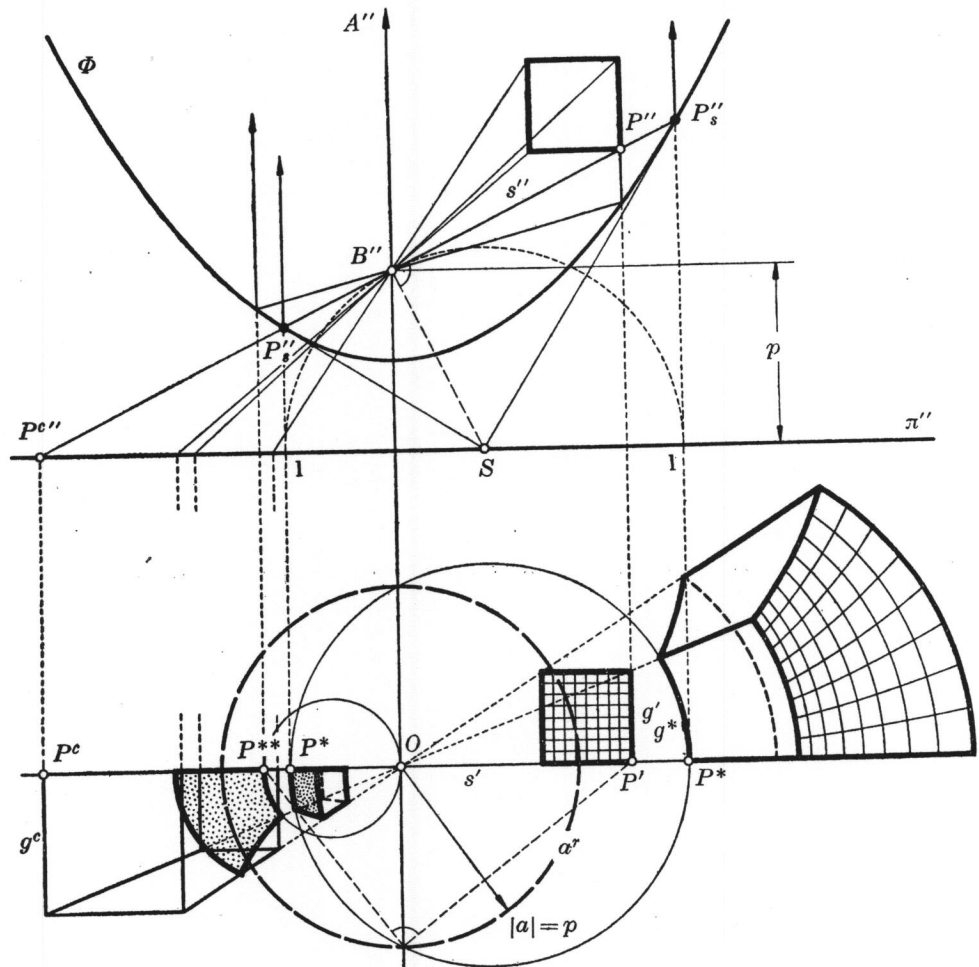


Abbildung 5,

Um also die beiden primären Spiegelbilder P^* eines Punktes P zu konstruieren, hat man den durch P gehenden Brennstrahl $s = [BP]$ mit Φ zu schneiden und die so erhaltenen Spiegelpunkte P_s aus A auf eine noch wählbare Bildebene π zu projizieren (Abb. 5); es liegt nahe, π normal zur Drehachse anzunehmen. Führen wir noch den Zentralriß $P^c = [s\pi]$ ein, so liegt im wesentlichen eine Projektion der Flächenpunkte P_s aus zwei Zentren A und B vor; da die ebenen Schnitte von Φ aus A als Kreise

⁹⁾ Eine systematische Untersuchung der Spiegelung an krummen Flächen führt H. Horninger in seiner Arbeit, Zur geometrischen Theorie der Spiegelung an krummen Oberflächen, S.-B. Wiener Akad. Wiss. 145 (1936) durch.

erscheinen, hängen P^c und P^* durch eine (euklidische) Darboux'sche Verwandtschaft zusammen. Dieselbe ist eine spezielle, wenn der Schnittkreis von π und Φ mit dem Umriß für B zusammenfallen: π ist dann die Leitebene des Paraboloids.

Man bestätigt die in Abb. 1b festgehaltene zeichnerische Ausführung der Verwandtschaft von Darboux nun auch mittels einfacher Eigenschaften der Parabel: Der Pol S des Brennstrahls s liegt auf der Leitlinie und auf dem normalen Brennstrahl; für die Gegenpunkte 1 des Brennpunkts bezüglich der Berührenden in P_s gilt $S1 = SB$.

Satz 1. Man erhält das primäre Spiegelbild eines Gegenstandes für ein spiegelndes Drehparaboloid bei achsenparalleler Sehrichtung, indem man ihn aus dem Brennpunkt auf die Leitebene projiziert und dann auf diesen Zentralriß jene spezielle Darboux'sche Verwandtschaft anwendet, deren Hauptkreis der nullteilige Schnittkreis der Leitebene und des Paraboloids ist.

Der parabolische Spiegel verwandelt also die „gewöhnliche“ Perspektive in die „stereosphärische“¹⁰⁾ oder „stereographische“, eine jener sogenannten pathologischen Perspektiven¹¹⁾, die in der Absicht ersonnen wurden, den gewöhnlichen Zentralriß durch Erfüllung gewisser anschaulicher Forderungen in ästhetischer Hinsicht zu „verbessern“. So befriedigt die stereographische Perspektive die Forderung der Schnittwinkeltreue (der scheinbare Winkel, unter dem einander zwei Linien des Raumes für den Betrachter schneiden, soll auch im Bild erhalten bleiben), sowie der kreistreuen Kugelabbildung (der Umriß jeder Kugel soll im Bild ein Kreis sein). Gerade werden allerdings im allgemeinen zu Kreisen verzerrt. Ob dieses Erscheinungsbild nun natürlicher wirkt, mag man nach einem Blick in oder auf einen Parabolspiegel (aus hinreichender Entfernung) selbst beurteilen.

Nehmen wir in Satz 1 als gespiegelten Gegenstand das Feld einer Parallelkreisebene an, so hängt dieses mit dem Zentralriß auf die Leitebene ähnlich zusammen und es gilt im Hinblick auf § 2:

Satz 2. Das Spiegelbild eines ebenen Feldes bezüglich eines Drehparaboloids mit hierzu senkrechter Achse hängt bei achsenparalleler Sehrichtung mit dem Feld durch eine verallgemeinerte Darboux'sche Verwandtschaft zusammen.

Das spiegelnde Drehparaboloid vermittelt also (für begrenzte Teile der Ebene) direkt den in § 1 erwähnten Zusammenhang zwischen den beiden ebenen Modellen der elliptischen Geometrie¹²⁾. Würde man irgendeine Konstruktion im Cayley-Kleinschen Modell etwa auf einer durchsichtigen Platte zeichnen und diese dann über die Höhlung eines parabolischen Spiegels halten, so sähe man in diesem die Konstruktion in Poincaréscher Ausführung (vgl. übrigens auch § 7b und c).

In Abb. 5 wurde auch der Strahlengang eingetragen, der auf das sekundäre Spiegelbild von P führt: Zunächst parallel zur Achse, dann Reflexion zum Brennpunkt B und neuerliche Reflexion parallel zur Achse. Die beiden Spiegelstellen gehen, ebenso wie die beiden primären Reflexe P_s , durch Projektion aus B ineinander über; ihre

¹⁰⁾ E. Keller, Kurvierte Perspektiven, S.-B. Wiener Akad. Wiss. 135 (1926).

¹¹⁾ U. Graf, Pathologische Perspektiven, Jber. dtsch. Math.-Ver. 50 (1940).

¹²⁾ Dies bemerkt schon T. Ota-Takasu, A New Interpretation of the Wellstein Representation and its Applications, Tôhoku math. J. 17 (1920), S. 252 und On the True Aspect of Euclidean Geometry, ebenda 26 (1926), S. 188.

Grundrisse P' und P^{**} liegen daher ebenso wie jene von P_s invers bezüglich des Hauptkreises, daher antiinvers bezüglich seines reellen Vertreters a^* (§ 1). Es gilt daher

Satz 3. Das sekundäre Spiegelbild eines Gegenstandes für ein spiegelndes Drehparaboloid bei achsenparalleler Sehrichtung geht aus dem Grundriß durch die Antiinversion bezüglich eines Kreises hervor, dessen Halbmesser gleich dem Parameter ist. Die beiden primären Spiegelbilder liegen antiinvers bezüglich desselben Kreises.

Zum Schluß von § 1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß sich auch die Inversion und Antiinversion als Grenzfall einer Darbouxschen Verwandtschaft auffassen läßt.

In Abb. 5 wurden die beiden primären und das sekundäre Spiegelbild eines Würfels dargestellt. Zur Verdeutlichung der Zuordnung wurde die Ober- bzw. Unterseite des Würfels mit einem Linien- bzw. Punktraster versehen; erster gibt gleichzeitig eine gute Vorstellung von der Bildverzerrung. — Bei umgekehrter Blickrichtung, wenn also der Spiegel dem Beschauer die konvexe Seite zuwendet, kann ein Raumpunkt praktisch nur ein primäres und kein sekundäres Spiegelbild liefern; rein geometrisch bleiben die Verhältnisse jedoch ungeändert.

Wie ich an anderer Stelle gezeigt habe, tritt eine allgemeinere Geraden-Kreis-Transformation nach § 3 bei der Spiegelung am orthogonalen hyperbolischen Paraboloid für achsenparallele Sehrichtung auf¹³⁾. Hier haben nämlich die Ferngeraden als primäre Spiegelbilder die Kreise eines elliptischen Bündels und der Übergang kann auf folgende Weise vollzogen werden: Projektion der Fernebene aus dem Brennpunkt einer Fokalparabel auf seine Polarebene, achsiale Spiegelung, spezielle Darbouxsche Verwandtschaft.

Beim allgemeinen elliptischen oder hyperbolischen Paraboloid spiegeln sich die Ferngeraden als ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, die eine feste Ellipse nach Gegenpunkten schneiden. Der Übergang lautet hier: Zentralprojektion, Darboux-Transformation, orthogonale Affinität.

§ 6. Spiegelung am Drehellipsoid.

Wir verallgemeinern die vorstehenden Betrachtungen, indem wir als Spiegel ein eiförmiges Drehellipsoid Φ heranziehen und das Auge des Betrachters in den einen Brennpunkt A , den „Augbrennpunkt“ verlegen. Das Sehstrahlbündel A geht dann durch einmalige Spiegelung in das Bündel mit dem anderen Brennpunkt B als Scheitel über, durch zweimalige wieder in das Bündel A , durch dreimalige neuerlich in das Bündel B usw.

Bei der Untersuchung der primären Spiegelung liegt es nahe, als Bildebene π die Äquatorebene anzunehmen. Um die beiden Spiegelbilder P^* eines Raumpunktes P zu ermitteln, haben wir die beiden Schnittpunkte P_s des Spiegelstrahles $[BP]$ mit Φ aus A auf π zu projizieren. Führen wir noch den Zentralriß P^o aus B auf π ein, so erkennen wir, daß P^o und P^* durch eine nichteuklidische Darboux-Transformation zusammenhängen, die zufolge der symmetrischen Wahl von π mit ihrer Umkehrung zusammenfällt ($A = C$ in Gleichung 4 und 5). Die beiden nullteiligen Maß-

¹³⁾ Die einschlägige Arbeit über die interessante Spiegelung am elliptischen und hyperbolischen Paraboloid soll demnächst in den Mh. Math. Physik erscheinen.

kreise a_1 und a_2 sind zusammengefallen (Halbmesser $a_1 = a_2 = e \cdot i$, wenn e die Exzentrizität von Φ bezeichnet). Da einem Kreis der zugehörigen elliptischen Metrik vermöge der Transformation $P^o \leftrightarrow P^*$ ein Paar von Kreisen derselben Maßbestimmung entspricht, kann man auch von einer elliptischen Inversion sprechen¹⁴⁾.

Satz 4. *Fällt das Auge mit dem einen Brennpunkt A eines spiegelnden eiförmigen Drehellipsoides zusammen und wird die Äquatorebene als Bildebene benützt, so besteht zwischen dem Spiegelbild eines Gegenstandes und dessen Zentralriß aus dem anderen Brennpunkt B eine elliptische Inversion.*

Um die beiden sekundären Spiegelbilder P^{**} eines im Innern des Ellipsoides Φ gelegenen Raumpunktes P zu ermitteln, ist dieser zunächst aus A auf Φ zu projizieren und die so erhaltenen Punkte aus B nochmals auf Φ , womit man die Reflexe P_s gewinnt; diese sind dann noch aus A auf eine passende Zeichenebene π abzubilden (Abb. 6).

Der Zusammenhang zwischen dem Riß P' und den Spiegelbildern P^{**} ist besser zu übersehen, wenn wir eine beliebige durch P gehende Gerade g ins Auge fassen. Die von A ausgehenden, g treffenden Sehstrahlen erfüllen eine Ebene ε und bilden nach einmaliger Reflexion längs des Kegelschnittes $[\varepsilon\Phi]$ einen Drehkegel¹⁵⁾; dieser schneidet Φ noch nach einem weiteren Kegelschnitt in einer Ebene ε_1 , längs welchem die zweite Spiegelung in der Richtung auf A , also wieder in Form eines Drehkegels erfolgt. Dessen Schnitt mit der Bildebene π ist das sekundäre Spiegelbild g^{**} . Da ε und ε_1 durch die automorphe perspektive harmonische Kollineation $\mathfrak{B}$ mit dem Zentrum B zusammenhängen, schneiden sie einander auf der zu B polaren Kollineationsebene β . Die Ebenen ε_1 gehören daher dem zu A kollinearen Bündel $A \cdot \mathfrak{B} = A_1$ an. Wählen wir also β als Bildebene, so kann der Übergang von P' zu P^{**} durch Projektion der Flächenpunkte aus A_1 und A hergestellt werden (Abb. 6): $P' \rightarrow P^{**}$ ist eine nicht-euklidische Darbouxtransformation. Diese Tatsache ist natürlich von der besonderen Wahl der Bildebene unabhängig.

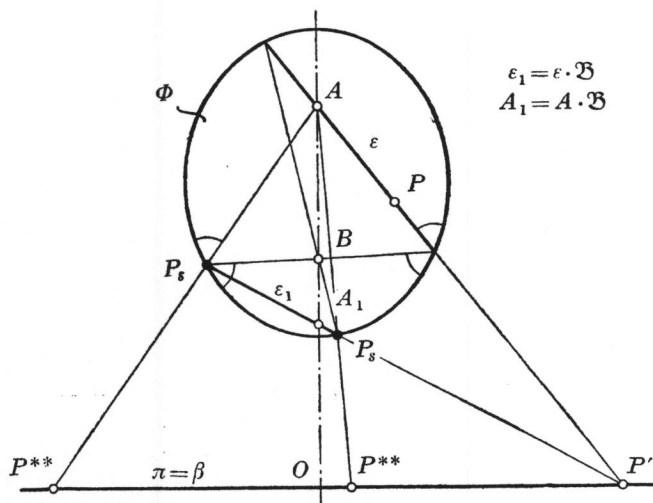


Abbildung 6.

Auch für die höheren Spiegelbilder lassen sich entsprechende Sätze beweisen. Wir haben dabei zwischen gerader und ungerader Ordnung zu unterscheiden.

Ordnung $2n$: Verwenden wir als Bildebene $\beta \cdot (\mathfrak{U}\mathfrak{B})^{n-1}$, so kann der Zusammenhang zwischen dem Riß P' (aus A) und den beiden $2n$ -ären Spiegelbildern eines Raum-

¹⁴⁾ W. Ludwig, Projektive Untersuchungen über die Kreisverwandtschaften der nicht-euklidischen Geometrie (Habschr. Karlsruhe 1904), S. 10ff.

¹⁵⁾ Jeder ebene Schnitt von Φ wird aus einem Brennpunkt durch einen Drehkegel projiziert, da der Projektionskegel den isotropen Umrißkegel längs zweier Erzeugenden berührt.

punktes P durch Projektion der Flächenpunkte aus $A \cdot (\mathfrak{U}\mathfrak{B})^n$ und A hergestellt werden ($\mathfrak{U}$ ist die perspektiv-harmonische Kollineation mit dem Zentrum A und der dazu polaren Fixebene α); es handelt sich mithin auch hier um eine nichteuklidische Darbouxtransformation.

Ordnung $2n+1$: Benützen wir als Bildebene $\alpha \cdot (\mathfrak{U}\mathfrak{B})^n$, so hängt der Zentralriß P^c (aus B) eines Raumpunktes P mit seinen beiden $(2n+1)$ -ären Spiegelbildern durch eine nichteuklidische Darbouxverwandtschaft zusammen, die durch Projektion der Flächenpunkte aus $B \cdot (\mathfrak{U}\mathfrak{B})^n$ und A erzeugt werden kann.

Satz 5. Fällt das Auge mit dem einen Brennpunkt eines spiegelnden Drehellipsoides zusammen und ist die Bildebene senkrecht zur Achse, so besteht zwischen dem Riß eines Gegenstandes aus dem Augbrennpunkt (aus dem anderen Brennpunkt) und einem seiner Spiegelbilderpaare gerader Ordnung (ungerader Ordnung) eine nichteuklidische Darboursche Verwandtschaft.

Wie man leicht einsieht, hängen die beiden Spiegelbilder gleicher Ordnung eines Gegenstandes durch eine „elliptische Inversion“ (s. o.) zusammen.

Ähnliche geometrische Beziehungen wie für das Ellipsoid bestehen auch für das zweischalige Drehhyperboloid.

Als Übergangsfall wäre noch das Drehparaboloid einzuordnen, bei welchem allerdings die Brennpunkte nicht gleichberechtigt sind. Der Fall des uneigentlichen Augbrennpunktes wurde bereits in § 5 ausführlich behandelt; jener des eigentlichen Augbrennpunktes führt auf die Umkehrung der euklidischen Verwandtschaft von Darboux ($A = 0$ in Gleichung 4 und 5).

§ 7. Spiegelung an der Kugel.

a) Allgemeine Lage des Auges.

Bei allgemeiner Lage des Auges A bezüglich der spiegelnden Kugel Φ ist die Spiegelstrahlkongruenz keineswegs einfach. Wir ordnen sie uns nach Drehkegeln, indem wir die Spiegelstrahlen längs der Parallelkreise mit der Achse OA zusammenfassen. H. Horninger¹⁶⁾ nennt diese Kreise in allgemeinerem Zusammenhang „Kernschnitte“, ihre Ebenen σ „Kernebenen“ und deren gemeinsame Ferngerade u „Kernachse“. Ist S der Pol der Kernebene σ , so kann die Spitze $\bar{S}$ des zugehörigen Spiegelstrahlkegels als harmonischer Punkt von A bezüglich OS erhalten werden (Abb. 7). Daraus folgt unmittelbar, daß σ und $\bar{S}$ einander projektiv zugeordnet sind ($DV(S\bar{S}OA) = 2$).

Jene beiden Kernebenen δ_1, δ_2 , für die der Spiegelstrahlkegel zu einem Strahlbüschel ausartet, die also durch die ihnen vermöge $\sigma \bar{S}$ zugeordneten Punkte $\bar{D}_1, \bar{D}_2$ gehen, werden „Nullkernebenen“ genannt; sie können als Doppelemente einer Projektivität ermittelt werden¹⁷⁾. Die zugehörigen Kernschnitte stellen die Reflexe der unendlich fernen Kernachse u dar.

¹⁶⁾ Über die Fokalspiegelung an Flächen zweiten Grades, Mh. Math. Physik 45 (1936), insbes. Abschnitt E.

¹⁷⁾ Bezeichnet p den Zentralabstand der Umrißebene π und r den Kugelradius, so ergibt sich für den Zentralabstand der Nullkernebenen der leicht zu konstruierende Ausdruck

$$d_{1,2} = p/4 \pm \sqrt{(p/4)^2 + r^2/2}.$$

Die (vier) Spiegelbilder eines allgemeinen Raumpunktes lassen sich nicht elementar konstruieren. Wir wenden uns deshalb dem Spiegelbild einer Geraden g zu. Um die auf den Kernschnitt in σ fallenden Reflexe von g zu finden, haben wir aus den Erzeugenden des zugeordneten Spiegelstrahlkegels jene beiden herauszugreifen, die g treffen; zu diesem Zwecke verbinden wir seine Spitze $\bar{S}$ mit g und bringen die so erhaltene Ebene $\bar{\sigma}$ mit σ zum Schnitt: Die sich dadurch ergebende Gerade e schneidet die Kugel in den gesuchten Reflexen. — Lassen wir nun σ das Parallelenbüschel u der Kernebenen durchlaufen, so dreht sich $\bar{\sigma}$ projektiv dazu um g und e beschreibt im allgemeinen ein hyperbolisches Paraboloid Ψ . Dieses durchdringt Φ längs des Reflexes von g , der mithin im allgemeinen eine Kurve 4. Ordnung I. Art ist¹⁶⁾. Das Spiegelbild selbst ist dann eine ebene elliptische Quartik.

Von den möglichen Sonderfällen soll uns der folgende beschäftigen:

Für Geraden in einer Nullkernebene zerfällt der Reflex in den Kernschnitt und einen weiteren Kreis¹⁶⁾.

Liegt g etwa in δ_1 (Abb. 7), so entspricht in der Projektivität $g(\bar{\sigma}) \bar{\wedge} u(\sigma)$ die gemeinsame Ebene $[gu] = \delta_1$ sich selbst, und das Erzeugnis Ψ der Ebenenbüschel zerfällt in δ_1 und eine weitere Ebene ε , die den „nicht-trivialen“ Reflex g_s liefert. ε verläuft parallel zu $[Og]$ und geht durch den der anderen Nullkernebene δ_2 zugeordneten Punkt $\bar{D}_2$, wie man einsieht, wenn man σ ins Unendliche bzw. nach δ_2 rücken läßt.

Wählen wir als Bildebene π die Polarebene von A (Umrißebene), so enthält ε überdies den Riß $g'(\sigma \rightarrow \pi)$. Die Betrachtung von Abb. 7 lehrt uns dann, daß zwischen dem Riß und dem nichttrivialen Spiegelbild einer in δ_1 gelegenen Geraden (allgemein: Figur) eine nichteuklidische Darboux-Verwandtschaft herrscht, die durch Projektion der Kugelpunkte aus $B = \bar{D}_2$ und A erklärt werden kann. Der Kugelumriß $[\Phi\pi]$ gibt den Maßkreis a_2 , den Hauptkreis b_1 und den Festkreis c ab; a_1 und b_2 sind immer nullteilig falls A außerhalb von Φ liegt; die Konstruktion ihrer reellen Vertreter wurde in Abb. 7 angedeutet (für uneigentliches A fallen auch diese Vertreter mit c zusammen). Als Ersatz für b_2 mag das triviale Spiegelbild von g , der Kreis $u^* = [\Phi\delta_2]'$ genommen werden, der von g^* in Gegenpunkten geschnitten wird.

Satz 6. *Befindet sich das Auge A in allgemeiner Lage gegenüber der spiegelnden Kugel Φ und ist die Bildebene π senkrecht zum Durchmesser durch A , so hängen der*

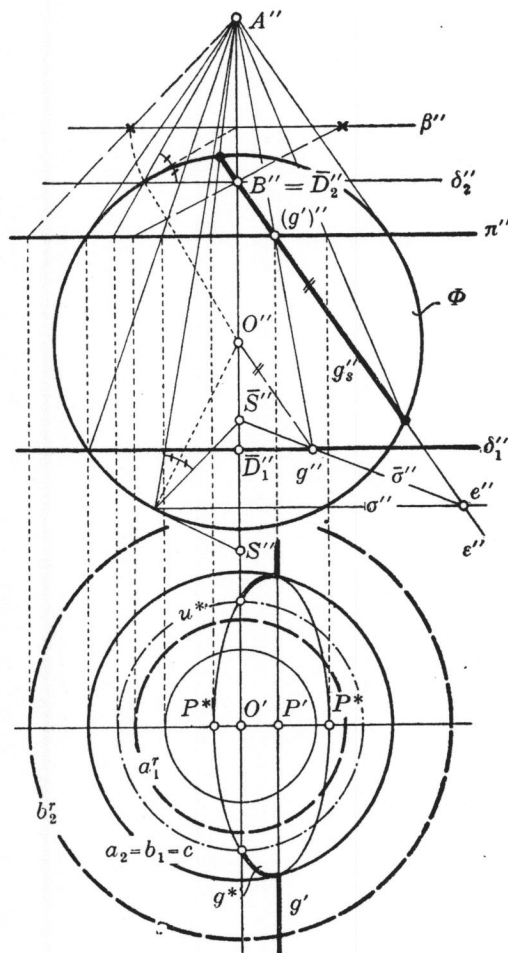


Abbildung 7.

Riß und das Spiegelbild eines in einer Nullkernebene liegenden Gebildes durch eine nichteuklidische Darboux-Transformation zusammen.

b) *Auge auf der Kugel.*

Lassen wir das Auge A auf dem Durchmesser nach Φ rücken, so entsteht aus δ_1 die Nullkernebene δ von der „Breite“ -30° , während δ_2 zur Berührebene α in A wird (Abb. 8).

Ermitteln wir wie in a) den nichttrivialen Reflex einer in δ liegenden Geraden g , so geht die ihn tragende Ebene $\varepsilon \parallel [Og]$ (vgl. Abb. 7) jetzt durch A und das Spiegelbild g^*

wird eine Gerade. Wie aus Abb. 8 abzulesen ist, entsteht g^* aus dem Riß g' durch die zentrische Ähnlichkeit mit dem Faktor 3.

Betrachten wir hingegen eine Gerade h in der anderen Nullkernebene α , so liegt deren nichttrivialer Reflex h_s in der zu $[Oh]$ parallelen Ebene durch den Nullpunkt $\bar{D}$ von δ und das Spiegelbild wird ein Kreis h^* . Wählen wir als Bildebene π speziell die Kernebene der „Breite“ $+30^\circ$, dann enthält die Reflexebene den Normalriß h^n von h und wir erkennen, daß h^n und h^* durch eine verallgemeinerte Darboux'sche Verwandtschaft (§ 2) zusammenhängen, die durch Projektion der Kugelpunkte aus $B = \bar{D}$ und A gewonnen werden kann. Konstruktion und Halbmesser von Maß-, Haupt- und Festkreis sind aus Abb. 8 ersichtlich. Der Modul beträgt $\mu = -4$, doch ändert er sich bei Parallelverschiebung der Bildebene; insbesondere kann man eine spezielle Darboux'sche Verwandtschaft erhalten ($\mu = 1$, § 1), wenn man π um den Kugeldurchmesser höher legt als A .

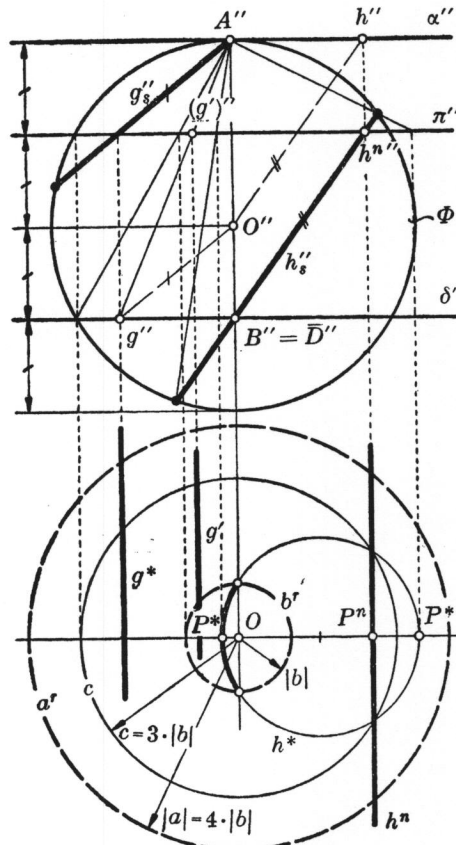


Abbildung 8.

Normalriß und Spiegelbild eines in der Berührebene α von A liegenden Gebildes durch eine verallgemeinerte Darboux'sche Verwandtschaft zusammen.

Das Spiegelbild einer in der Nullkernebene δ liegenden Figur ist ihrem Zentralbild aus A im Verhältnis 3:1 zentrisch ähnlich.

c) *Auge unendlich fern.*

Wir lassen den Augpunkt A ins Unendliche rücken und bilden auf die zur Blickrichtung normale Durchmessersebene π der spiegelnden Kugel Φ ab.

Für eine in π liegende Gerade g wird die in § 7a erklärte Fläche Ψ ein zu π symmetrischer parabolischer Zylinder, der g als Scheitelerzeugende besitzt. Der Reflex $g_s = [\Phi\Psi]$ ist demnach eine ebenfalls zur Bildebene symmetrische Quartik durch die absoluten Kreispunkte von π , so daß als Spiegelbild von g ein doppelt überdeckter Kreis g^* auftritt (Abb. 9).

§ 8. Brechung durch Drehflächen 2. Grades.

Zum Schluß sei noch das Auftreten nichteuklidischer Darbouxtransformationen vermöge lichtbrechender Flächen 2. Grades erwähnt.

Abb. 10 zeigt als einfaches Beispiel eine von einem halben eiförmigen Drehellipsoid Φ gebildete „Linse“. Die parallel zur Achse einfallenden Sehstrahlen werden zum Brennpunkt B hin gebrochen, wenn wir voraussetzen, daß die numerische Exzentrizität ε reziprok der Brechzahl n ist:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \beta_0} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Das Feld der Äquatorebene π hängt in diesem Falle mit seinem Brechungsbild durch eine nichteuklidische Darboux-Transformation zusammen. Maßkreis a_2 und Festkreis c trennen sich, wenn die Linse durch eine Parallelkreisebene begrenzt wird.

Man kann auch den Brennpunkt B die Rolle des Sehzentrums übernehmen lassen, wenn man durch kugelförmige Aushöhlung des Linsenkörpers um B dafür sorgt, daß die Sehstrahlen ungebrochen austreten können. Man kommt dann wiederum auf eine nichteuklidische Darbouxtransformation, diesmal mit nullteiligem Maßkreis.

Ähnliche Verhältnisse können auch mit Hilfe eines zweischaligen Drehhyperboloides hergestellt werden.

Auf den Grenzfall einer nichteuklidischen Verwandtschaft von Darboux, bei dem beide Hauptkreise b_1, b_2 zur Ferngeraden entartet sind ($B = 0$ in Gleichung 4) wird man bei Betrachtung einer brechenden Kugel geführt; die Projektion der Kugelpunkte aus zwei inversen Zentren A und B kann nämlich als Brechung gedeutet werden, wenn man das Verhältnis aus Mittelpunktsabstand eines Zentrums und Kugelhalbmesser gleich der Brechzahl annimmt.