

erst nachdem man die vorgelegten Ausführungen verstanden hat, kann man sich darüber im Klaren sein, ob sie tatsächlich auf dem Stand der Technik sind. Ein solches Urteil kann nur dann getroffen werden, wenn man die entsprechenden Arbeiten kennt und auf deren Grundlage eine Meinung geformt wird.

Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke

Walter Wunderlich, Wien

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 9. April 1976)

1. Einleitung
 Vorgelegt seien im reellen dreidimensionalen euklidischen Raum zwei Punkthaufen, gebildet aus m Punkten P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) und n Punkten Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Wird jeder Punkt P_i mit sämtlichen Punkten Q_j durch starre Stäbe verbunden, so entsteht ein *Stabwerk* aus mn Stäben, das selbst bei gelenkiger Ausführung der $m+n$ Knoten bei hinreichenden Anzahlen *starr* sein wird. Seine Form ist nämlich durch die Stablängen $P_i Q_j = r_{ij}$ bereits bestimmt, wenn

$$mn = 3(m+n) - 6 \quad \text{oder} \quad (m-3)(n-3) = 3, \quad (1.1)$$

was für $m = 4, n = 6$ oder umgekehrt eintritt. Von den $3(m+n)$ Koordinaten der Knoten kann man nämlich zwecks Fixierung der Lage über sechs in geeigneter Weise verfügen, und zur Berechnung der restlichen reichen dann die mn Bedingungen $P_i Q_j = r_{ij}$ im allgemeinen aus.

Diese schon bei R. Bricard [1] vermerkte Tatsache hat nun in jüngster Zeit eine neue Bedeutung im modernen Vermessungswesen erlangt, und zwar für eine von K. Killian und P. Meissl [2] untersuchte *Trilaterationsaufgabe*: Mißt man von $m = 4$ „Standpunkten“ P_i aus zu $n = 6$ „Zielpunkten“ Q_j hin alle $mn = 24$ Distanzen r_{ij} (was auf elektronischem Wege mit hoher Genauigkeit geschieht), so ist dar-

aus im allgemeinen die Konfiguration sämtlicher $m + n = 10$ Punkte zu ermitteln — wenn auch recht schwierig und nicht unbedingt eindeutig. Hierbei ist angenommen, daß sich die Entfernung der Standpunkte untereinander sowie der Zielpunkte untereinander nicht direkt messen lassen; bei ersteren etwa wegen Sichtbehinderung, bei letzteren wegen ihrer Beweglichkeit (Raketen, Satelliten).

Wird die Anzahl der Punkte erhöht, so liegt für die genannte Tri-laterationsaufgabe sogar Überbestimmtheit vom Grad $(m-3)(n-3)-3$ vor. Abgesehen von einer infinitesimalen Unsicherheit der Lösung, die oder wenn alle Stand- oder Zielpunkte einem Quadrik liegen (*„gefährliche Annahmen“*), gibt es sogar Annahmen mit einer unendlichen (stetigen) Lösungsschar. Das entsprechende Stabmodell ist dann wackelig bzw. in endlichem Ausmaß *beweglich*. Eine zusammenfassende Darstellung dieser Phänomene hat kürzlich der Verfasser gegeben [6, II].

Das interessanteste Beispiel für ein stetig bewegliches Stabwerk der betrachteten Struktur stammt von R. Bricard [1]: Liegen $m \geq 4, 5, 6$ Punkte P_i auf einer Ellipse k und $n \geq 6, 5, 4$ Punkte Q_j auf der zugehörigen Fokalkurve l , und verbindet man alle Punkte $P_i \in k$ mit sämtlichen Punkten $Q_j \in l$ durch starre Stäbe, dann entsteht bei gelenkiger Ausführung der Knoten ein bewegliches Stabwerk. Den Grad der Deformierbarkeit gibt Bricard mit 2 an, während er in Wahrheit den Wert 3 hat [6, II].

Der Eindruck, daß es sich hierbei wohl um eine spezifische Eigenschaft von Fokalkurvengpaaren handelt, ist merkwürdigerweise unrichtig. Tatsächlich herrscht bereits mindestens einparametrische, also zwangsläufige Beweglichkeit bei zwei beliebigen Punktketten $\{P_i\}$ und $\{Q_j\}$, wenn diese zwei orthogonalen Ebenen angehören. Legt man nämlich unter Verwendung kartesischer Normalkoordinaten die Punkte durch $P_i(x_i, y_i, 0)$ und $Q_j(X_j, 0, Z_j)$ fest, so ergibt sich ihre Distanz r_{ij} aus

$$r_{ij}^2 = (x_i - X_j)^2 + y_i^2 + Z_j^2. \quad (1.2)$$

Verschiebt man nun diese Punkte normal zur x -Achse nach $\bar{P}_i(x_i, \bar{y}_i, 0)$ bzw. $\bar{Q}_j(X_j, 0, \bar{Z}_j)$, wobei $\bar{y}_i^2 = y_i^2 + v$, $\bar{Z}_j^2 = Z_j^2 - v$, so folgt sofort

$$x^2 + y^2 = g(x), \quad z = 0. \quad (2.1)$$

so bleibt ihr Abstand unverändert. Diese Verlagerung ist (innerhalb gewisser Grenzen) reell austifbar, sofern nicht gleichzeitig $y_i = Z_j = 0$. Es gilt mithin der bisher anscheinend nicht bemerkte

Satz 1: *Werden beliebig viele Punkte P_i einer Ebene mit beliebig vielen Punkten Q_j einer dazu normalen Ebene auf alle Arten durch die starren Stäbe $P_i Q_j$ gelenkig verbunden, so entsteht ein zumindest zwangsläufig deformierbares Stabwerk, sofern kein Stab beiden Ebenen angehört. Die Knoten der einen Gruppe gestatten jedenfalls jeweils Verschiebungen normal zur Trägerfläche der anderen Gruppe.*

Im Normalfall auf eine zu den beiden Trägerebenen senkrechte Bildebene ($x = 0$) erscheint jenes ebene bewegliche Stabwerk, das durch Satz 5 in [6, I] gekennzeichnet wurde (vgl. Bild 4 daselbst).

Nicht mehr trivial wird jedoch die Angelegenheit, wenn man, verlaßt durch das Bricardsche Beispiel, nach einschlägigen Stabwerken fragt, die eine höhere (also mehr als einparametrische) Beweglichkeit aufweisen. Hier zeigt sich nun, wie im folgenden dargelegt wird, daß das bei Bricard zugrunde gelegte Paar von Fokalkugelschnitten durch manche andere *Fokalkurvengpaare in orthogonalen Ebenen* ersetzt werden kann. Zu diesem Zweck wird hinfort der euklidische Raum bei Bedarf ins Komplexe zu erweitern sein.

Als *Fokalkurve* einer gegebenen analytischen Kurve k wird bekanntlich jede eigentliche, von k verschiedene Doppelkurve der durch k legbaren *Minimaltorse* Γ bezeichnet. Γ ist dabei die Verbindungstorse von k mit dem absoluten Kegelschnitt σ in der Fernebene, der durch den nullteiligen Richtkegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ gekennzeichnet werden mag. Sei nun eine beliebige reelle, der xy -Ebene angehörende und zur x -Achse symmetrische *Grundkurve* k angesetzt durch

Mit Rücksicht auf die durch k zu legenden Minimaltorse Γ sei die „Grundfunktion“ $g(x)$ als analytisch vorausgesetzt. Unter den von k und σ verschiedenen Selbstschnitten der Tore wird aus Symmetriegründen einer in der Symmetrieebene $y = 0$ liegen; er wird in der Folge ausschließlich betrachtet und kurz als *Hauptfokale* l von k bezeichnet.

Die in den Punkten $P(x, y, 0) \in k$ angebrachten Minimalkegel P werden in laufenden Koordinaten X, Y, Z beschrieben durch

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = 0. \quad (2.2)$$

Jeder solche Kegel berührt die Torse Γ längs der beiden durch P gehenden und der Normalebene von k angehörenden (isotropen) Erzeugenden von Γ^1 . Die in der Ebene $Y = 0$ verlaufende Doppelkurve l kann mit hin als Einhüllende der Kreise

$$X^2 - 2xX + g(x) + Z^2 = 0 \quad (2.3)$$

gewonnen werden. Mit Benützung der Ableitung nach dem veränderlichen Parameter x ,

$$-2X + g'(x) = 0, \quad (2.4)$$

erhält man also für die *Hauptfokale* l die Darstellung

$$X = \frac{1}{2}g'(x), \quad Y = 0, \quad X^2 + Z^2 = xg'(x) - g(x). \quad (2.5)$$

Allfällige Spitzen von l sind durch $g''(x) = 0$ gekennzeichnet. Der verwendete Parameter x kann als Abszisse des Normalenfußpunktes von l gedeutet werden (Abb. 2).

Für den Abstand $r = PQ$ zweier durch die Parameterwerte x_1 bzw. x_2 festgelegten Punkte $P \in k$ und $Q \in l$ ergibt sich dann über

$$r^2 = (X_2 - x_1)^2 + y_1^2 + Z_2^2 \text{ die grundlegende Distanzformel} \quad (2.6)$$

Geht man nun in (2.1) von der ursprünglichen Grundfunktion $g(x)$ zu einer neuen Grundfunktion

$$g(x) = g(x) + v \quad \text{mit} \quad v = \text{const} \quad (2.7)$$

über, so erhält man eine neue Grundkurve \bar{k} , zu der dann gemäß (2.5) auch eine neue Hauptfokale \bar{l} gehört. Unter Festhaltung der Parameterwerte x_1 und x_2 verschieben sich die Punkte P und Q auf Normalen

zur x -Achse in Neulagen $\bar{P} \in \bar{k}$ und $\bar{Q} \in \bar{l}$, wobei sich wegen $\bar{g}' = g'$ auf Grund von (2.6) der Abstand r nicht verändert. Diese Verlagerung erfolgt in kontinuierlicher Weise, wenn man den Verschiebungssparameter v stetig von 0 bis zu einem gewünschten Endwert variiert läßt. In Ergänzung zu der damit wiedergefundenen Stabwerksverformung (1.3) genäß Satz 1 gilt demnach

Satz 2: Verteilen sich die Knoten P_i und Q_j des Stabwerks aus Satz 1 auf zwei zusammengehörige Fokalkurven, dann bleibt diese Eigenschaft bei den dort genannten Deformationen erhalten.

Daß derartige Deformationen durchaus im Reellen möglich sind, werden die nachfolgenden Beispiele zeigen, die überdies eine mehrparametrische Deformierbarkeit aufweisen werden; dieselbe beruht auf geeigneter Veränderung der Koordinatenwerte x_1 und x_2 .

Die Beziehung zwischen den Kurven k und l ist natürlich eine wechselseitige: k ist auch Hauptfokale von l . Hinsichtlich der abgewandelten Kurven \bar{k} und \bar{l} gilt: Für (reelles) $v < 0$ in (2.7) ist \bar{k} kongruent zu einem achsenparallelen ebenen Schnitt jener Drehfläche, die durch Rotation von k um die x -Achse entsteht; für $v > 0$ ist es umgekehrt. Analoge Relationen bestehen auch zwischen l und \bar{l} .

3. Fokalkegelschnitte

Die Annahme eines *Kegelschnitts* als Grundkurve k wird durch den Ansatz (2.1) mit der Grundfunktion

$$g(x) = \varepsilon^2 x^2 + 2\alpha x \quad \text{mit} \quad \alpha \neq 0 \quad (3.1)$$

erfaßt, wobei ε die numerische Exzentrizität bedeutet und der Verzicht auf eine zusätzliche additive Konstante bloß die Fixierung eines Hauptachsenteils im Ursprung bedingt. Für die Fokalkurve l findet man gemäß (2.5) die Darstellung

$$X = \varepsilon^2 x + a, \quad X^2 + Z^2 = \varepsilon^2 x^2 = (\varepsilon^2 - a)^2, \quad (3.2)$$

die wiederum einen Kegelschnitt kennzeichnet, und zwar mit der numerischen a und ε haben mithin die in [5] eingeführte „Normalkorrespondenz“ auf der x -Achse gemeinsam, l und \bar{l} die dazu inverse

¹ Spricht man den Minimalkegel (2.2) als „Nullkugel“ an, so kann die Minimalkurve Γ als „Rohrfläche mit der Dicke Null“ aufgefaßt werden. Verwandte Untersuchungen an Röhren nichtverschwindender Dicke wurden vom Verfasser in [6] durchgeführt.

rischen Exzentrizität ε^{-1} . Man überzeugt sich unschwer, daß die der x -Achse angehörenden Scheitel von k Brennpunkte von l sind und umgekehrt. Die Distanzformel (2.6) lautet:

$$r^2 = \varepsilon^2 (x_1 - x_2)^2. \quad (3.3)$$

Eine abstandstreue Verlagerung der Stabenden $P \in k$ und $Q \in l$ wird offenbar erzielt, wenn die entsprechenden Parameterwerte durch

$$\varepsilon x_1 = \varepsilon x_1 + u, \quad \varepsilon x_2 = \varepsilon x_2 + u \quad (3.4)$$

verknüpft sind. Die durch die veränderten Größen ε und u bestimmten Trägerkurven \bar{k} und \bar{l} der Neulagen \bar{P} und \bar{Q} bilden wiederum ein Paar von *Fokalkegelschnitten*. Da die Werte ε , a und u innerhalb gewisser Grenzen frei gewählt werden dürfen, weist das betreffende Stabwerk sogar *dreiparametrische Deformierbarkeit* auf. — Mit $\varepsilon = \varepsilon$, $a = a$ und alleiniger Variation von u wird ein *Zwangslauf* erklärt, bei welchem die Gelenksknoten auf den *festen Bahnen* k und l wandern; durch diese merkwürdige Besonderheit ist das hier wiedergefundene Bricardsche Stabwerk ausgezeichnet.

Satz 3: *Werden beliebig viele Punkte P_i eines Kegelschnitts mit beliebig vielen Punkten Q_j seines Fokalkegelschnitts durch alle Stäbe $P_i Q_j$ gekennzeichnet, so entsteht ein dreiparametrisch deformbares Stabwerk, dessen Knoten sich in jeder Position wieder auf zwei Fokalkegelschnitte verteilen.*

Daß nicht vielleicht noch höhere Beweglichkeit besteht, bedarf einer Überlegung, um so mehr als R. Bricard in [1] mit seinem andersartigen Ansatz nur eine zweiparametrische Deformierbarkeit festgestellt hat (welche bloß die Annahme $u = 0$ berücksichtigt). Faßt man zwei bezüglich der Ebene $z = 0$ von k spiegelbildlich angeordnete Punkte Q_1 und Q_2 ins Auge, die mit sämtlichen Punkten $P \in k$ verbunden gedacht werden, so erkennt man zunächst bei beliebiger Verlagerung $Q_1 \rightarrow \bar{Q}_1$, $Q_2 \rightarrow \bar{Q}_2$, daß die Neulagen \bar{P} aller Knoten P wegen $\bar{Q}_1 P = Q_1 P = Q_2 P = \bar{Q}_2 P$ der Symmetralebene von \bar{Q}_1 und \bar{Q}_2 angehören, also wieder eine ebene Kurve \bar{k} erfüllen. Analog folgt, daß auch die Trägerkurve \bar{l} der Neulagen \bar{Q} aller Punkte Q von l eben sein muß. Zieht man noch einen dritten Punkt $Q_3 \in l$ heran, und beachtet

man, daß es eine k enthaltende Drehquadrik mit den Brennpunkten Q_1 und Q_3 gibt, dann folgt aus $\bar{Q}_1 P \pm \bar{Q}_3 P = Q_1 P \pm Q_3 P = \text{const.}$, daß auch k ein Kegelschnitt sein muß und \bar{l} sein Fokalkegelschnitt ist.

Stabwerkdiagramm des ε -Kegelschnittes k und l für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 2$ (siehe Abb. 1).

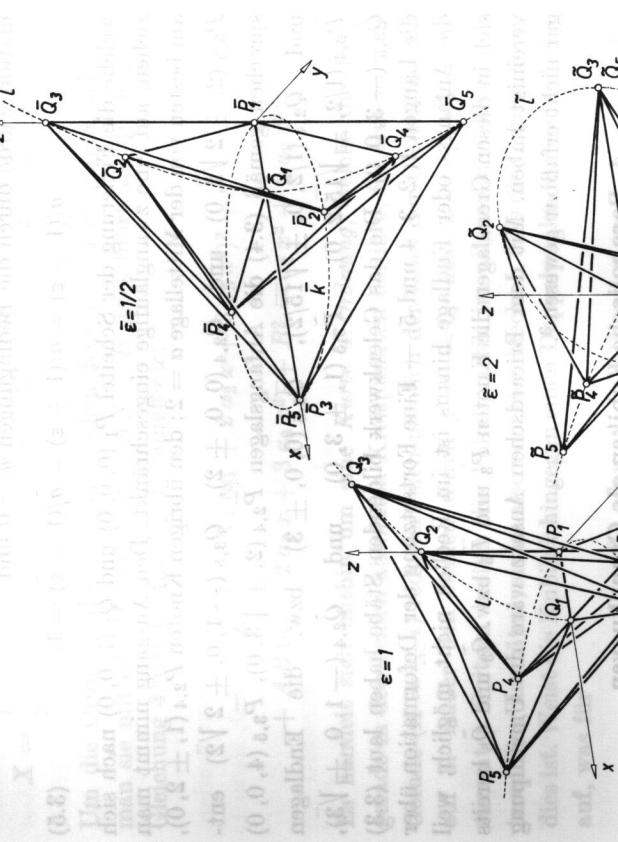


Abb. 1. Umstülzung eines Bricardschen Stabwerkes
durch flächige Verlagerung der Kegelschnitte k und l auf kreisförmige Kegelschnitte \bar{k} und \bar{l} .

Da insgesamt bloß ∞^2 gestaltlich verschiedene Fokalkegelschnittepaare existieren und noch je ∞^1 Stabwerkstransformationen mit festem Kegelschnittpaar hinzutreten, kann es höchstens ∞^3 Verformungen geben, die nun durch (3.4) tatsächlich erfaßt werden.

Abb. 1 zeigt drei Phasen der „Umstülzung“ eines 25gliedrigen Stabwerks der betrachteten Art ($m = n = 5$), bei welcher die Ellipse

\bar{k} ($\varepsilon = 1/2$) der Anfangslage über eine Parabel k ($\varepsilon = 1$) in die Hyperbel \tilde{k} ($\varepsilon = 2$) der Endlage übergeführt wird, während die Hyperbel $\bar{l} \cong k$ über die Parabel $l \cong \tilde{k}$ in die Ellipse $\tilde{l} \cong k$ übergeht. Anfangs- und Endlage des Stabwerks sind kongruent. Die stetig vollziehbare Deformation wurde durch die Bedingungen $u = 0$ und

$$\bar{a}/(1 + \varepsilon) = a/(1 + \varepsilon) = \tilde{a}/(1 + \tilde{\varepsilon}) = 1, \quad (3.5)$$

welche die Fixierung der Scheitel $P_1(0, 0, 0)$ und $Q_1(1, 0, 0)$ nach sich ziehen, auf eine zwangsläufige eingeschränkt. Den Ausgang nimmt man am besten von der Mittellage $a = 2$; den übrigen Knoten $P_{2,4}(1, \pm 2, 0)$, $P_{3,5}(2, \pm 2\sqrt{2}, 0)$ und $Q_{2,4}(0, 0, \pm 2)$, $Q_{3,5}(-1, 0, \pm 2\sqrt{2})$ entsprechend gemäß (3.4) die Anfangslagen $\bar{P}_{2,4}(2, \pm \sqrt{3}, 0)$, $\bar{P}_{3,5}(4, 0, 0)$ und $\bar{Q}_{2,4}(1/2, 0, \pm \sqrt{15}/2)$, $\bar{Q}_{3,5}(0, 0, \pm 3)$ bzw. die Endlagen $\bar{P}_{2,4}(1/2, \pm \sqrt{15}/2, 0)$, $\bar{P}_{3,5}(1, \pm 3, 0)$ und $\bar{Q}_{2,4}(-1, 0, \pm \sqrt{3})$, $\bar{Q}_{3,5}(-3, 0, 0)$. Die das Gelenkwerk bildenden Stäbe haben laut (3.3) die Längen 1, 2, 3, 4 und 5. — Eine Fortsetzung der Deformation über die Anfangs- oder Endlage hinaus ist im Reellen nicht möglich, weil sich in diesen Grenzlagen die Knoten \bar{P}_3 und \bar{P}_5 bzw. \bar{Q}_3 und \bar{Q}_5 bereits vereinigt haben. Mit dem Bricardischen Ansatz wäre die Umstülpung gar nicht erfassbar gewesen.³

4. Parabolische Kubiken als Grundkurven

Die ebenen algebraischen Kurven 3. Ordnung lassen sich bekanntlich kollinear in verschiedene axial-symmetrische Normalformen überführen, unter denen insbesondere jene sehr gebräuchlich sind, für welche die Fermgerade Wendetangente ist. Sie wurden von Newton „divergente Parabeln“ genannt [3, S. 19] und sollen hier kurz als *parabolische Kubiken* bezeichnet werden. Als Grundkurven k werden sie erfaßt durch die Grundfunktion

$$g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \text{mit} \quad a_3 \neq 0. \quad (4.1)$$

³ Man beachte in den normalaxonometrischen Teilstücken von Abb. 1, daß die Kegelschnitte im Bild als konfokale Kegelschlitte erscheinen; dies liegt daran, daß letztere jeweils vier gemeinsame isotrope Tangenten besitzen, die vom Umriß der Minimaltorse 4. Klasse Γ herrühren.

Der Verzicht auf eine additive Konstante a_0 bedeutet bloß die Fixierung eines Achsenpunktes im Ursprung. Für die zugehörige *Hauptfokale* l in der Symmetrieebene $y = 0$ findet man zufolge (2.5) die Darstellung

$$X = \frac{1}{2} (a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2), \quad X^2 + Z^2 = a_2 x^2 + 2 a_3 x^3. \quad (4.2)$$

Um die Ordnung dieser algebraischen Kurve l zu ermitteln, schneide man sie mit einer Geraden $Z = A X + B$. Dies führt auf die folgende Gleichung 4. Grades für den Parameter x :

$$\begin{aligned} & \text{nebenw. } \text{durchsetzen } l \text{ in } Z = A X + B \text{ und erhalten } \text{ein Polynom } \text{der Ordnung } 4 \\ & 1 = \text{Gesamtkoeffizient } \text{von } Z^4 \quad 1 = \text{Koeffizient von } X^4 \\ & \quad \frac{1}{4} (A^2 + 1) (a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2)^2 + \\ & \quad + A B (a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2) + B^2 = a_2 x^2 + 2 a_3 x^3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Es handelt sich mithin um eine *Kurve 4. Ordnung*, welche die Ferngerade in den beiden absoluten Kreispunkten berührt; für eine isotrope Gerade ($A = \pm i$) reduziert sich nämlich der Grad der Gleichung (4.3) auf 3. Außer den beiden durch $g''(x) = 0$, also $x = -a_2/\beta a_3$, bestimmten Spitzen besitzt die Fokalkubik im allgemeinen keine weiteren Singularitäten; sie ist also vom Geschlecht 1, falls die Grundkubik k dies ist. Weist die Kubik k hingegen einen Doppelpunkt (auf der x -Achse) auf, was für

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1) \quad \text{oder} \quad (a_2 - 1)^2 = 4 a_1 a_3 \quad (4.4)$$

eintritt, dann hat l an derselben Stelle einen zusätzlichen Doppelpunkt und ist ebenfalls rational (Geschlecht 0).

Die Entfernung r zweier Punkte $P(x_1) \in k$ und $Q(x_2) \in l$ ergibt sich gemäß (2.6) aus

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 [a_2 + a_3 (x_1 + 2 x_2)]. \quad (4.5)$$

Eine *abstandstreue Verlagerung* $P(x_1) \rightarrow P(x_1)$, $Q(x_2) \rightarrow Q(x_2)$ wird mithin durch

$$\bar{x}_1 = u x_1, \quad \bar{x}_2 = u x_2, \quad \bar{a}_2 = u^{-2} a_2, \quad \bar{a}_3 = u^{-3} a_3 \quad (4.6)$$

wobei die ursprüngliche Grundkubik k wieder in eine para-

bolische Kubik \bar{k} transformiert wird, und dementsprechend auch die Fokalquartik l ihren Charakter behält. Da neben u auch noch ein neuer Koeffizient a_1 gewählt werden darf, existieren ∞^2 Deformationen.

Satz 4: Werden beliebig viele Punkte P_i einer ebenen und axial-symmetrischen parabolischen Kubik mit beliebig vielen Punkten Q_j ihrer Fokalquartik durch alle Stäbe $P_i Q_j$ gelenkig verbunden, so entsteht ein mindestens zweiparametrig deformierbares Stabwerk, dessen Knoten sich in jeder durch (4.6) erreichbaren Position wieder auf zwei Kurven der gleichen Art verteilen.

Ein bemerkenswerter Sonderfall soll noch näher untersucht werden.

Die beiden Bedingungen (4.4) genügende Annahme, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1/a$ führt auf die gespitzte Grundkubik k

$$a y^2 = x^3, \quad (4.7)$$

also eine *Neilsche Parabel*, wohlbekannt etwa als Evolute der gewöhnlichen Parabel [3, S. 311]. Setzt man unter Einführung eines dimensionslosen Kurvenparameters t

$$x = a t^2, \quad y = a t^3, \quad (4.8)$$

so gelangt man auf Grund von (4.2) zur nachstehenden Darstellung der Hauptfokale l :

$$X = \frac{a}{2} t^2 (2 + 3 t^2), \quad Z^2 = -\frac{a^2}{4} t^6 (4 + 9 t^2). \quad (4.9)$$

Mittels der Substitution $9 t^2 = -4 \cos^2 \tau$ ergibt sich daraus nach kurzer Rechnung die Darstellung

$$X = \frac{a}{27} (\cos 4 \tau - 2 \cos 2 \tau) - \frac{a}{9}, \quad Z = \frac{a}{27} (\sin 4 \tau + 2 \sin 2 \tau), \quad (4.10)$$

die erkennen läßt, daß die Fokalquartik l die dreispitige Hypozykloide Steiners ist [3, S. 157ff.].⁴ Eine abstandstreue Transformation gemäß

(4.6) ist wohl möglich, doch verliert dabei das Fokalkurvenpaar seinen speziellen Charakter. Unter Beibehaltung von $a_1 = 0$ und alleiniger Variation von u bleiben beide Kurven aber wenigstens rational, wobei ihr gemeinsamer Doppelpunkt im Ursprung ruht.

(E.d.) Bei Verallgemeinerung des Ansatzes (4.1) durch

$$\text{wird als Grenzfall } g(x) = \sum_{s=1}^n a_s x^s \quad \text{mit} \quad n \geq 3 \quad \text{und} \quad a_n \neq 0 \quad (4.11)$$

hat man für k (2.1) eine Grundkurve n -ter Ordnung, deren Hauptfokale l (2.5), dargestellt durch

$$r^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n s a_s x^{s-1}, \quad X^2 + Z^2 = \sum_{s=2}^{(n-1)} (s-1) a_s x^s, \quad (4.12)$$

die Ordnung $2(n-1)$ hat und $(n-2)$ -fach zirkular ist. Auf Grund der Distanzformel

$$r^2 = \sum_{s=2}^n a_s [x_1^s - x_2^s + x_2^{s-1} (x_2 - x_1)] \quad (4.13)$$

ist zu erkennen, daß es (wenigstens) ∞^2 abstandstreue Transformationen des zugehörigen Stabwerks gibt; sie werden durch

$$\bar{x}_1 = u x_1, \quad \bar{x}_2 = u x_2, \quad \bar{a}_s = u^{-s} a_s \quad (s = 2, \dots, n) \quad (4.14)$$

erklärt, wobei über u und \bar{a}_1 noch verfügt werden kann.

5. Zirkulare Kubiken als Grundkurven

Metrisch ausgezeichnete Normalformen der ebenen Kurven 3. Ordnung sind vor allem jene, welche die absoluten Kreispunkte enthalten [3, S. 35]. Eine solche *zirkulare Kubik* k wird, wenn sie eine Symmetrie-achse besitzt, durch die Grundfunktion

$$g(x) = a x + b + c x^{-1} \quad \text{mit} \quad c \neq 0 \quad (5.1)$$

erfaßt. Diese Kubik k hat die y -Achse zur reellen Asymptote (wodurch

⁴ Dieses Ergebnis hängt eng zusammen mit der in [4] vermerkten Tatsache, daß bei der zyklographischen Abbildung einer Neilschen Parabel auf ihre Symmetralebene eine Steinerzykloid entsteht. — Die dreispitige Hypozykloide l weist aus Symmetriegründen neben der Fokalkurve k noch zwei weitere, zu k

kongruente Fokalkurven auf. Hieraus folgt die merkwürdige Eigenschaft der Neilschen Parabel, außer einer Steinerzykloid noch zwei zu ihr selbst kongruente Fokalkurven zu besitzen.

sie im Koordinatensystem fixiert ist), während ihr isotropes Asymptotenpaar sich im außerordentlichen Brennpunkt $M(a/2, 0, 0)$ schneidet. Die zugehörige Hauptfokale l (2.5) wird zunächst beschrieben durch

$$X = \frac{1}{2} (a - c x^2), \quad X^2 + Z^2 = -b - 2c x^{-1}. \quad (5.2)$$

Elimination von x liefert dann die kartesische Gleichung

(Von der Form $(X^2 + Z^2 + b)^2 + 4c(2X - a) = 0$, λ mit räuml. (5.3) dopp. Abstandsgleichung (x_1, x_2)) aus der zu erkennen ist, daß l eine bizirkulare Quartik mit Spitzen in den absoluten Punkten, also im allgemeinen ein *Cartesisches Oval* ist [3, S. 174ff.]; der außerordentliche Brennpunkt ist im Ursprung.

Die Bauart der aus (2.6) folgenden Distanzformel (§ 124ff.) ob

$$r^2 = c(x_1 - x_2)^2/x_1 x_2^2 \quad (\text{Erläut. der gew. (5.4)})$$

lehrte, daß es ∞^3 abstandstreue Verlagerungen (5.5)

$$x_1 = u x_1, \quad x_2 = u x_2, \quad c = u c$$

gibt, die auf der Wahlbarkeit von \bar{a} , \bar{b} und u beruhen.

Satz 5: Werden beliebig viele Punkte P_i einer axial-symmetrischen zirkularen Kubik mit beliebig vielen Punkten Q_j ihrer Hauptfokale — einem Cartesischen Oval im allgemeinen — durch alle Stübe $P_i Q_j$ gelenkig verbunden, so entsteht ein mindestens dreiparametrig deformierbares Stabwerk, dessen Knoten sich in jeder durch (5.5) erreichbaren Position wieder auf zwei Kurven der gleichen Art verteilen.

Den bemerkenswertesten Sonderfall liefert wieder die gespitzte Kubik k , d. i. die wohlbekannte *Kissoida des Diokles* [3, S. 36ff.]. Diese Annahme wird für $a = 3e$, $b = -3e^2$, $c = e^3$ mit beliebigem $e \neq 0$ erhalten. Die zugehörige Fokalquartik ist dann die gespitzte Pascal-Schnecke, also die *Kardiode* [3, S. 153ff.].

Auf die Erörterung naheliegender Verallgemeinerungen, die sich mit der Hinzunahme weiterer Glieder im Ansatz (5.1) anbieten, wird verzichtet.

6. Spirische Linien als Grundkurven

Eine *bizirkulare Kurve 4. Ordnung* mit zwei (orthogonalen) Symmetrieachsen, ansetzbar durch

$$(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha x^2 + 2\beta y^2 + \gamma, \quad (6.1)$$

wird als Grundkurve k durch eine Grundfunktion der Bauart

$$(Q, \theta) \quad g(x) = a \pm \sqrt{2b x^2 + c} \quad (6.2)$$

erfaßt. Zwischen den Konstanten bestehen dabei die Relationen

$$a = \beta, \quad b = \alpha - \beta, \quad c = \beta^2 + \gamma. \quad (6.3)$$

Zu den genannten Quartiken gehören insbesondere die *spirischen Linien des Perseus* [3, S. 124ff.], die aus einem Torus von achsenparallelen Ebenen ausgeschnitten werden. Ein Torus mit der Rotationsachse $x = z = 0$, dem Mittenkreisradius m und dem Meridiankreishalbmesser n wird nämlich von der Ebene $z = e$ nach der spirischen Linie

$$(x^2 + y^2 + e^2 + m^2 - n^2)^2 = 4m^2 x^2 + 4m^2 e^2 \quad (6.4)$$

geschnitten, die — von Realitätsunterschieden abgesehen — vom Typus (6.1) ist. Die Konstanten der zugehörigen Grundfunktion (6.2) haben die Werte

$$a = n^2 - m^2 - e^2, \quad b = 2m^2, \quad c = 4m^2 e^2. \quad (6.5)$$

Umgekehrt, ist $b > 0$, $c > 0$ und $2ab + b^2 + c > 0$, dann fallen die Abmessungen m , n und e reell und von Null verschieden aus.

Für die durch (6.2) bestimmte Grundquartik k ergibt sich über (2.5) die in der Symmetrieebene $y = 0$ verlaufende Hauptfokale l mit

$$X = \frac{\pm b x}{\sqrt{2b x^2 + c}}, \quad X^2 + Z^2 = -a \mp \frac{c}{\sqrt{2b x^2 + c}}. \quad (6.6)$$

Elimination von x führt auf die Gleichung

$$(X^2 + Z^2 + a)^2 = c - \frac{2c}{b} X^2, \quad (6.7)$$

die erkennen läßt, daß es sich bei l wieder um eine *bizirkulare Quartik*

handelt. Ist k speziell eine spirische Linie (6.4), dann lehrt die Umformung von (6.7) über

$$\left(X^2 + Z^2 + a + \frac{c}{b} \right)^2 = \frac{2}{b} Z^2 + \frac{c}{b} \left(2a + b + \frac{e}{b} \right) \quad (6.8)$$

unter Heranziehung der Ausdrücke (6.5) auf

$$(X^2 + Z^2 + n^2 + e^2 - m^2)^2 = 4e^2 Z^2 + 4e^2 n^2, \quad (6.9)$$

dass auch die Fokale l eine spirische Linie ist. Eine zu ihr kongruente entsteht nämlich — wie aus dem Vergleich von (6.9) mit (6.4) ersichtlich ist —, wenn man den Torus mit der Achse $X = Z = 0$, dem Meridiansradius e und dem Meridiankreishalbmesser m mit der Ebene $X = n$ schneidet. Bezeichnet man m , n und e kurz als die „Kenngrößen“ der spirischen Linie k (6.4), dann besteht mit Rücksicht auf die zweite Symmetriearchse von k der hier zu untersuchenden Fokaltripel aus spirischen Linien

Satz 6: Die in der Ebene $z = 0$ gelegene spirische Linie (6.4) mit den Kenngrößen m , n und e besitzt als Hauptfokalen die in der Ebene $y = 0$ verlaufende spirische Linie (6.9) mit den Kenngrößen e , m und n sowie eine der Ebene $x = 0$ angehörende spirische Linie mit den Kenngrößen n , e und m .

Ein derartiges, zur Annahme $m = 3$, $n = e = 2$ gehörendes Fokalkurventripel ist in Abb. 2 dargestellt.⁵

Zum eigentlichen Problem zurückkehrend, ist jetzt noch die Distanzformel (2.6) aufzustellen. Sie lautet, mit jenen Vorzeichen, die jeweils in (6.2) und (6.6) verwendet wurden:

$$r^2 = \pm \sqrt{2b x_1^2 + c} \quad \text{wobei } \begin{cases} \frac{2b x_1 x_2 + c}{\sqrt{2b x_2^2 + c}} & \text{für } \gamma \neq 0 \\ \frac{2b x_1 x_2 + c}{\sqrt{2b x_2^2 + c}} & \text{für } \gamma = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Eine abstandstreue Transformation wird daher erzielt, wenn man

$$\bar{x}_1 = u x_1, \quad \bar{x}_2 = u x_2, \quad \bar{b} = u^{-2} b, \quad \bar{c} = c \quad (6.11)$$

macht. Da außer über u auch noch über \bar{a} verfügt werden darf, sind damit ∞^2 Deformationen des betreffenden Stabwerks gewonnen.

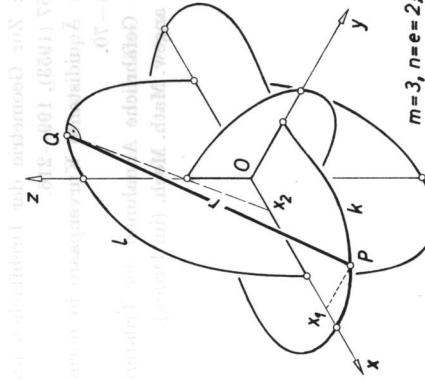


Abb. 2: Fokalkurventripel aus spirischen Linien

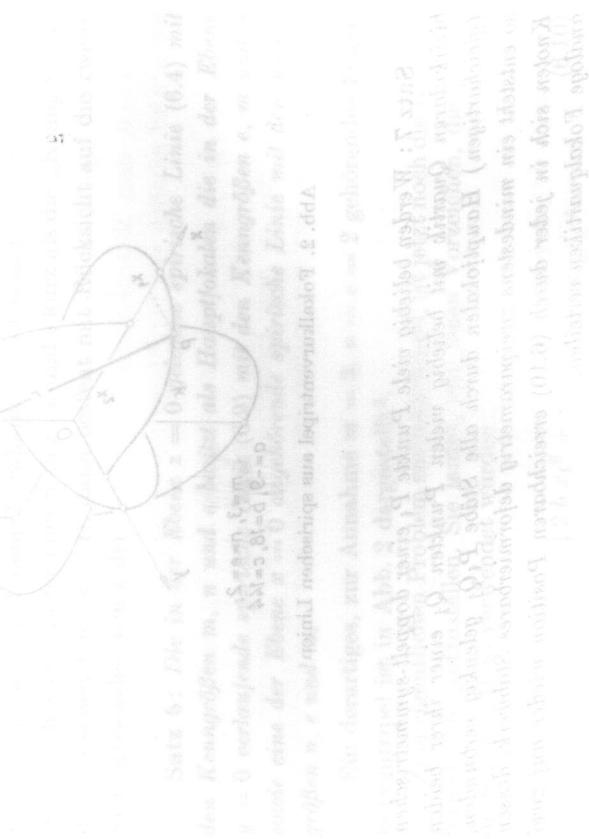
Satz 7: Werden beliebig viele Punkte P_i einer doppelt-symmetrischen bizaruellen Quartik mit beliebig vielen Punkten Q_j einer ihrer beiden (gleichartigen) Hauptfokalen durch alle Stäbe $P_i Q_j$ gelenkig verbunden, so entsteht ein mindestens zwiparametrig deformierbares Stabwerk, dessen Knoten sich in jeder durch (6.10) erreichbaren Position wieder auf zwei analoge Fokalquantiken verteilen.

Die Forderung, daß ein allenfalls im Ursprung vorhandener Doppelpunkt erhalten bleibt, ist mit $\bar{a} = a$ durchaus erfüllbar: Er tritt nämlich für $\gamma = 0$ in (6.1) auf, wird also zufolge (6.3) durch $a^2 = c$ bedingt. Als einziger Variationsparameter für das dann aus zwei Lemniskaten [3, S. 134ff.] bestehende Fokalpaar verbleibt nur noch u , so daß bloß ∞^1 Deformationen das Gewünschte leisten.

⁵ Die naheliegende Frage, ob zwei Bestandteile eines solchen Fokalkurventripels kongruent ausfallen können, ist leicht zu beantworten: Dieser Fall tritt ein, wenn $m = n = e$, und dann sind sogar alle drei Bestandteile untereinander kongruent. Auf dieses merkwürdige Tripel, das aus spirischen Linien mit Flachpunkten auf Torusflächen vom Dorntyp besteht, hat der Verfasser bereits in [5] hingewiesen.

Literatur

- [1] Bricard, R.: Sur des systèmes articulés. Nouv. Ann. Math. **79** (1920), 395 bis 400.
- [2] Killian, K., und P. Meissl: Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefähnlichen Örter. D. Good.-Komm. Bayer. Akad. Wiss. A/61 (1969), 65–72.
- [3] Loria, G.: Spezielle algebraische und transzendentale ebene Kurven, I. Leipzig/A/61 (1969), 65–72.
- [4] Wunderlich, W.: Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien. Mh. Math. **57** (1953), 199–216.
- [5] Wunderlich, W.: Äquidistante Kurvenpaare in normalen Ebenen. Archiv Math. **10** (1959), 64–70.
- [6] Wunderlich, W.: Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke I, II. Z. angew. Math. Mech. (im Druck).



Ein fortanges, zur Ausklammerung von π_1 aus π gehöriges Lemma ist im Anhang 2 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_2 und π_3 ist in Abb. 9 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_4 ist in Abb. 10 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_1 ist in Abb. 11 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_2 ist in Abb. 12 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_3 ist in Abb. 13 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_4 ist in Abb. 14 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_1 ist in Abb. 15 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_2 ist in Abb. 16 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_3 ist in Abb. 17 abgedruckt. Eine entsprechende Behauptung für π_4 ist in Abb. 18 abgedruckt.