

Sonderdruck aus

Österreichische Zeitschrift für  
Vermessungswesen und Photogrammetrie  
Jg. 64 (1977)

## Über die gefährlichen Örter bei zwei Achtpunktproblemen und einem Fünfpunktproblem

Von Walter Wunderlich, Wien

Zwei klassische, auf bloßen Winkelmessungen beruhende geodätische Aufgaben, nämlich die Achtpunktprobleme von Lambert (1765) und Clausen (1843), sind zu Unrecht fast in Vergessenheit geraten. Im Hinblick auf die bei der Suche nach unterseeischen Bodenschätzen wachsende Rolle der Meeresgeodäsie, in deren Rahmen diese Aufgaben wieder an Interesse gewinnen könnten, wird nun in der vorliegenden Untersuchung die Existenz zugehöriger gefährlicher Örter in Gestalt von speziellen Kurven 3. Ordnung nachgewiesen. Im übrigen läßt sich das neuere Fünfpunktproblem von Killian (1934), das für Vermessungen in unerforschten Hochgebirge von Bedeutung ist, zwanglos in die Betrachtungen einordnen.

### 1. Die Achtpunktprobleme von Lambert und Clausen

Zu vermessen seien zwei Punktgruppen, bestehend aus  $m$  „Standpunkten“ bzw.  $n$  „Zielpunkten“, und zwar in der Weise, daß aus jedem Standpunkt sämtliche Zielpunkte, aber keine Standpunkte anvisiert werden. Zu klären ist vorerst die Frage, für welche Anzahlen  $m$  und  $n$  dieser Vorgang ausreicht, um die relative Lage aller  $m+n$  Punkte bestimmen zu können, abgesehen natürlich vom Maßstab, der ohne Längenmessung nicht zu erhalten ist.

Zur Behandlung dieses nach Projektion auf den Horizont im wesentlichen ebenen Problems denke man sich die Punkte von vornherein in der waagrechtene Grundebene liegend und durch kartesische Koordinaten beschrieben, also die Standpunkte durch  $P_i (X_i, Y_i)$  mit  $i = 1, 2, \dots, m$  und die Zielpunkte durch  $Q_j (x_j, y_j)$  mit  $j = 1, 2, \dots, n$ . Zwecks Fixierung des Koordinatensystems werde  $P_1$  zum Ursprung und  $P_2$  zum Einheitspunkt der Abszissenachse gemacht. Damit die gemessenen  $m(n-1)$  Horizontalwinkel zur Ermittlung der restlichen  $2(m+n-2)$  Koordinaten gerade ausreichen, muß die Bilanz

$$mn = 3m + 2n - 4 \text{ oder } (m-2)(n-3) = 2 \quad \dots (1.1)$$

stimmen. Diese diophantische Gleichung ist leicht zu lösen, indem man das Produkt 2 in ganzzahlige Faktoren zerlegt [1]. Da negative Faktoren nur die unbrauchbaren

Lösungen  $m = n = 1$  und  $m = 0, n = 2$  liefern, sind bloß die Zerlegungen 2.1 und 1.2 von Belang; sie führen auf  $m = n = 4$  bzw.  $m = 3, n = 5$ . In beiden Fällen handelt es sich also um ein „Achtpunktpflichtproblem“.

Das erste Problem ( $m = n = 4$ ) wurde bereits von *J. H. Lambert* [6] formuliert und gelöst, der zeigen konnte, daß es im wesentlichen quadratisch ist. Er dachte dabei an die Vermessung einer Küste von einem Schiff aus, das aus vier Positionen vier markante Landpunkte anvisiert. Etwas verbesserte Lösungen der recht schwierigen Aufgabe boten später *J. A. Grunert* [2], *Th. Clausen* [1] und — in Anlehnung an letzteren — *W. Láska* [7] an.

Das zweite Problem ( $m = 3, n = 5$ ) wurde unter Andeutung eines Lösungsweges von *Th. Clausen* [1] aufgeworfen, aber erst von *N. Herz* [3] und *M. Lagally* [5] ausführlicher behandelt. Letzterer führte es auf die Ermittlung der beiden Restschnittpunkte zweier zirkularer Kubiken zurück, von denen fünf gemeinsame eigentliche Punkte schon bekannt sind. Damit ist das Problem grundsätzlich als ebenfalls quadratisch zu erkennen, eine befriedigende Lösung sieht aber immer noch aus.

In der Sprache der terrestrischen Photogrammetrie zusammengefaßt, besteht mithin der nachstehende Sachverhalt: Können in drei oder vier horizontalisierbaren photographischen Aufnahmen mit bekannter innerer Orientierung, die von unbekannt Standpunkten aus gemacht wurden, fünf bzw. vier Geländepunkte identifiziert werden, so ist die Konfiguration aller acht Punkte bis auf den Maßstab bestimmt. Die Bestimmtheit ist dabei nicht unbedingt eindeutig, weil es sich um quadratische Aufgaben handelt. Insbesondere können zwei Lösungen zusammenrücken, was dann eine zumindest infinitesimale Unsicherheit bedeutet. Die Kennzeichnung solcher kritischer oder „gefährlicher“ Annahmen, die im Interesse einer klaglosen Auswertung zu vermeiden sind, ist Gegenstand der vorliegenden Note.

Eine Erhöhung der Punktezahl über acht hinaus führt auf überbestimmte Aufgaben, die in der Praxis eine Ausgleichung erfordern würden, worauf hier aber nicht eingegangen werden soll. Auch in einem solchen Fall ist die Kenntnis gefährlicher Anordnungen von Wert, weil sie durch bloße Punktvermehrung keineswegs mit Sicherheit ausgeschlossen werden können.

### 2. Gefährliche Zielpunkte

Eine experimentelle Lösung des zweiten Achtpunktpflichtproblems könnte man sich etwa so vorstellen: Man zeichnet für jeden der drei Standpunkte  $P_i$  auf ein eigenes Transparentblatt die den gemessenen Horizontalwinkeln entsprechenden fünf Visierlinien und beschriftet alle vom Zielpunkt  $Q_j$  herrührenden mit  $j$ . Auf dem Zeichenbrett sind dann die drei Strahlenquintupel in eine solche Lage zu bringen, daß je drei gleichbezeichnete Strahlen durch einen Punkt gehen.

Ist mit einiger Geduld eine solche Position gefunden — die bei nicht erlundenen Meßdaten sicher existieren wird —, dann muß es wegen des Problemgrades 2 noch eine zweite reelle Lösungsposition geben. (Daß diese unter Umständen praktisch nicht in Frage kommt, weil von den Bündelstrahlen bloß wohldefinierte Halbstrahlen zu benützen sind, ist hier ohne Belang.) Jedenfalls darf auf Grund der Koordinatenfestsetzung in Abschnitt 1 angenommen werden, daß beim Übergang von der ersten zur zweiten Lösung die ersten beiden Bündel bloß Verdrehungen um

ihre festen Scheitel  $P_1$  bzw.  $P_2$  erfahren, während beim dritten Bündel außer der Verdrehung auch noch eine Verlagerung des Scheitels  $P_3$  zuzulassen ist.

Im Falle einer gefährlichen Annahme sind die zwei Positionen zusammengerückt und die zugehörigen Verlagerungen sind durchwegs infinitesimal. Gibt man die differentiellen Verdrehungen  $d\alpha, d\beta, d\gamma$  der Strahlbündel in den drei Standpunkten  $P_1(0, 0), P_2(1, 0)$  und  $P_3(X, Y)$  vor, und von letzterem auch noch die Verschiebung  $(dX, dY)$ , so kann man die Frage stellen: Welche Zielpunkte  $Q(x, y)$  gestatten passende Verschiebungen  $(dx, dy)$ , die mit den gegebenen Verlagerungen verträglich sind?

Für den von der positiven Abszissenachse aus gemessenen Richtungswinkel  $\varphi$  der Visur von einem Standpunkt  $P(X, Y)$  nach einem Zielpunkt  $Q(x, y)$  gilt allgemein:

$$y - Y = (x - X) \operatorname{tg} \varphi. \quad \dots (2.1)$$

Für seine durch die angenommenen Verlagerungen hervorgerufene Änderung  $d\varphi$  hat man daher:

$$dy - dY = (dx - dX) \operatorname{tg} \varphi + (x - X)(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi \quad \dots (2.2)$$

oder, nach Multiplikation mit  $x - X$ ,

$$(x - X)(dy - dY) = (y - Y)(dx - dX) + [(x - X)^2 + (y - Y)^2] d\varphi. \quad \dots (2.3)$$

Die Spezialisierung für  $P_1$  liefert wegen  $X = Y = dX = dY = 0$  die Beziehung  $x dy - y dx = r^2 d\alpha$  mit  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Für  $P_2$  ergibt sich wegen  $X = 1$  und  $Y = dX = dY = 0$ :

$$(x - 1)dy - y dx = s^2 d\beta \text{ mit } s^2 = (x - 1)^2 + y^2. \quad \dots (2.5)$$

Für  $P_3$  gilt hingegen fast unverändert:

$$(x - X)dy - (y - Y)dx = (x - X)dY - (y - Y)dX + r^2 d\gamma$$

mit  $r^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2$ .

Die unbekanntesten Verschiebungskomponenten  $dx$  und  $dy$  müssen daher den drei linearen Gleichungen (2.4–6) genügen, für deren Verträglichkeit das Verschwinden der Koeffizientendeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & r^2 d\alpha \\ x - 1 & y & s^2 d\beta \\ x - X & y - Y & r^2 d\gamma - (y - Y)dX + (x - X)dY \end{vmatrix} \quad \dots (2.7)$$

notwendig und hinreichend ist. Ihre Entwicklung nach der letzten Spalte liefert die zu  $\Delta = 0$  äquivalente Bedingung

$$(Yx - Xy + y - Y)(x^2 + y^2)d\alpha - (Yx - Xy)(x^2 + y^2) - 2(x + 1)d\beta - y(x^2 + y^2) - 2Xx - 2Yy + X^2 + Y^2)d\gamma + y(y - Y)dX - y(x - X)dY = 0. \quad \dots (2.8)$$

Die gefährlichen Zielpunkte  $Q(x, y)$  erscheinen mithin vermöge (2.8) an eine die beiden absoluten Kreispunkte enthaltene Kurve 3. Ordnung, also an eine „zirkulare Kubik“  $c$  mit der Gleichung

$$(Ax + By)(x^2 + y^2) - (A + E)x^3 + Cxy + Dy^3 + Ex + Fy = 0 \quad \dots (2.9)$$

gebunden, ohne auf ihr ausgezeichnet zu sein. Die Koeffizienten stehen abkürzend für

$$\begin{aligned}
 A &= Y d\alpha - Y d\beta, \\
 B &= (1 - X)d\alpha + X d\beta - d\gamma, \\
 C &= -2X d\beta + 2X d\gamma - dY, \\
 D &= -Y d\alpha + 2Y d\gamma + dX, \\
 E &= -Y d\beta, \\
 F &= X d\beta - (X^2 + Y^2)d\gamma - Y dX + X dY.
 \end{aligned} \quad \dots (2.10)$$

Bei diesen Koeffizienten wie auch bei den Inkrementen  $d\alpha, d\beta, d\gamma, dX$  und  $dY$  kommt es naturgemäß bloß auf die Verhältnisse an. Man stellt leicht fest — am besten anhand der Determinante (2.7) — daß die gefährliche Kubik  $c$  auch die drei Standpunkte  $P_1(0, 0), P_2(1, 0)$  und  $P_3(X, Y)$  enthält. Die Kubik  $c$  kann im übrigen auch zerfallen, und zwar in einen beliebigen Kegelschnitt und die Ferngerade ( $A = B = 0$ ) oder in einen Kreis und die Standlinie  $P_1P_2$  ( $A = E = 0$ ).

Gibt man umgekehrt durch Annahme der sechs Parameter  $A$  bis  $F$  eine beliebige der  $\infty^5$  zirkularen Kubiken  $c$  durch  $P_1$  und  $P_2$  vor (die erwähnten Ausartungen eingeschlossen), und wählt man auf ihr an beliebiger Stelle den dritten Standpunkt  $P_3(X, Y)$ , dann lassen sich aus den ersten fünf der sechs linearen Gleichungen (2.10) die fünf Verlagerungsgrößen in der Reihenfolge  $d\beta, d\alpha, d\gamma, dX$  und  $dY$  leicht berechnen; sie genügen wegen  $P_3 \in c$  zwangsläufig auch der sechsten Gleichung (2.10), was direkt nachgeprüft werden kann. Der dritte Standpunkt  $P_3$  ist demnach unter den Punkten von  $c$  nicht ausgezeichnet. Da die Verschiebungen ( $dX, dY$ ) der gefährlichen Zielpunkte  $Q \in c$  gemäß (2.4) und (2.5) nur von  $d\alpha$  und  $d\beta$  abhängen, nicht aber von  $X$  und  $Y$ , so kann man auch noch einen vierten Standpunkt  $P_4(X', Y') \in c$  — ja sogar beliebig viele weitere — hinzunehmen, natürlich jeweils mit entsprechenden, aus (2.10) zu entnehmenden Verlagerungsgrößen.

Damit ist die Frage nach den gefährlichen Annahmen bereits für beide Acht-punktprobleme im wesentlichen geklärt. Es gilt nämlich:

**Satz 1:** Liegen beim Clausenschen oder Lambertischen Achtpunktproblem die drei bzw. vier Standpunkte zusammen mit den fünf bzw. vier Zielpunkten auf ein und derselben, eventuell zerfallenden zirkularen Kubik  $c$  (die durch sieben Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt ist), dann liegt eine gefährliche Annahme vor. Die Anzahl der Stand- und Zielpunkte kann im übrigen beliebig erhöht werden, ohne daß die Gefährlichkeit aufhört, sofern nur alle Punkte dem gefährlichen Ort  $c$  angehören.

Dieser Satz bedarf noch eines wichtigen Zusatzes, der hier lediglich angedeutet werden soll: Die in Rede stehende Gefährlichkeit bedeutet keineswegs eine bloß infinitesimale Unsicherheit, wie auf Grund der Herleitung zu erwarten wäre, sondern eine weitaus höhere. Die bei der Lagallyschen Lösung des Clausenschen Problems in [5] verwendeten zwei zirkularen Kurven 3. Ordnung (vgl. Abschnitt 1) haben nämlich nicht bloß zwei Restschnittpunkte gemein, sondern wegen der angenehmen Nachbarlösung auch die Tangente in einem dieser Punkte; hieraus folgt aber, daß sie überhaupt zusammenfallen. Dies bedeutet nun, daß die Restschnittpunkte unbestimmt auf dieser Kurve ausfallen, sodaß eine stetige Schar von endlich verschiedenen Lösungen existieren wird. Auf diesen überraschenden und nicht ganz einfachen Sachverhalt, der das Auftreten von zirkularen Kubiken als gefährlichen Örtern erhärtet, soll an anderer Stelle näher eingegangen werden.

3. Konstruktion einer zirkularen Kubik

Zur Konstruktion einer durch ihre Gleichung (2.9) festgelegten zirkularen Kurve 3. Ordnung  $c$ , die im allgemeinen vom Geschlecht 1 ist, setze man

$$x^2 + y^2 - x = 2vy. \quad \dots (3.1)$$

Der dadurch mit  $v = \text{const}$  erklärte Hilfskreis  $h$  durch die Standpunkte  $P_1(0, 0)$  und  $P_2(1, 0)$  schneidet  $c$  außer an diesen Stellen und in den beiden absoluten Kreis-punkten noch in zwei weiteren Punkten, deren Verbindungsgerade  $g$  durch

$$(B + C)x + (D + E)y + F + 2v(Ax + By - E) = 0 \quad \dots (3.2)$$

beschrieben wird, wie man mittels Elimination von  $v$  aus (3.1) und (3.2) — was auf (2.9) führt — leicht nachprüft. Bei Variation von  $v$  durchläuft nun  $h$  das Kreisbüschel mit den Grundpunkten  $P_1$  und  $P_2$ , und  $g$  ein Strahlbüschel  $G$ . Die Kubik  $c$  entsteht solcherart als Erzeugnis der beiden Büschel, die durch den gemeinsamen Parameter  $v$  projektiv aufeinander bezogen sind: Man erhält also beliebig viele Punktepaare von  $c$ , wenn man für einzelne Werte von  $v$  den Hilfskreis  $h$  (3.1) und den Strahl  $g$  (3.2) ermittelt und  $h$  mit  $g$  schneidet (Fig. 1). Daß auch der Büschelscheitel  $G$  auf  $c$  liegt, folgt daraus, daß unter den Hilfskreisen  $h$  auch ein durch  $G$  gehender auftritt.

Im Prinzip genügen schon drei Werte, etwa  $v = 0, 1$  und  $\infty$ , um die Projektivität rein konstruktiv zu vervollständigen. Schneidet man das Büschel  $G$  ( $g$ ) mit einer zur reellen Asymptote der Kubik  $c$  parallelen Geraden  $l$  ( $Ax + By = \text{const}$ ), so erhält man eine zur Reihe der Kreismittelpunkte ( $x = 1/2, y = v$ ) ähnliche Punktreihe. Bei passend gewähltem Abstand von  $l$  fallen die beiden Reihen sogar kongruent aus,

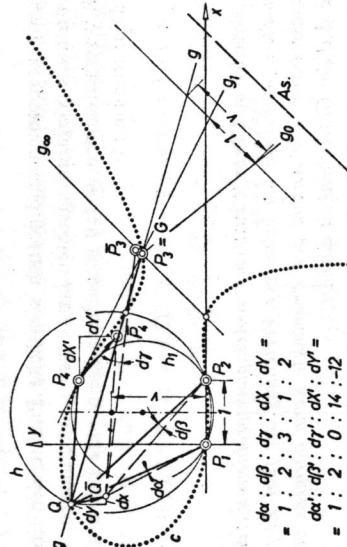


Fig. 1: Gefährliche Kubik der Achtpunktprobleme

was die Konstruktion besonders einfach gestaltet; man hat also die zum Strahl  $g_\infty$  ( $v = \infty$ ) parallele Gerade  $l$  bloß so zu positionieren, daß die Strahlen  $g_0$  ( $v = 0$ ) und  $g_1$  ( $v = 1$ ) auf ihr eine Strecke der Länge 1 ausschneiden.

Nach diesen Anweisungen entstand die Figur 1, der die Annahme  $X = 3, Y = 1, d\alpha : d\beta : d\gamma : dX : dY = 1 : 2 : 3 : 1 : 2$  zugrunde liegt. (Daß der Büschelscheitel  $G$  mit dem Standpunkt  $P_3$  zusammenfällt,

ist ungewollter Zufall.) Die Gleichung der zugehörigen gefährlichen Kubik  $c$  lautet gemäß (2.9) und (2.10):

$$(x - y)(x^2 + y^2) - 3x^2 - 4xy - 6y^2 + 2x + 19y = 0.$$

Die Figur illustriert näherungsweise die durch kleine Inkremente bewirkte Verlagerung des Standpunktes  $P_3(3, 1)$  nach  $\bar{P}_3$  sowie eines (zu  $v = 3/2$  gehörigen) Zielpunktes  $Q$  nach  $\bar{Q}$ . Weiters wurde noch ein vierter Standpunkt  $P_4(1, 2)$  eingetragen, der mit

$$d\alpha' : d\beta' : d\gamma' : dX' : dY' = 1 : 2 : 0 : 14 : -12$$

dieselben Zielpunktverschiebungen hervorruft.

#### 4. Der Sonderfall kollinear Standpunkte

Bisher wurde stillschweigend angenommen, daß die drei Standpunkte  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 0)$  und  $P_3(X, Y)$  nicht auf einer Geraden liegen ( $Y \neq 0$ ). Ist dies aber doch der Fall ( $Y = 0$ ), so reduzieren sich die Gleichungen (2.10) auf  $A = E = 0$  und

$$\begin{aligned} B &= (1 - X)d\alpha + X d\beta - d\gamma, \\ C &= -2X d\beta + 2X d\gamma - dY, \\ D &= dX, \\ F &= X(d\beta - X d\gamma + dY). \end{aligned} \quad \dots (4.1)$$

Für willkürlich vorgeschriebene Verlagerungsdaten  $d\alpha, d\beta, d\gamma, dX$  und  $dY$  zerfällt mithin die gefährliche Kubik (2.9) in die Standlinie  $y = 0$  und einen Kreis  $c$ :

$$B(x^2 + y^2) + Cx + Dy + F = 0. \quad \dots (4.2)$$

Im Grunde genommen sind jedoch sämtliche Punkte der Ebene gefährliche Zielpunkte, denn die Verlagerungsdaten lassen sich so abstimmen, daß alle Koeffizienten in (4.2) verschwinden, sodaß gefährliche Zielpunkte keiner Bedingung mehr unterliegen. Dies tritt ein für

$$d\alpha : d\beta : d\gamma : dX : dY = (X - 1) : X : (2X - 1) : 0 : 2X(X - 1). \quad \dots (4.3)$$

Es gilt mithin:

**Satz 2:** *Befinden sich beim Clausenschen Achtpunktproblem die drei Standpunkte auf einer Geraden, dann liegt bei beliebiger Verteilung der fünf Zielpunkte eine gefährliche Annahme vor. Die Anzahl der Zielpunkte kann übrigens beliebig vermehrt werden, ohne daß die Gefährlichkeit aufhört.*

Die Unsicherheit wird im allgemeinen — d. h. wenn die Stand- und Zielpunkte nicht auf einer zirkularen Kubik verteilt sind — tatsächlich bloß eine infinitesimale sein.

Die Anzahl der Standpunkte kann hingegen nicht vermehrt werden, wenn die Gefährlichkeit sämtlicher Zielpunkte der Ebene bestehen bleiben soll. Nach Hinzunahme eines vierten Standpunktes  $P_4(X', Y')$  liegt nämlich für  $Y' \neq 0$  die Annahme von Abschnitt 2 vor, welche die gefährlichen Zielpunkte auf eine zirkuläre Kubik oder deren Ausartungen einschränkt; die Annahme  $Y' = 0$  würde hingegen wegen  $X' \neq X$  einen Widerspruch gegenüber dem Verhältnis  $d\alpha : d\beta$  aus (4.3) bedingen. Satz 2 besitzt mithin kein Seitenstück für das Lambertsche Problem.

Unter Beibehaltung dreier kollinear Standpunkte wird nun in der Ebene jedem Zielpunkt  $Q(x, y)$  gemäß (2.4) und (2.5) eine bestimmte Unsicherheitsrichtung  $dx : dy$  zugewiesen, die nur von  $Q$  und dem Quotienten  $d\beta/d\alpha = p$  abhängt. Auf diese Weise entsteht ein Feld von Linienelementen, dessen Integralkurven eine Art von Stromlinien darstellen. Sie werden beschrieben durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{(x - 1)dy - y dx}{p(x dy - y dx)} = \frac{(x - 1)^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad \dots (4.4)$$

deren Integration formal durch Übergang zu Polarkoordinaten unschwer zu erledigen, durch geometrische Überlegung aber direkt zu erraten ist: Man lasse einen Strahl das Büschel  $P_1$  mit der Winkelgeschwindigkeit 1 durchlaufen und einen zweiten das Büschel  $P_2$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $p = \text{const}$ ; der Strahlenschnittpunkt  $Q$  beschreibt dann eine der gesuchten Integralkurven, deren Gesamtheit sich durch Veränderung der Ausgangslage ergibt. Bezeichnet man die Richtungswinkel der beiden rotierenden Strahlen mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$ , so hat man den Ansatz

$$x = \cos \alpha \sin \beta / \sin(\beta - \alpha), \quad y = \sin \alpha \sin \beta / \sin(\beta - \alpha), \quad \dots (4.5)$$

und die Lösung von (4.4) wird durch

$$\beta = p\alpha + q \quad \dots (4.6)$$

in Parameterform erhalten. Die kinematisch so erzeugten Kurven sind als „Araneiden“ (Spinnenlinien) wohlbekannt [8, S. 395].

Figur 2 illustriert den Sachverhalt bei kollinearen Standpunkten für die Annahme  $X = 2$  ( $d\alpha : d\beta : d\gamma : dX : dY = 1 : 2 : 3 : 0 : 4$ ) durch die Verlagerung dreier Zielpunkte. Die eingetragene Araneide für das Übersetzungsverhältnis  $p = 2$  ist auch eine zirkuläre Kubik (Strophoide).

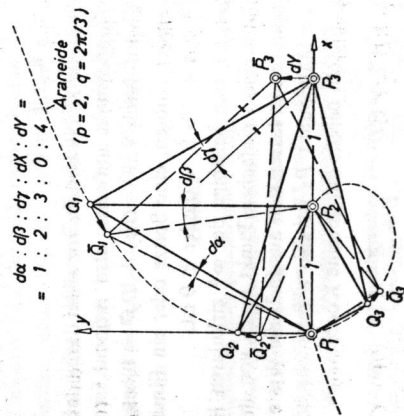


Fig. 2: Kollineare Standpunkte

5. Das Fünfpunktproblem von Killian

Abschließend sei noch kurz auf eine bemerkenswerte Methode eingegangen, die K. Killian [4] für Vermessungen in unerforschten Hochgebirge entwickelt hat. Er empfiehlt, in jedem besuchten Standpunkt ein sichtbares Mal zu hinterlassen, das dann aus jedem folgenden Standpunkt zusätzlich zu gewissen Zielpunkten anzuvisieren ist. Bei dieser Vorgangsweise kommt man mit drei Standpunkten und zwei Zielpunkten aus, sodaß ein Fünfpunktproblem vorliegt; es erweist sich gleichfalls als quadratisch.

Die Frage nach dabei zu vermeidenden gefährlichen Anordnungen, in [4] mittels fehlertheoretischer Untersuchungen beantwortet, läßt sich zwanglos mit dem in Abschnitt 2 entwickelten Konzept erledigen. Seien  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(1, 0)$  und  $P_3(X, Y)$  die drei in dieser Reihenfolge besuchten Standpunkte. Das zweite Zielstrahlbüschel  $P_2$  ist wegen der Visur nach  $P_1$  fest:  $d\beta = 0$ . Für die Verlagerungsgrößen  $dX$ ,  $dY$  und  $d\gamma$  des dritten Büschels  $P_3$  gelten wegen der Visuren nach  $P_1$  und  $P_2$  zwei Relationen nach dem Muster (2.4) und (2.5), nämlich

$$X dY - Y dX = (X^2 + Y^2) d\gamma, \quad \dots (5.1)$$

$$(X - 1) dY - Y dX = (X^2 + Y^2 - 2X + 1) d\gamma.$$

Hieraus folgt:

$$dX = \frac{X^2 - Y^2 - X}{Y} d\gamma, \quad dY = (2X - 1) d\gamma. \quad \dots (5.2)$$

Nach Ausschluß der Annahme kollinear Standpunkte ( $Y = 0$ ) erhält man daher als Ortslinie  $c$  gefährlicher Zielpunkte  $Q(x, y)$  eine spezielle zirkulare Kubik (2.9) durch  $P_1, P_2, P_3$  mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= Y d\alpha, \\ B &= (1 - X) d\alpha - d\gamma, \\ C &= d\gamma, \\ D &= -Y d\alpha + \frac{X^2 + Y^2 - X}{Y} d\gamma, \\ E &= F = 0. \end{aligned} \quad \dots (5.3)$$

Die Besonderheit dieser Kubik besteht vor allem darin, daß sie (wegen  $E = F = 0$ ) in  $P_1$  einen Doppelpunkt aufweist, also rational ist (Geschlecht 0). Das Tangentenpaar in  $P_1$  wird durch  $Ax^2 - Cxy - Dy^2 = 0$  beschrieben; der Doppelpunkt ist daher ein reeller Knoten, eine Spitze oder ein Einsiedler, je nachdem ob die Diskriminante  $C^2 + 4AD > 0, = 0$  oder  $< 0$  ist.

Gibt man umgekehrt eine beliebige der  $\infty^3$  zirkularen Kubiken  $c$  mit einem Doppelpunkt in  $P_1$  und einem einfachen Punkt in  $P_2$  vor, indem man die Koeffizienten  $A$  bis  $D$  vorschreibt, so lassen sich aus (5.3) die Werte von  $X, Y$  und  $d\gamma/d\alpha$  bestimmen. Der dritte Standpunkt  $P_3$  ist also nicht mehr beliebig auf  $c$  wählbar (wie in Abschnitt 2), sondern bereits durch seine Koordinaten

$$X = -\frac{A}{C} \cdot \frac{AB + BD + CD}{A^2 + (B + C)^2}, \quad Y = \frac{A}{C} \cdot \frac{A(A + D) + C(B + C)}{A^2 + (B + C)^2} \dots (5.4)$$

bestimmt. Geometrisch steht dahinter, daß  $P_3$  der Restschnitt von  $c$  mit der Tangente

in  $P_2$  ist. Zum Nachweis berechne man den Anstieg dieser Tangente:  $dy/dx = -A/(B + C) = Y/(X - 1)$ .

Es gilt mithin — im Einklang mit [4]:

**Satz 3:** *Gehören beim vorliegenden Fünfpunktproblem die drei Standpunkte  $P_1, P_2, P_3$  mit den beiden Zielpunkten  $Q_1, Q_2$  einer zirkularen Kubik an, welche in  $P_1$  einen Doppelpunkt hat und in  $P_2$  die Tangente  $P_2P_3$  besitzt, so liegt eine gefährliche Annahme vor.*

Figur 3 veranschaulicht die Situation für die Annahme  $X = 1, Y = 3/4$  unter der Voraussetzung  $d\alpha : d\gamma = 4 : 3$ . Der zugehörige gefährliche Ort ist eine (gespitzte) zirkulare Kubik  $c$  mit der Gleichung  $4(x - y)(x^2 + y^2) = (2x - y)^2$ .

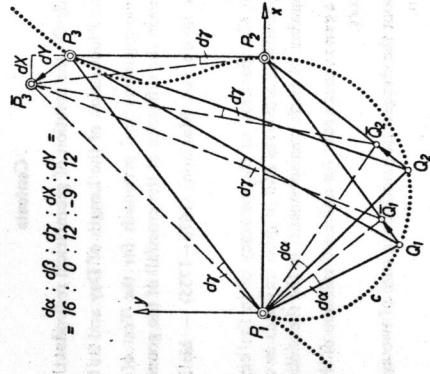


Fig. 3: Gefährliche Annahme beim Fünfpunktproblem

Die Anzahl der Zielpunkte auf der gefährlichen Kubik von Satz 3 kann wiederum beliebig vermehrt werden, ohne daß die Gefährlichkeit aufhört, die Anzahl der Standpunkte hingegen nicht. Höhere Gefährlichkeit mit einer stetigen Schar von endlich verschiedenen Lösungen tritt ein, wenn sämtliche Stand- und Zielpunkte auf einem Kreis liegen ( $A = 0$ , d. h.  $d\alpha = 0$ );  $P_3$  kann dann beliebig auf diesem Kreis variieren.

Literatur

[1] Clausen, Th.: Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Astron. Nachr. 20 (1843), 69–74.  
 [2] Grunert, J. A.: Über eine merkwürdige Relation usw. Archiv Math. Phys. 1 (1841), 89–95.  
 [3] Herz, N.: Eine Verallgemeinerung des Problems des Rückwärtseinschneidens; Problem der acht Punkte. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien (IIa) 113 (1904), 355–379.  
 [4] Killian, K.: Ein Beitrag zur Vermessung unerforschter Hochgebirge. Allg. Verm. Nachr. 36 (1934), 1–8.  
 [5] Lagally, M.: Über eine dem Lambertischen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss. 1912, 261–272.  
 [6] Lambert, J. H.: Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, I. Berlin 1765, 186–194.

- [7] *Láska, W.*: Über ein Problem der photogrammetrischen Küstenaufnahme. *Monatsh. Math. Phys.* 12 (1901), 172–176.  
 [8] *Lovía, G.*: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, I. (Leipzig/Berlin, 2. Aufl. 1910).

#### Contents

- Killian, K. and P. Meissl**: On the solution of geometrical redundant defined problems.  
**Lindinger, Eckart**: On the Fluctuation of the Length of Day and its Influence on Gravity.  
**Marckwardt, Werner**: Investigations and proposals for the Test of Differential Rectifiers with equipments to correct the influence of the crossfall of the ground.  
**Sofonea, Traian**: Johann Jakob von Marinoni (1676–1755) — his life and work — 300 years after his birth.  
**Tarczy-Hornoch, Antal**: Comparison of the accuracy of in the beginning orientated, straight, equalised open theodolite traverses and of gyro traverses in case of equal total operating time and equal number of angle measurements in the theodolite traverse.  
**Walzhäusl, P. and G. Wagensommerer**: An universal solution of the simple spatial intersection for small calculators.  
**Wunderlich, Walter**: About the dangerous positions in case of two eight-point-problems and of a five-point-problem.

---

#### Adressen der Autoren

- Killian, Karl**, Dipl.-Ing. Dr. techn., Univ.-Dozent, Hadikgasse 40, A-1130 Wien.  
**Lindinger, Eckart**, Dr.-Ing., Hochschulprof. i. R., Bahnhofstraße 180, A-4780 Schörling, OÖ.  
**Marckwardt, Werner**, Dipl.-Ing., Jenoptik JENA G. m. b. H., Carl-Zeiss-Straße 1, DDR-69 Jena.  
**Meissl, Peter**, Dipl.-Ing. Dr. techn., o. Univ.-Prof., Vorstand des Institutes für Mathematische und Numerische Geodäsie der Technischen Universität in Graz, Technikerstraße 4, A-8010 Graz.  
**Sofonea, Traian**, Dr. jur. et rer. oec., Rot. del Boschetto 1, I-34128 Trieste, Italia.  
**Tarczy-Hornoch, Antal**, Dr. h. c. mult. Dr., Prof., H-9401 Sopron, POB 9, Hungary.  
**Wagensommerer, Günter**, Dipl.-Ing., Univ.-Assistent, Institut für Allgemeine Geodäsie der Technischen Universität Wien, Gußhausstraße 27–29, A-1040 Wien.  
**Walzhäusl, Peter**, Dipl.-Ing., Dr. techn., Univ.-Dozent, Institut für Photogrammetrie der Technischen Universität in Wien, Gußhausstraße 27–29, A-1040 Wien.  
**Wunderlich, Walter**, Dipl.-Ing., Dr. techn., o. Univ.-Prof., Vorstand des II. Institutes für Geometrie der Technischen Universität Wien, Gußhausstraße 27–29, A-1040 Wien.