Arch. f. Elektrotechnik 55, 61—69 (1972).
2 SCHMIDT, G., Ein Beitrag zur Berechnung von Kräften, JOULEschen Verlusten und Bewegungen an stromdurchflossenen parallelen Massivzylindern, Dissertation TU Berlin 1976.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. H. SCHOOP, TU Berlin, 2. Inst. für Mechanik im FB9, Jebenstr. 1, 1000 Berlin 12, Berlin-West

ZAMM 57, T 51—T52 (1977)

W. WUNDERLICH

Bewegliche Stabwerke von Bricardschem Typus

1. Werden $m \geqq 4, 5, 6$ Raumpunkte P_i mit $n \geqq 6, 5, 4$ Punkten Q_j auf alle möglichen Arten durch die mn starren Stäbe P_iQ_j verbunden, so entsteht selbst bei gelenkiger Ausführung der Knoten im allgemeinen ein starres Gebilde. Diese 1920 von R. BRICARD [1] vermerkte Tatsache hat jüngst eine besondere Bedeutung für ein Trilaterationsproblem der Geodäsie erlangt, weil sie gestattet, unter Verzicht auf Winkelmessungen durch bloße (elektronische) Messung der Entfernungen P_iQ_i die gegenseitige Lage sämtlicher $m + n$ Punkte zu ermitteln, wie K. KILLIAN und P. MEISSL hervorgehoben haben [2].

In diesem Zusammenhang sind nun solche Anordnungen von Interesse, bei welchen das Stabwerk ausnahmsweise beweglich ausfällt, weil dann die entsprechende Trilaterationsaufgabe auf keine bestimmte Lösung führt. Infinitesimale Wackeligkeit des Stabwerks — und damit Unsicherheit der Trilateration — tritt ein, wenn sämtliche Punkte ein und derselben Fläche 2. Ordnung angehören, oder wenn alle Punkte einer Gruppe auf einem Kegelschnitt liegen (während die anderen beliebig im Raum verteilt sein können) [3, II]. Über die bestehenden Möglichkeiten endlich und stetig beweglicher Stabwerke — und damit gefährlicher Trilaterationsannahmen mit stetiger Lösungsschar — weiß man noch nicht restlos Bescheid, doch sind Beispiele dafür bekannt.

2. BRICARD selbst hat eine solche Annahme angegeben, bei der sich die Punkte P_i und Q_j auf zwei Fokalkegelschnitte k bzw. l verteilen. Eine gefährliche Situation liegt aber viel allgemeiner bereits vor, wenn sich die beiden Punkthaufen $\{P_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ und $\{Q_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ in zwei orthogonalen Ebenen befinden, wobei ihre Struktur ganz beliebig sein kann. Nimmt man nämlich — unter Verwendung kartesischer Normalkoordinaten — die simultanen Verlagerungen

$$P_i(x_i, y_i, 0) \to \overline{P}_i(x_i, \overline{y}_i, 0)\,, \quad Q_j(X_j, 0, Z_j) \to \overline{Q}_j(X_j, 0, \overline{Z}_j) \tag{1}$$

vor, wobei für alle i und j

$$\overline{y}_i^2 = y_i^2 + v, \quad \overline{Z}_j^2 = Z_j^2 - v \tag{2}$$

ist, dann bleiben sämtliche Entfernungen $r_{ij} = P_iQ_j = \overline{P}_i\overline{Q}_j$ unverändert, wie die Distanzformel

$$r_{ij}^2 = (X_j - x_i)^2 + y_i^2 + Z_j^2 \tag{3}$$

erkennen läßt. Es gilt mithin der bisher anscheinend noch nicht bemerkte

Satz: *Werden beliebig viele Punkte P_i einer Ebene mit beliebig vielen Punkten Q_j einer dazu normalen Ebene auf alle Arten durch die starren Stäbe P_iQ_j gelenkig verbunden, so entsteht ein Stabwerk, das eine zwangläufige Deformation gestattet, sofern kein Stab beiden Ebenen angehört; die Knoten der einen Gruppe verschieben sich dabei jeweils normal zur Ebene der anderen Gruppe.*

Im Normalriß auf eine zu den beiden Trägerebenen senkrechte Bildebene (etwa $x = 0$) erscheint jenes ebene, zwangläufig bewegliche Stabwerk, das durch Satz 5 in [3, I] gekennzeichnet wurde (vgl. Bild 4 daselbst). Der Ausschluß von Stäben auf der x-Achse muß mit Rücksicht auf (2) aus Realitätsgründen erfolgen.

3. Das BRICARDsche Beispiel ist allerdings dadurch ausgezeichnet, daß es einen Deformationsfreiheitsgrad >1 besitzt. Auch in dieser Hinsicht läßt es sich aber weitgehend verallgemeinern, wenn man etwas höhere Geometrie heranzieht. Man ersetze den Trägerkegelschnitt k der Punkte P_i durch eine geeignete analytische, zur x-Achse symmetrische Grundkurve k:

$$x^2 + y^2 = g(x), \quad z = 0\,. \tag{4}$$

Als Träger der Punkte Q_j dient die in der Symmetrieebene $y = 0$ verlaufende Fokalkurve l von k, also eine Doppelkurve der durch k legbaren Minimaltorse. Diese imaginäre Böschungsfläche mit der konstanten Steigung i kann als Einhüllende der in den Punkten von k augebrachten Minimalkegel oder Nullkugeln $(X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = 0$ aufgefaßt werden. Ihre unter Umständen durchaus reelle Spurkurve l in der Symmetrieebene $Y = 0$ entsteht daher als Einhüllende der Kreisschar

$$(X - x)^2 + y^2 + Z^2 = X^2 + Z^2 - 2xX + g(x) = 0\,. \tag{5}$$

Mit Benützung der partiellen Ableitung nach x erhält man dann für die gesuchte „Hauptfokale" l die Parameterdarstellung

$$X = \tfrac{1}{2}\, g'(x), \quad Y = 0, \quad X^2 + Z^2 = x g'(x) - g(x)\,. \tag{6}$$

Für den Abstand r zweier durch die Parameterwerte x_1 bzw. x_2 festgelegten Punkte $P(x_1, y_1, 0) \in k$ und $Q(X_2, 0, Z_2) \in l$ ergibt sich die Formel

$$r^2 = g(x_1) - g(x_2) + (x_2 - x_1)\, g'(x_2)\,. \tag{7}$$

Das BRICARDsche Kegelschnittspaar stellt sich etwa für die Annahme

$$g(x) = \varepsilon^2 x^2 + 2ax \tag{8}$$

ein, wobei ε die numerische Exzentrizität von k und ε^{-1} jene von l ist. Die Distanzformel (7) nimmt nun die Gestalt

$$r^2 = \varepsilon^2 (x_1 - x_2)^2 \tag{9}$$

an. Sie läßt erkennen, daß bei Übergang zu einer neuen Grundfunktion $\bar{g}(x)$ der Bauart (8) mit abgeänderten Koeffizienten $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{a}$ eine abstandstreue Verlagerung $P \to \bar{P}$ und $Q \to \bar{Q}$ beliebig vieler Punkte erfolgt, wenn die Bedingungen

$$\bar{\varepsilon}\bar{x}_1 = \varepsilon x_1 + u\,, \quad \bar{\varepsilon}\bar{x}_2 = \varepsilon x_2 + u \tag{10}$$

eingehalten werden. Da über $\bar{\varepsilon}$, $\bar{a}$ und u innerhalb gewisser Grenzen frei verfügt werden kann, besteht für das BRICARDsche Stabwerk mit beliebig vielen Knoten Deformabilität vom Freiheitsgrad 3 — nicht 2, wie BRICARD mit anderem und zu engem Ansatz findet.

Eine ausführliche Diskussion der beim BRICARDschen Stabwerk herrschenden Verhältnisse enthält die Arbeit [4]. Dort sind auch neue, durch Wahl geeigneter Grundfunktionen $g(x)$ gewonnene Beispiele von speziellen Fokalkurvenpaaren k, l (dritter und höherer Ordnung) zu finden. Die zugehörigen Stabwerke weisen durchwegs einen 1 übersteigenden Verformungsfreiheitsgrad auf.

Literatur

1 BRICARD, R., Sur des systèmes articulés, Nouv. Ann. 79, 395—400 (1920).
2 KILLIAN, K., MEISSL, P., Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Örter, D. Geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss. A/61, 65—72 (1969).
3 WUNDERLICH, W., Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke. I, II, ZAMM (im Druck).
4 WUNDERLICH, W., Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke, Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss., Wien (im Druck).

Anschrift: Prof. W. WUNDERLICH, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 27, A-1040 Wien, Österreich