

W. WUNDERLICH

**Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke. II\*)**

*In dreidimensionalen Raum besteht ein wichtiges Problem der Trilateration in der Ermittlung der Gestalten und der gegenseitigen Lage eines Tetraeders  $P_1 \dots P_4$  und eines Oktaeders  $Q_1 \dots Q_6$  durch (elektronische) Messung der 24 Entfernungen  $P_i Q_j$ . Wenn alle 10 Ecken einer Quadrik angehören, liegt eine gefährliche Annahme mit im allgemeinen einparametrischer infinitesimaler Unsicherheit vor; die Anzahl der Punkte kann sogar unbeschränkt steigen, wenn nur alle auf derselben Quadrik liegen. Eine andere und wichtigere gefährliche Annahme tritt auf, wenn alle Standpunkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) einem Kegelschnitt angehören, weil dann die Zielpunkte  $Q_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) beliebig im Raum verteilt sein können; für  $m = 4$  ist die Unsicherheit der Trilateration — und die (infinitesimale) Deformabilität des entsprechenden Stabmodells — zweiparametrisch, für  $m > 4$  einparametrisch. Zwei Beispiele mit einer stetigen Schar von endlich verschiedenen Lösungen werden diskutiert: Im ersten Fall verteilen sich die Punkte auf zwei orthogonale Geraden, im zweiten auf zwei Fokalkegelschnitte.*

*In 3-space an important problem of trilateration consists in determining the shapes and the relative position of a tetrahedron  $P_1 \dots P_4$  and an octahedron  $Q_1 \dots Q_6$  by (electronic) measurement of the 24 distances  $P_i Q_j$ . If all 10 corners are situated on a quadric, the configuration is critical with one-parametric infinitesimal uncertainty in general; the number of points may even be higher, if only all of them belong to the same quadric. Another and more important critical situation appears, if all observation points  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) belong to a conic, as then the target points  $Q_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) may be arbitrarily distributed in space; for  $m = 4$  the uncertainty of trilateration — and the (infinitesimal) deformability of the corresponding framework model — is two-parametric, for  $m > 4$  one-parametric. Two examples with a continuous set of finitely different solutions are discussed: In the first case the points are situated on two orthogonal lines, in the second case they lie on two focal conics.*

Важная проблема трилатерации в трёхмерном пространстве состоит в определении видов и взаимного расположения тетраэдра  $P_1 \dots P_4$  и октаэдра  $Q_1 \dots Q_6$  через (электронное) измерение 24 расстояний  $P_i Q_j$ . Если все 10 углов принадлежат некоей квадрике, конфигурация критична в общем случае с однопараметрической инфинитесимальной ненадёжностью; число точек может даже неограниченно возрастать, если только все они принадлежат одной и той же квадрике. Другой и более важный опасный случай наступает, если все точки  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) принадлежат некому конусному сечению, потому что тогда точки  $Q_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) могут быть произвольно расположены в пространстве; для  $m = 4$  ненадёжность трилатерации — и (инфинитесимальное) деформирование соответствующей стержневой модели является двухпараметрической, для  $m > 4$  — однопараметрической. Обсуждаются два примера с непрерывным множеством различных решений: в первом случае точки распределены на двух ортогональных прямых, во втором — на двух фокальных конусных сечениях.

**6. Räumliches Trilaterationsproblem**

Betrachtet werden wieder — diesmal jedoch im Raum — zwei Punkthaufen, gebildet aus  $m$  Standpunkten  $P_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) und  $n$  Zielpunkten  $Q_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Zu klären ist zunächst die Frage, für welche Anzahlen die gegenseitige Lage sämtlicher  $m + n$  Punkte bei Kenntnis der  $mn$  Entfernungen  $P_i Q_j = r_{ij}$  bestimmbar ist. Angenommen ist dabei wieder, daß die Distanzen der Standpunkte untereinander und der Zielpunkte untereinander nicht direkt meßbar sind.

Das verwendete kartesische Koordinatensystem  $x, y, z$  sei dadurch festgelegt, daß der Ursprung in  $P_1$ , die  $x$ -Achse durch  $P_2$  und die  $xy$ -Ebene durch  $P_3$  angenommen werden. Um die restlichen  $3(m + n) - 6$  Koordinaten der Stand- und Zielpunkte aus den  $mn$  gemessenen Distanzen  $r_{ij}$  berechnen zu können, muß die Relation

$$mn = 3(m + n) - 6 \quad \text{oder} \quad (m - 3)(n - 3) = 3 \quad (6.1)$$

bestehen. Die einzigen in Betracht zu ziehenden Lösungen dieser diophantischen Gleichung, die an die Stelle der Bedingung (2.1) im ebenen Fall tritt, ergeben sich über die Zerlegung des Produkts 3 in die Faktoren 1 und 3 mit  $m = 4$  und  $n = 6$  oder umgekehrt. Welche der beiden geometrisch gleichwertigen Möglichkeiten in der Vermessungspraxis eher in Betracht kommt, ist wohl hauptsächlich eine Kostenfrage; in Übereinstimmung mit K. KILLIAN und P. MEISSL [3] sei hier die erste Annahme vorgezogen. Mißt man also von vier Standpunkten  $P_i$  aus zu sechs Zielpunkten  $Q_j$  hin alle 24 Distanzen  $r_{ij}$ , so ist daraus die Konfiguration der zehn Punkte im allgemeinen bestimmbar, wenn auch nicht unbedingt eindeutig. Wird die Anzahl der Punkte vermehrt, so besteht sogar Überbestimmtheit, wie auch bei der Annahme  $m = n = 5$ . Den dabei anfallenden Ausgleichsproblemen sind die unter Betreuung von P. MEISSL entstandenen Forschungsberichte von G. BLAHA [1] und E. TSIMIS [4] gewidmet.

Zur Veranschaulichung der Trilaterationsaufgaben könnten räumliche Stabmodelle dienen, die aus maßstäblich verkleinerten Stäben  $P_i Q_j$  zusammensetzen wären. Technische Schwierigkeiten bereiten dabei nur die Knoten, die als Kugelgelenke vorzustellen sind; nach einem Vorschlag von K. KILLIAN könnte man vielleicht in die Stabenden Nähnadeln einlassen, die dann mit ihren Öhren durch dünne Fäden zu verknüpfen wären. — Die Zahlen  $m = 4$  und  $n = 6$ , die für gewöhnlich zu einem starren Modell führen, hat bereits R. BRICARD [2] genannt.

\*) Teil I siehe ZAMM 57, S. 297–304.

Werden die Koordinaten der Standpunkte  $P_i$  mit  $x_i, y_i$  und  $z_i$  bezeichnet, jene der Zielpunkte  $Q_j$  mit  $X_j, Y_j$  und  $Z_j$ , so bilden die 24 Distanzformeln

$$(x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2 + (z_i - Z_j)^2 = r_{ij}^2 \quad (i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 6) \tag{6.2}$$

den Ausgang für eine analytische Behandlung des vorhin formulierten räumlichen Trilaterationsproblems. Auf Grund der getroffenen Festsetzungen sind dabei die Werte  $x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = 0$  von vornherein bekannt; die restlichen 24 Koordinaten sind durch Auflösung des Gleichungssystems (6.2) zu ermitteln. Für jedes  $j$  liegt das folgende Teilsystem vor:

$$\begin{aligned} X_j^2 + Y_j^2 + Z_j^2 &= r_{1j}^2 \\ (X_j - x_2)^2 + Y_j^2 + Z_j^2 &= r_{2j}^2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Durch Differenzbildung reduziert es sich auf

$$\begin{aligned} X_j^2 + Y_j^2 + Z_j^2 &= r_{1j}^2, \\ 2x_2 X_j - x_2^2 &= \alpha_j \quad \text{mit} \quad \alpha_j = r_{1j}^2 - r_{2j}^2, \\ 2x_3 X_j + 2y_3 Y_j + x_3^2 - y_3^2 &= \beta_j \quad \text{mit} \quad \beta_j = r_{1j}^2 - r_{3j}^2, \\ 2x_4 X_j + 2y_4 Y_j + 2z_4 Z_j + x_4^2 - y_4^2 - z_4^2 &= \gamma_j \quad \text{mit} \quad \gamma_j = r_{1j}^2 - r_{4j}^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Hieraus lassen sich  $X_j, Y_j$  und  $Z_j$  eliminieren, wodurch man zu sechs Bestimmungsgleichungen 8. Grades für  $x_2, x_3, x_4, y_3, y_4, z_4$  gelangt. Leider ist es nicht gelungen, den Grad durch Substitutionen nach dem Vorbild (2.5) entscheidend zu senken, so daß der wahre Grad des räumlichen Trilaterationsproblems noch unbekannt ist. Sicher ist vorläufig bloß, daß er kleiner ist als  $8 \cdot 6^5 = 62208$ ; in diesem Stadium hätte sich aber auch beim ebenen Problem 8. Grades in Abschnitt 2 nur die unbefriedigende Schranke  $6 \cdot 4^2 = 96$  ergeben.

**7. Gefährliche Annahmen mit infinitesimaler Unsicherheit im Raum**

Ein Zielpunkt  $Q$  ist durch seine Entfernungen von drei nicht kollinearen Standpunkten  $P_1, P_2$  und  $P_3$  im allgemeinen zweideutig bestimmt, da er im Schnitt der drei Distanzkugeln mit den Radien  $P_i Q = r_i$  zu finden ist. Steht noch ein vierter Standpunkt  $P_4$  zur Verfügung, der nicht der Ebene  $P_1 P_2 P_3$  angehört, dann ist  $Q$  bei fehlerfreien Messungen eindeutig bestimmt.

Hält man das Koordinatensystem mit dem Ursprung  $P_1(0, 0, 0)$  fest und erteilt man den übrigen Standpunkten  $P_2(x_2, 0, 0), P_3(x_3, y_3, 0)$  und  $P_4(x_4, y_4, z_4)$  willkürliche, aber zulässige differentielle Verschiebungen  $(dx_2, 0, 0), (dx_3, dy_3, 0)$  und  $(dx_4, dy_4, dz_4)$ , so stellt sich nach dem Vorgang in Abschnitt 4 die Frage: Gibt es Zielpunkte  $Q(X, Y, Z)$ , die Verschiebungen  $(dX, dY, dZ)$  gestatten, welche mit den angenommenen Standpunktverschiebungen verträglich sind, d. h. die Entfernungen  $P_i Q = r_i$  in erster Ordnung unverändert lassen  $(dr_i = 0)$ ? Aus den vier maßgebenden Distanzformeln

$$\begin{aligned} (X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2 &= r_i^2 \quad (i = 1, \dots, 4) \\ \text{mit} \quad x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

folgen die Differentialrelationen  $(X - x_i)(dX - dx_i) + (Y - y_i)(dY - dy_i) + (Z - z_i)(dZ - dz_i) = 0$  mit  $dx_1 = dy_1 = dz_1 = dy_2 = dz_2 = dz_3 = 0$ .

Ausgeführt lauten dieselben

$$\begin{aligned} X dX + Y dY + Z dZ &= 0, \\ x_2 dX &= (x_2 - X) dx_2, \\ x_3 dX + y_3 dY &= (x_3 - X) dx_3 + (y_3 - Y) dy_3, \\ x_4 dX + y_4 dY + z_4 dZ &= (x_4 - X) dx_4 + (y_4 - Y) dy_4 + (z_4 - Z) dz_4. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Als Verträglichkeitsbedingung dieser vier linearen Gleichungen für die drei Verschiebungskomponenten  $dX, dY$  und  $dZ$  ist das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (X - x_2) dx_2 \\ (X - x_3) dx_3 + (Y - y_3) dy_3 \\ (X - x_4) dx_4 + (Y - y_4) dy_4 + (Z - z_4) dz_4 \end{vmatrix} \tag{7.4}$$

notwendig und hinreichend. Ausgewertet ergibt sich eine quadratische Gleichung in  $X, Y$  und  $Z$ , also die Gleichung einer gewissen *Quadrik*  $\Gamma$ , an welche die gefährlichen Zielpunkte  $Q$  gebunden sind. Man überzeugt sich sofort, daß

diese Quadrik auch die vier Standpunkte  $P_i$  enthält. Bei Variation der Standpunktverschiebungen erfüllen die Quadriken  $I$  ein fünfparametriges lineares System, und man kann auf diese Weise sämtliche  $\infty^5$  Flächen 2. Ordnung durch  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  erhalten, insbesondere auch die singulären (Kegel) und die zerfallenden (Ebenenpaare).

Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß eine Quadrik im allgemeinen durch neun Punkte bereits bestimmt ist, hat man also das von K. KILLIAN und P. MEISSL [3] gefundene, für die Gefährlichkeit einer Trilaterationsannahme hinreichende und bei nicht komplanaren Standpunkten ~~nicht~~ <sup>auch</sup> notwendige Kriterium:

**Satz 9.** *Gehören die vier Standpunkte und die sechs Zielpunkte einer Quadrik an, dann liegt für das räumliche Trilaterationsproblem eine gefährliche Annahme mit im allgemeinen infinitesimaler Unsicherheit vor.*

Daß die Anzahl der Zielpunkte dabei nicht auf sechs beschränkt zu bleiben braucht, geht aus dem Beweisgang unmittelbar hervor. Daß auch die Anzahl der Standpunkte beliebig vermehrt werden kann, bedarf hingegen noch eines Nachweises, der geometrisch oder analytisch nach dem Muster des ebenen Falles in Abschnitt 4 erbracht werden kann, so daß seine Ausführung hier wohl übergangen werden darf. Man erhält damit

**Satz 10.** *Gehören alle  $m \geq 4$  Standpunkte und alle  $n \geq 6$  Zielpunkte derselben Quadrik an, dann liegt eine gefährliche Trilaterationsannahme mit im allgemeinen infinitesimaler Unsicherheit vor.*

Mit Bezug auf das zugehörige Stabmodell besteht der entsprechende

**Satz 11.** *Verbindet man  $m \geq 4$  Punkte einer Quadrik mit  $n \geq 6$  anderen Punkten derselben Quadrik auf alle Arten durch  $mn$  starre Stäbe, so entsteht bei gelenkiger Ausführung der Knoten ein im allgemeinen wackeliges Fachwerk.*

Beide Sätze gelten offensichtlich auch für  $m \geq 5$  und  $n \geq 5$ .

### 8. Komplanare Standpunkte

Die praktisch wichtige Annahme, daß die vier Standpunkte  $P_i$  in einer Ebene liegen, wird durch  $z_4 = 0$  gekennzeichnet. Bei Vorgabe der sechs Standpunktverschiebungskomponenten  $dx_2, dx_3, dy_3, dx_4, dy_4, dz_4$  zerfällt die gefährliche Quadrik  $I$  gemäß  $D = 0$  (7.4) in die Standebene  $Z = 0$  und eine weitere gefährliche Ebene mit der Gleichung

$$D' = \begin{vmatrix} x_2 & 0 & (X - x_2) dx_2 \\ x_3 & y_3 & (X - x_3) dx_3 + (Y - y_3) dy_3 \\ x_4 & y_4 & (X - x_4) dx_4 + (Y - y_4) dy_4 + Z dz_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.1)$$

Mit Benützung der Abkürzungen (4.7) lautet diese Gleichung ausgeführt

$$AX + BY + x_2 y_3 dz_4 Z - C = 0. \quad (8.2)$$

Durch Abstimmung der Standpunktverschiebungen läßt sich nun erreichen, daß diese Gleichung identisch verschwindet. Neben  $dz_4 = 0$  werden dadurch den übrigen fünf Komponenten drei lineare homogene Bedingungen  $A = B = C = 0$  auferlegt. Dies bedeutet, daß etwa die Komponenten  $dx_4$  und  $dy_4$  noch beliebig vorgeschrieben werden dürfen, durch die sich dann  $dx_2, dx_3$  und  $dy_3$  linear-homogen ausdrücken lassen. Wegen des Fortfalls der Bedingung (8.2) sind unter diesen Umständen sämtliche Raumpunkte gefährliche Zielpunkte. Damit hat man den bei KILLIAN-MEISSL [3] verzeichneten

**Satz 12.** *Gehören die vier Standpunkte einer Ebene an, dann liegt bei  $n \geq 6$  beliebig im Raum verteilten Zielpunkten stets eine gefährliche Annahme des Trilaterationsproblems vor.*

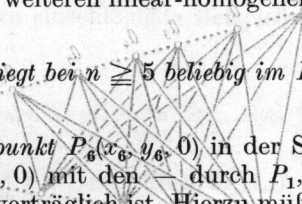
Die im allgemeinen infinitesimale Unsicherheit ist dabei *zwei-parametrig*, weil  $dx_4$  und  $dy_4$  noch gewählt werden dürfen. Die Flächenelemente, auf denen bei der zugrundegelegten Beweglichkeit ( $P_1$  fest,  $P_2$  auf der  $x$ -Achse,  $P_3$  in der  $xy$ -Ebene) die Zielpunkte  $Q_i$  variieren können, gehören wegen der Konstanz der Entfernungen  $r_{1i}$  konzentrischen Kugelschalen um  $P_1$  an.<sup>1)</sup>

Offenbar läßt sich der Sachverhalt auf *fünf komplanare Standpunkte* ausdehnen; es treten nämlich neben  $dz_5 = 0$  zwei zusätzliche Verschiebungskomponenten  $dx_5$  und  $dy_5$  mit drei weiteren linear-homogenen Bedingungen hinzu, was noch immer eine *einparametrig* Unsicherheit bedeutet.

**Satz 13.** *Gehören insgesamt fünf Standpunkte einer Ebene an, dann liegt bei  $n \geq 5$  beliebig im Raum verteilten Zielpunkten eine gefährliche Annahme des Trilaterationsproblems vor.*

Nun drängt sich die Frage auf, ob man noch einen *sechsten Standpunkt*  $P_6(x_6, y_6, 0)$  in der Standebene annehmen kann, dessen vorläufig noch unbekanntes Verschiebung ( $dx_6, dy_6, 0$ ) mit den durch  $P_1, \dots, P_5$  bereits festgelegten — Verschiebungen ( $dX, dY, dZ$ ) aller Zielpunkte  $Q(X, Y, Z)$  verträglich ist. Hierzu müßten neben den Bedingungen  $A = B = C = 0$  von vorhin noch analoge Bedingungen  $A' = B' = C' = 0$  und  $A'' = B'' = C'' = 0$  erfüllt sein, wobei etwa  $A'$  und  $A''$  jene dreizeiligen Determinanten bezeichnen, die sich von  $A$  (4.7) nur dadurch unterscheiden, daß in der letzten Zeile der Index 4 durch 5 bzw. 6 ersetzt ist. Damit hat man für die neun verfügbaren Verschiebungskomponenten  $dx_2, \dots, dy_6$  neun lineare homogene Gleichungen, deren Koeffizientendeterminante verschwinden muß, um eine nichttriviale Lösung zu gewährleisten. Bei Ordnung dieses Gleichungssystems nach

<sup>1)</sup> Bei Beschränkung der Zielpunkte auf eine bestimmte Ebene (8.2) besteht sogar dreiparametrig infinitesimale Unsicherheit, weil dann auch noch  $dz_4$  gewählt werden darf.



$dx_2, \dots, dx_6, dy_3, \dots, dy_6$  hat die betreffende Determinante nach Kürzung von sechs Spalten durch  $y_3 \neq 0$  die Gestalt

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_3y_4 - x_4y_3 & x_2y_4 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3y_5 - x_5y_3 & x_2y_5 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3y_6 - x_6y_3 & x_2y_6 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_6 & 0 & 0 & 1 \\ x_3y_4 - x_4y_3 & x_3y_4 & x_4 & 0 & 0 & y_3y_4 & y_4 & 0 & 0 \\ x_3y_5 - x_5y_3 & x_3y_5 & 0 & x_5 & 0 & y_3y_5 & 0 & y_5 & 0 \\ x_3y_6 - x_6y_3 & x_3y_6 & 0 & 0 & x_6 & y_3y_6 & 0 & 0 & y_6 \end{vmatrix} \quad (8.3)$$

Als Funktion von  $x_6$  und  $y_6$  aufgefaßt ist  $\Delta$  ein quadratisches Polynom, wie man etwa durch Entwicklung der Determinante nach der 6. Zeile unschwer erkennt. Dies bedeutet, daß der zusätzliche Standpunkt  $P_6$  an den Kegelschnitt  $\Delta = 0$  gebunden ist, der naturgemäß auch die Punkte  $P_1, \dots, P_5$  enthält und durch diese bestimmt ist. Etwas Derartiges war von vornherein zu erwarten: Greift man nämlich vier nicht komplanare Zielpunkte  $Q_1, \dots, Q_4$  im Raum heraus und läßt man sie mit den Standpunkten  $P_1, \dots, P_6$  die Rolle tauschen, dann müssen diese gemäß Satz 9 auf einer Quadrik liegen; da sie aber einer Ebene angehören, befinden sie sich auf einem Kegelschnitt. Damit hat man ein Ergebnis von G. BLAHA [1] (vgl. auch E. TSIMIS [4]):

**Satz 14.** *Liegen sämtliche  $m \geq 6$  Standpunkte auf einem Kegelschnitt, dann liegt bei  $n \geq 4$  beliebig im Raum verteilten Zielpunkten eine gefährliche Annahme des Trilaterationsproblems mit im allgemeinen einparametrischer infinitesimaler Unsicherheit vor.*

Alle Betrachtungen über komplanare Standpunkte sind für die Praxis von Interesse, weil bei Verwendung von Hochzielen (Raketen oder Satelliten) die Höhenunterschiede der Bodenstationen relativ klein sind, so daß gefährliche Annahmen durchaus im Bereich der Möglichkeit liegen und schon die annähernd gefährliche Anordnung störende Umstände bei der Auswertung verursacht.

### 9. Gefährliche Annahmen mit unbestimmter Lösung im Raum

Wie in der Ebene (vgl. Abschnitt 5) gibt es auch im Raum Annahmen höherer Gefährlichkeit, bedingt durch eine stetige Lösungsschar. Das entsprechende Stabmodell ist dann nicht bloß wackelig, sondern in endlichem Ausmaß stetig beweglich.

Eine solche Situation liegt beispielsweise in dem bisher stillschweigend ausgeschlossenen Fall *kollinear*er Standpunkte vor: Gehören alle  $m \geq 4$  Standpunkte  $P_i$  einer Geraden  $p$  an, während die  $n \geq 6$  Zielpunkte  $Q_j$  beliebig im Raum verteilt sind, dann bleiben bei voneinander unabhängigen Drehungen der  $Q_j$  um die Achse  $p$  mit den festen  $P_i$  sämtliche Entfernungen  $P_iQ_j$  unverändert (Freiheitsgrad  $n - 1$  der Deformabilität). — Ähnliche Verhältnisse herrschen auch bei *kollinearen Zielpunkten*.

Noch höhere Beweglichkeit tritt ein, wenn sich alle Standpunkte  $P_i$  auf einer Geraden  $p$  und alle Zielpunkte  $Q_j$  in einer zu  $p$  normalen Ebene  $\pi$  befinden. Dreht man alle  $Q_j$  um  $p$ , bis sie in eine Ebene durch  $p$  zu liegen kommen, so erhält man eine ebene Konfiguration von dem in Satz 4 und 5 gekennzeichneten Typ, der noch eine gegenseitige Verschiebung der  $P_i$  gestattet (Gesamtfreiheitsgrad  $n$ ). Versammelt man hingegen durch Drehungen um  $p$  die  $Q_j$  auf einer zu  $p$  windschiefen Geraden  $q$  in  $\pi$ , dann werden die  $P_i$  um  $q$  drehbar und die  $Q_j$  auf  $q$  verschiebbar (Gesamtfreiheitsgrad  $m$ ). Selbst bei festgehaltenen Geraden  $p$  und  $q$ , über deren Abstand noch innerhalb gewisser Grenzen verfügt werden kann, verbleibt noch eine zwangläufige Beweglichkeit, weil im Normalriß auf eine zu  $p$  und  $q$  parallele Ebene eine Konfiguration vom DIXON-Typ aus Satz 4 und 5 erscheint (Bild 7).

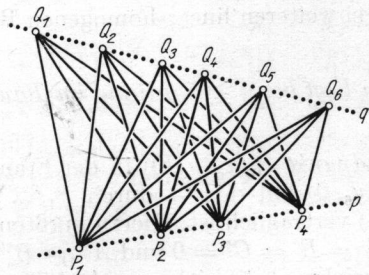


Bild 7

**Satz 15.** *Werden  $m \geq 4$  Punkte einer Geraden  $p$  mit  $n \geq 6$  Punkten einer dazu normalen Geraden  $q$  auf alle Arten durch  $mn$  starre Stäbe verbunden, so entsteht bei gelenkiger Ausführung der Knoten ein Stabwerk von hoher Beweglichkeit. Es gestattet  $\infty^n$  Deformationen bei Erhaltung von  $p$ ,  $\infty^m$  Deformationen bei Erhaltung von  $q$ , und  $\infty^2$  bei Erhaltung der Geradlinigkeit und Orthogonalität von  $p$  und  $q$ .*

Der Satz gilt auch für  $m \geq 5$  und  $n \geq 5$ .

Ein anderes hier anzuführendes Beispiel geht auf R. BRICARD [2] zurück; die Stand- und Zielpunkte verteilen sich dabei auf zwei *Fokalkegelschnitte*  $e$  und  $f$ , das sind Kegelschnitte in zueinander normalen Ebenen, wobei wechselweise die reellen Brennpunkte des einen mit reellen Scheiteln des anderen zusammenfallen. Im Fall einer *Ellipse*  $e$  und einer *Hyperbel*  $f$  (Bild 8) können die nachstehenden Parameterdarstellungen verwendet werden:

$$\begin{aligned} x &= a \cos u, & y &= b \sin u, & z &= 0; \\ X &= c \operatorname{ch} v, & Y &= 0, & Z &= b \operatorname{sh} v \quad \text{mit} \quad c^2 = a^2 - b^2. \end{aligned} \quad (9.1)$$

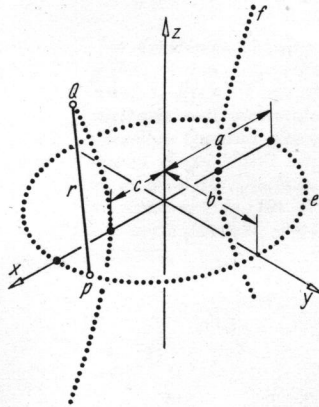


Bild 8

Die reellen Punkte des einen Hyperbelastes werden durch reelle Parameterwerte  $v$  erfaßt, jene des anderen durch komplexe  $v$  mit dem Imaginärteil  $\pi$ . Für die Entfernung  $r$  eines Ellipsenpunktes  $P(x, y, 0)$  von einem Hyperbelpunkt  $Q(X, 0, Z)$  findet man nach kurzer Rechnung die Formel

$$r = |a \operatorname{ch} v - c \cos u|. \quad (9.2)$$

Wählt man nun zwei neue Halbachsen  $a'$  und  $b'$  sowie eine Differenzstrecke  $d$ , so kann man (innerhalb gewisser Grenzen) neue Parameterwerte  $u'$  und  $v'$  gemäß

$$a' \operatorname{ch} v' - a \operatorname{ch} v = c' \cos u' - c \cos u = d \quad \text{mit} \quad c'^2 = a'^2 - b'^2 \quad (9.3)$$

bestimmen. Damit erhält man zwei neue Punkte  $P'$  und  $Q'$ , deren Koordinaten durch die mit Akzenten versehenen Darstellungen (9.1) erklärt sind. Die entsprechende Formel (9.2) lehrt dann mit  $r' = P'Q' = r$ , daß sich bei der Verlagerung der Punkte  $P$  und  $Q$  nach  $P'$  und  $Q'$  ihre Entfernung nicht ändert. Diese von der Wahl von  $a'$ ,  $b'$  und  $d$  abhängige Verlagerung kann offenbar für beliebige und beliebig viele Punktepaare  $P, Q$  gleichzeitig vorgenommen werden; ihre Neulagen  $P', Q'$  verteilen sich dann wiederum auf zwei Fokalkegelschnitte  $e'$  und  $f'$ .

Daß mit diesen sozusagen erratenen  $\infty^3$  *Deformationen* des Stabwerks im wesentlichen alle überhaupt möglichen erfaßt werden, wenn man auch noch rein-imaginäre Werte von  $b'$  zuläßt (was den Übergang der Ellipse  $e$  in eine Hyperbel  $e'$  und der Hyperbel  $f$  in eine Ellipse  $f'$  zur Folge hat), bedürfte noch der Klärung, die jedoch an anderer Stelle erfolgen soll [6], wo dann auch der Grenzfall konfokaler Parabeln zu berücksichtigen sein wird. BRICARD selbst findet bloß  $\infty^3$  Deformationen, weil er in [2] lediglich die Annahme  $d = 0$  ins Auge faßt. Hervorzuheben wäre demgegenüber hier vielleicht die spezielle Annahme  $a' = a, b' = b$  mit  $d \neq 0$ , die auf eine Deformation unter Erhaltung der beiden Fokalkegelschnitte führt.

Zusammenfassend gilt jedenfalls in vermessungstheoretischer Deutung

**Satz 16.** *Gehören  $m \geq 4, 5, 6$  Standpunkte einem Kegelschnitt und  $n \geq 6, 5, 4$  Zielpunkte dessen Fokalkegelschnitt an, dann liegt eine gefährliche Annahme des räumlichen Trilaterationsproblems mit dreiparametrischer Lösungsschar vor.*

Über Verallgemeinerungen auf andere Fokalkurvenpaare soll gleichfalls bei kommender Gelegenheit berichtet werden. Von einer Aufzählung sämtlicher gefährlichen Annahmen der räumlichen Trilateration mit stetiger Lösungsschar — wie sie ja für die Ebene vorliegt — ist man vorläufig noch weit entfernt. Zu erwähnen wären hier etwa noch die *sphärischen Seitenstücke* zu den Sätzen 4 und 8 [5], die sich zu einschlägigen Beispielen ausgestalten ließen.

### Literatur

- 1 BLAHA, G., Investigations of critical configurations for fundamental range networks, Dept. Geod. Sci., Rep. 150, Ohio State University, Columbus 1971.
- 2 BRICARD, R., Sur des systèmes articulés, Nouv. Ann. 79 (1920), 395–400.
- 3 KILLIAN, K., MEISSL, P., Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Örter, D. Geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss. A/61 (1969), 65–72.
- 4 TSIMIS, E., Critical configurations (determinantal loci) for range and range-difference satellite networks, Dept. Geod. Sci., Rep. 191, Ohio State University, Columbus 1973.
- 5 WUNDERLICH, W., On deformable nine-bar linkages with six triple joints, Proc. Kon. Akad. Wetensch. (im Druck).
- 6 WUNDERLICH, W., Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke, Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. (im Druck).

Eingereicht am 25. 11. 1975

Anschrift: Prof. Dr. W. WUNDERLICH, II. Institut für Geometrie, Technische Universität, Gußhausstraße 27, A-1040 Wien, Österreich.