Separatum
ELEMENTE DER MATHEMATIK
BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL, SCHWEIZ
Vol. 32/5, 1977

Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels

Ein schiefer Kreiskegel, festgelegt durch seinen Basisradius r, die Höhe Z und die Exzentrizität $X>0$ des Höhenfusspunktes, erfordert bekanntlich zur exakten Verebnung seines Mantels elliptische Integrale [1]. In der Praxis behilft man sich daher mit der Ausbreitung des Mantels einer eingeschriebenen Ersatzpyramide mit hinreichend vielen Kanten. Für die Aneinanderreihung der auftretenden Teildreiecke benötigt man dabei die Längen der Mantelkanten. Obwohl diese «wahren Längen» mit Hilfe der ersten Massaufgabe der darstellenden Geometrie leicht zu ermitteln sind [2], soll hier ein anderes Verfahren auseinandergesetzt werden, das nicht unmittelbar auf der Hand liegt, aber ebenfalls sehr einfach und vielleicht etwas übersichtlicher zu handhaben ist.

Setzt man unter Verwendung kartesischer Koordinaten den Basiskreis k durch

$$x=r\cos u\,, \qquad y=r\sin u\,, \qquad z=0 \tag{1}$$

an, so ergibt sich die Entfernung R eines Basispunktes $P(x,y,0)$ von der Kegelspitze $Q(X,0,Z)$ in Abhängigkeit vom Parameter u aus

$$R^2=(X-r\cos u)^2+(r\sin u)^2+Z^2=X^2+Z^2+r^2-2\,rX\cos u\,. \tag{2}$$

Hieraus ist zu ersehen, dass dieselben Erzeugendenlängen nicht nur auf dem Ausgangskegel vorhanden sind, sondern in gleicher Verteilung auch noch auf unendlich vielen weiteren Kegeln, wenn bloss die Angabestücke den Bedingungen

$$rX=a^2\,, \qquad X^2+Z^2+r^2=b^2 \tag{3}$$

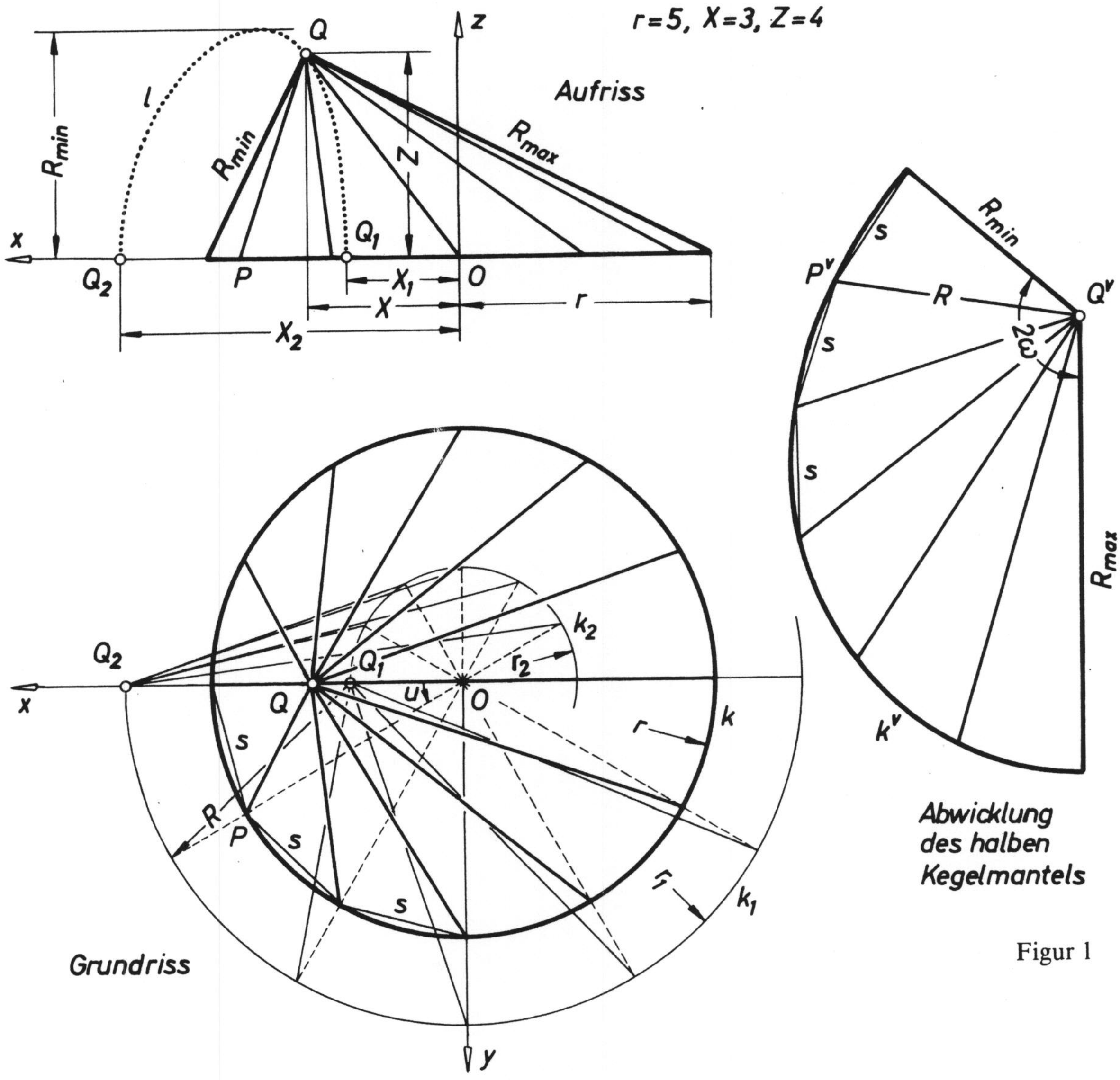
mit Konstanten a und b genügen.

Zur Veranschaulichung denke man sich ein Modell, bei welchem eine grössere Anzahl von Erzeugenden PQ durch starre Stäbe materialisiert sind: Sämtliche Fusspunkte P können dann radial um dasselbe Stück verschoben werden, ohne dass die gelenkig auszuführende Verbindung der Stäbe in Q stört – was keineswegs von vornherein zu erwarten war. Die Kegelspitze Q wandert dabei auf einer (unschwer zu konstruierenden) Bahn l, deren Gleichung sich durch Elimination von r aus den Bedingungen (3) mit

$$(X^2+Z^2-b^2)X^2+a^2=0\,, \qquad Y=0 \tag{4}$$

ergibt. Damit ist l als doppelt-symmetrische monozirkulare Quartik zu erkennen, welche im Fernpunkt der Z-Achse eine isolierte Selbstberührung besitzt; sie besteht aus zwei getrennten Ovalen, von denen ein halbes in Figur 1 eingetragen wurde. Kinematisch liesse sich die Kurve durch eine zentrische Schubkurbel erzeugen.

Von Interesse sind die durch $Z=0$ gekennzeichneten platten Grenzformen des Kegels. Für die Radien r_1 und r_2 der so gewonnenen Kreisscheiben k_1 bzw. k_2 sowie



Figur 1

für die Abszissen X_1 und X_2 der entsprechenden Grenzlagen Q_1 bzw. Q_2 der Kegelspitze gelten die Beziehungen

$$r_{1,2}=X_{2,1}=\frac{1}{2}(R_{\max}\pm R_{\min}), \tag{5}$$

wobei $R_{\min}$ und $R_{\max}$ zu den Parameterwerten $u=0$ bzw. π in (2) gehören.
Mit Hilfe dieses Kreises k_1 oder k_2 kann man dann von Q_1 bzw. Q_2 aus die zur Abwicklung des Kegels benötigten Erzeugendenstrecken $PQ=R$ wie in einem Polardiagramm abgreifen (Fig. 1). Der Übergang von der Scheibe (k_1, Q_1) zur Mantelverebnung (k^v, Q^v) mag dabei als der Vorgang eines sich schliessenden Fächers aufgefasst werden, der Übergang von k_2 nach k^v als Entfaltung des Fächers. Man vergleiche hierzu die bei der Abwicklung des Drehkegels auftretende, durch proportionale Änderung der Polarwinkel erklärte Fächertransformation in [2]. – Zur Kontrolle des gesamten Zentriwinkels 4ω des Sektors (k^v, Q^v) wurden in [1] Nomogramme und Näherungsformeln entwickelt.
Die voranstehenden Betrachtungen lassen sich im übrigen auf Kegel mit einem beliebigen Kegelschnitt k als Basis verallgemeinern und besitzen dann eine gewisse Bedeutung für ein Trilaterationsproblem der Geodäsie [3]. Das Erzeugendensystem eines solchen Kegels 2. Ordnung gestattet ebenfalls eine einparametrige Deformation, bei welcher der sich affin verändernde Basiskegelschnitt k innerhalb einer konfokalen Schar variiert. Seine Punkte P wandern dabei auf den konfokalen Kegelschnitten der Orthogonalschar, während die Kegelspitze Q im allgemeinen eine Raumkurve l durchläuft, sofern sie nämlich keiner Symmetrieebene von k angehört. Diese algebraische Raumkurve l ist im Falle einer Ellipse oder Hyperbel k von 12. Ordnung, im Falle einer Parabel k von 6. Ordnung. Liegt Q jedoch in genau einer Symmetrieebene von k, so ist die Spitzenbahn l eben und von 4. Ordnung im elliptischen oder hyperbolischen Fall, während sie sich im parabolischen Fall auf eine Ellipse reduziert. Befindet sich schliesslich die Kegelspitze Q auf dem im Basismittelpunkt errichteten Lot, dann bleibt sie darauf und ändert bloss die Höhe.

W. Wunderlich, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 W. Wunderlich: Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung. Österr. Ingen. Archiv *10*, 107–114 (1956).

2 W. Wunderlich: Darstellende Geometrie I. Hochschultaschenbücher, Bd. 133, S. 130–134. Mannheim 1966.

3 W. Wunderlich: Une déformation remarquable du système des génératrices d'un cône du second degré et un problème de géodésie. Bull. Inst. Polyt. Jassy (im Druck).