Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 23. Juni 1977

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1977, Nr. 7

(Seite 93 bis 96)

Das wirkl. Mitglied Walter Wunderlich übersendet eine von ihm selbst verfaßte kurze Mitteilung:

„Integrallose Darstellung der Loxodromen im isotropen Raum."

1. Wird der die Metrik des euklidischen Raumes von drei Dimensionen regelnde nullteilige Fernkegelschnitt (der „absolute Kugelkreis") durch ein konjugiert-imaginäres Ferngeradenpaar ersetzt, so spricht man von einem *isotropen Raum*. Bei Verwendung von kartesischen Normalkoordinaten x, y, z kann das Bogenelement mit $ds^2 = dx^2+dy^2$ angesetzt werden. — Im Zuge seiner eingehenden und so fruchtbaren Erforschung dieses Raumes hat K. Strubecker [2] kürzlich die einschlägigen *Loxodromen* untersucht, also jene Raumkurven, welche die Ebenen eines Büschels unter konstantem Winkel durchsetzen. Im allgemeinen Fall darf die Büschelachse als mit der y-Achse zusammenfallend vorausgesetzt werden, wohin sie mittels einer isotropen Bewegung gebracht werden kann, wenn sie eigentlich, reell und nicht vollisotrop (z-parallel) ist. Als „*Winkel*" der Fortschreitrichtung $dx{:}dy{:}dz$ gegen eine Büschelebene $z = ux$ wird die gegenüber isotropen Bewegungen unempfindliche Ersatzinvariante

$$\lambda = (dz - u\,dx)/ds \tag{1}$$

eingeführt. Die Ermittlung einer isotropen Loxodrome $\lambda = \text{const}$ wird damit auf die Mongesche Differentialgleichung

$$x^2\,du^2 = \lambda^2\,(dx^2+dy^2) \tag{2}$$

zurückgeführt [2, Gl. (45)]; hierbei dürfte man sich unter zulässiger Normierung auf die Annahme $\lambda = 1$ beschränken.

Mit Hilfe eines von den Böschungslinien her geläufigen Ansatzes wird nun bei Strubecker eine von der Wahl einer beliebigen Funktion $\Phi(t) \in C^3$ abhängige Parameterdarstellung der Loxodromen hergeleitet [2, Gl. (47)]. Diese Darstellung drückt x und y durch Φ und die ersten beiden Ableitungen von Φ aus, während für u noch eine Quadratur vorzunehmen ist, die nur bei speziellen Annahmen von Φ explizit ausführbar ist, dann jedoch manche interessante Ergebnisse liefert, beispielsweise algebraische Loxodromen.

2. Für die euklidischen Loxodromen hat seinerzeit E. Salkowski [1] eine *integrallose Darstellung* mitgeteilt, die im wesentlichen auf einer imaginären Winkelstreckung um die Loxodromenachse beruht; sie führt die Loxodromen in Minimalkurven über, welche sich als Gratlinien von Minimaltorsen (Böschungstorsen mit der Steigung i) ohne Integration gewinnen lassen. Eine analoge Darstellung für die isotropen Loxodromen bildet den Gegenstand der vorliegenden Note.

Nach Vornahme der Substitutionen

$$X = e^{-u/\lambda} \cdot x\,, \quad Y = e^{u/\lambda} \cdot x \tag{3}$$

vereinfacht sich die Mongesche Gleichung (2) zu

$$dX \cdot dY + dy^2 = 0. \tag{4}$$

Hierdurch sind nun im Parameterraum X, Y, y (bei kartesischer Deutung der Koordinaten) *affine Böschungslinien* mit dem Richtkegel $XY + y^2 = 0$ oder $X : Y : y = -\tau^{-1} : \tau : 1$ gekennzeichnet, die sich als Gratlinien von entsprechenden affinen Böschungstorsen ermitteln lassen. Letztere werden eingehüllt von Ebenenscharen

$$\tau X - \tau^{-1} Y + 2y = 2\, p(\tau) \text{ mit } p(\tau) \in C^3. \tag{5}$$

Unter Heranziehung der partiellen Ableitungen nach τ erhält man für die Gratlinie der Torse (5) die Darstellung

$$X = 2\dot{p} + \tau\ddot{p},\; Y = -\tau^3\ddot{p},\; y = p - \tau\dot{p} - \tau^2\ddot{p}. \tag{6}$$

Über (3) folgt daraus:

$$x = \pm \sqrt{XY},\; u = (\lambda/2) \cdot \ln (Y/X). \tag{7}$$

Drückt man hierin X und Y gemäß (6) aus, so hat man x, y und $z = ux$ als Funktionen von τ und damit die gewünschte integralfreie Parameterdarstellung der isotropen Loxodromen.

3. Als *Beispiel* sei etwa die Annahme $p = \tau^n$ mit $n \neq 0$ und ± 1 behandelt. Zufolge (6) hat man zunächst

$$X = n(1+n)\,\tau^{n-1},\; Y = n(1-n)\,\tau^{n+1},\; y = (1-n^2)\,\tau^n. \tag{8}$$

Anschließend ergibt sich gemäß (7):

$$x = \pm\, n \sqrt{1 - n^2} \cdot \tau^n, \quad u = \frac{\lambda}{2} \ln\left(\frac{1-n}{1+n}\tau^2\right). \tag{9}$$

Für reelle Lösungen ist $n^2 < 1$ zu fordern. Wegen $y/x = \pm \sqrt{1-n^2}/n = \operatorname{tg} \alpha = \text{const}$ gelangt man auf diese Weise zu den auch in [2, Gl. (57)] vermerkten *ebenen Loxodromen* (in isotropen Ebenen)

$$x = x,\; y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad z = \pm \frac{\lambda x}{n} \cdot \ln (cx) \text{ mit } \cos \alpha = n. \tag{10}$$

Literatur

[1] Salkowski, E.: *Schraubenlinien und Loxodromen.* Sitzungsber. Math. Ges. Berlin 1908, 83—87.

[2] Strubecker, K.: *Loxodromen im isotropen Raum.* Sitzungsber. Österr. Akad. d. Wiss., *184* (1975), 269—305.

Österreichische Staatsdruckerei. L61 30007