

varios' Trilaterationsproblem ist ein sehr interessanter und praktisch wichtiger geodätischer und physikalischer Aufgabe, welche die Lösung der geodätischen und physikalischen Probleme der Erde und des Weltalls ermöglicht.

Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten

von
Walter Wunderlich (Wien)
(Mit 1 Abbildung)

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 21. April 1977)
Von
Walter Wunderlich (Wien) zum 80. Geburtstag gewidmet
am 12. Mai 1977

Die Fortschritte der elektronischen Entfernungsmessung haben es möglich gemacht, in der Geodäsie dem klassischen, im wesentlichen auf Winkelmessungen gestützten Verfahren der „Triangulation“ eine gleichberechtigte, auf bloßen Distanzmessungen beruhende Methode der „Trilateration“ gegenüberzustellen. Wie K. Killian und P. Meissl [3] in einer grundlegenden Studie gezeigt haben, ist die gegenseitige Lage von vier *Standpunkten* P_i ($i = 1, \dots, 4$) unbekannter Situation und sechs *Zielpunkten* Q_j ($j = 1, \dots, 6$) im allgemeinen grundsätzlich (wenn auch nicht unbedingt eindeutig) bestimmt, wenn die 24 Entfernungen $P_i Q_j = r_{ij}$ gemessen werden. Dieses spezielle, aber prinzipiell wichtige Trilaterationsproblem verlangt die Ermittlung der Relativkoordinaten aller zehn Punkte P_i und Q_j und ist von rein algebraischem Charakter; der Grad ist allerdings sehr hoch und bisher noch nicht bekannt [5].

Für eine näherungsweise Lösung könnte man ein — auch zur Ver-

anschaulichung nützliches — *Modell* bauen, welches die 24 Abstands-

strecken $P_i Q_j$ in passender Verkleinerung als Stäbe enthält, deren Enden in den zehn Knoten gelenkig miteinander zu verbinden sind. Trotz der Bewegung, welche die (sphärischen) Gelenke gestatten würden, wird ein solches Stabmodell für gewöhnlich *starr* sein, wie schon R. Bricard [2] bemerkt hat.

Unter besonderen Umständen kann ein derartiges Stabwerk jedoch *wackelig* (infinitesimal beweglich) ausfallen, ja sogar in endlichem Ausmaß *stetig beweglich* sein. Für den Geodäten liegt dann eine „gefährliche Annahme“ mit infinitesimaler Unsicherheit bzw. endlicher Unbestimmtheit vor. Um solche unerwünschten Sonderfälle vermeiden zu können, muß man über die gefährlichen Anordnungen ausreichend Bescheid wissen. Hierzu soll die vorliegende Arbeit einen wichtigen Beitrag liefern.

Unter der Voraussetzung, daß die vier *Standpunkte nicht komplanar* sind, also nicht in einer Ebene liegen, kennt man ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Gefährlichkeit [3]: *Gehören nämlich sämtliche zehn Punkte einer Quadrirk (Fläche zweiter Ordnung) an, so liegt eine gefährliche Annahme mit zumindest infinitesimaler Unsicherheit vor.* Wie gezeigt werden kann [5], bleibt die Gefährlichkeit sogar noch bestehen, wenn die Stand- und Zielpunkte beliebig vermehrt werden, sofern sie gleichfalls auf der gefährlichen Quadrirk liegen. Ansonsten würde die Hinzunahme weiterer Meßpunkte zwar eine Vereinfachung des algebraischen Problems bewirken, falls die Messungen vollkommen fehlerfrei wären; da dies jedoch praktisch niemals zutrifft, zieht eine solche Maßnahme Ausgleichsprobleme nach sich, auf die hier nicht eingegangen werden soll (vgl. diesbezüglich [1] und [4]).

Wesentlich andere Verhältnisse herrschen nun in dem zurückgestellten Fall von vier *komplanaren Standpunkten*: Es sind dann nämlich sämtliche Raumpunkte gefährliche Zielpunkte, gleichgültig in welcher Anzahl (≥ 6) und Verteilung sie vorliegen. Bei näherem Zusehen erweist es sich überdies, daß über die in [3] und [5] festgestellte infinitesimale Unsicherheit hinaus sogar eine zweiparametrische endliche *Unbestimmtheit* besteht, wie in Abschnitt 2 gezeigt wird¹. Dies ist um so bedeutungs-

voller, als komplanare Standpunkte bei Bodenstationen mit relativ geringen Höhenunterschieden wenigstens annähernd durchaus gegeben sind. — Bei *fünf komplanaren Standpunkten* reduziert sich die stetige Lösungsschar auf eine einparametrische, die auch noch bei sechs und mehr Standpunkten bestehen bleibt, falls dieselben einem *Kegelschnitt* angehören (Abschnitte 5 und 7). Die Art der zwangsläufigen Deformation des entsprechenden Stabmodells wird in Abschnitt 8 geklärt: Bei festgehaltenen Achsen des gefährlichen Kegelschnittes variiert derselbe in einem konfokalen System. — Für *sieben komplanare Standpunkte*, die nicht auf einem Kegelschnitt liegen, wird das dann bei drei Zielpunkten bestimmte Trilaterationsproblem, das sich als quadratisch erweist, gelöst (Abschnitt 6).

2. Vier komplanare Standpunkte

Zur analytischen Behandlung des Problems wird nach dem Vorgang von Killian und Meissl [3] ein kartesisches Normalkoordinaten-System x, y, z verwendet, das den Standpunkt P_1 zum Ursprung hat, dessen x -Achse durch P_2 geht, und dessen x - y -Ebene auch P_3 und P_4 enthält. Von den zwölf Standpunktkoordinaten x_i, y_i, z_i ($i = 1, \dots, 4$) sind daher sieben von vornherein bekannt:

$$x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = z_4 = 0. \quad (2.1)$$

Die restlichen fünf seien vorläufig als von Null verschieden angenommen.

Für die vier Abstände $P_i Q = r_i$ eines beliebigen Zielpunktes $Q(X, Y, Z)$ gelten dann die Formeln

$$\begin{aligned} r_1^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2, \\ r_2^2 &= (X - x_2)^2 + Y^2 + Z^2, \\ r_3^2 &= (X - x_3)^2 + (Y - y_3)^2 + Z^2, \\ r_4^2 &= (X - x_4)^2 + (Y - y_4)^2 + Z^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bei bekanntem Basisviereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ muß zwischen den vier Distan-

statt der erwarteten Wackeligkeit eine stetige Deformabilität aufwies. Die Gelenksknoten wurden nach einem Vorschlag von K. Killian in der Weise realisiert, daß in die Enden der hölzernen Modellstäbe keine Nähnadeln eingelassen wurden, deren Öhre mittels dünner Fäden verknüpft wurden.

¹ Diese Entdeckung ist einem von Fr. Elisabeth Kurka für einen Seminarvortrag angefertigten Stabmodell der vorhin geschilderten Art zu verdanken, das

zen r_i eine gewisse Relation bestehen, damit sich die drei Zielpunktskoordinaten X, Y, Z aus den vier Gleichungen (2.2) ohne Widerspruch berechnen lassen². Durch Differenzierung gelangt man von (2.2) zu

$$\begin{aligned} 2x_2 X &= r_1^2 - r_2^2 + x_2^2, \\ 2x_3 X + 2y_3 Y &= r_1^2 - r_3^2 + x_3^2 + y_3^2, \\ 2x_4 X + 2y_4 Y &= r_1^2 - r_4^2 + x_4^2 + y_4^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Diese drei linearen Gleichungen für X und Y müssen offenbar linear abhängig sein, wofür bekanntlich das Verschwinden der Koeffizientendeterminante maßgebend ist. Deren Entwicklung nach der letzten Spalte liefert dann die *Verträglichkeitsbedingung*

$$(r_1^2 - r_2^2 + x_2^2)(x_3 y_4 - x_4 y_3) - (r_1^2 - r_3^2 + x_3^2 + y_3^2)x_2 y_4 + (r_1^2 - r_4^2 + x_4^2 + y_4^2)x_2 y_3 = 0. \quad (2.4)$$

Nach Division durch $x_2 y_3 \neq 0$ und Umordnung ergibt sich schließlich die gesuchte *Abstandsrelation* in der Form

$$\lambda_1 r_1^2 - \lambda_2 r_2^2 + \lambda_3 r_3^2 - r_4^2 = d \quad (2.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{x_3 y_4}{x_2 y_3} - \frac{x_4}{x_2} - \frac{y_4}{y_3} + 1, & \lambda_2 &= \frac{x_3 y_4}{x_2 y_3} - \frac{x_4}{x_2}, & \lambda_3 &= \frac{y_4}{y_3}, \\ d &= -\frac{x_2}{y_3}(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \frac{y_4}{y_3}(x_3^2 + y_3^2) - (x_4^2 + y_4^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Man bemerkt, daß zwischen den Koeffizienten in (2.5) die Beziehung

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 1 = 0 \quad (2.7)$$

besteht. Die λ_i hängen gemäß (2.6) offensichtlich mit den Teildreiecken des Basisvierecks vermöge

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : 1 = P_2 P_3 P_4 : P_1 P_3 P_4 : P_1 P_2 P_4 : P_1 P_2 P_3 \quad (2.8)$$

zusammen. Die Bedingung (2.7) drückt daher bloß die doppelte Zerlegbarkeit der Fläche des Vierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$ in zwei Dreiecke aus. Für ein streng konvexes Viereck sind alle λ_i positiv. — Damit hat man den für das Folgende entscheidenden

Hilfssatz: *Die Quadrate der Abstände eines beliebigen Raumpunktes von den Ecken eines festen ebenen Vierecks sind durch eine lineare Relation (2.5) miteinander verknüpft, deren Parameter von der Lage des Raumpunktes unabhängig sind. Die Koeffizienten der Quadrate genügen der Bedingung (2.7) und hängen bloß von den Flächenverhältnissen der Teil-dreiecke des Vierecks ab, stimmen also für affine Vierecke und nur für solche überein.*

Um den Schluß der Aussage einzusehen, beachte man, daß mit den Flächenverhältnissen auch die Streckenverhältnisse bekannt sind, unter denen einander die beiden Vierecksdiagonalen $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$ gegenseitig teilen. Berechnet M deren Schnittpunkt, so lehrt Abb. 1 mit Hinblick auf (2.8) das Bestehen der Proportionen

$$P_1 M : M P_3 = \lambda_3 : \lambda_1, \quad P_2 M : M P_4 = 1 : \lambda_2. \quad (2.9)$$

Der Fall paralleler Diagonalen würde eine gesonderte Überlegung erfordern, doch könnte man ihn durch geeignete Ummumerierung der Ecken ausschalten.

Gibt man nun umgekehrt eine Relation der Bauart (2.5) unter Beachtung der Einschränkung (2.7) vor, so ist das zugehörige Basisviereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ noch keineswegs festgelegt, da für seine fünf nicht-verschwindenden Eckkoordinaten x_2, x_3, y_2, x_4, y_4 lediglich die vier Bestimmungsgleichungen (2.6) zur Verfügung stehen, von denen überdies die erste überflüssig ist. Es existieren mithin ∞^2 zur gewählten Relation (2.5) passende Basisvierecke, die im übrigen zufolge des Hilfsatzes untereinander affin sind. Wird etwa der Standpunkt $P_3(x_3, y_3, 0)$ mit $y_3 \neq 0$ frei gewählt, so gelangt man nach Elimination von x_4 und y_4 aus (2.6) mittels

$$x_4 = \lambda_3 x_3 - \lambda_2 x_2, \quad y_4 = \lambda_3 y_3 \quad (2.10)$$

² Geometrisch bedeuten die Gleichungen (2.2) in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Darstellungen von vier Distanzkugeln (P_i, r_i) , die einen Punkt Q gemeinsam haben sollen; zu diesem tritt aus Symmetriegründen noch das Spiegelbild \bar{Q} bezüglich der Grundebene $z = 0$ hinzu.

Deren Auflösung legt dann (zweideutig) den Standpunkt $P_2(x_2, 0, 0)$ fest, worauf das Viereck durch $P_4(x_4, y_4, 0)$ über (2.10) zu ergänzen ist. Nachdem die Auflösbarkeit des Gleichungssystems (2.3) und damit auch jene von (2.2) bei Einhaltung der Bedingung (2.5) gesichert erscheint, so ist — wenigstens für nichtausgeartete Basisvierecke und vorläufig ohne Rücksicht auf Realitätsforderungen — die eingangs aufgestellte Behauptung bestätigt durch den

Satz 1: *Werden von vier komplanaren Standpunkten aus, von denen keine drei in einer Geraden liegen, sämtliche Distanzen zu sechs oder mehr beliebig im Raum verteilten Zielpunkten gemessen, so ist das Problem der Rekonstruktion der räumlichen Konfiguration aus diesen Entfernungsmustern zweitach unbestimmt.*

Zu beachten ist hierbei, daß bereits die Distanzmessungen zu *drei Zielpunkten* ausreichen, um die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und d aus (2.7) und drei Gleichungen der Bauart (2.5) zu ermitteln, sofern die Komplanarität der Standpunkte von vornherein feststeht. Die überschätzigen Messungen sind also nicht mehr ganz unabhängig, sondern müßten entsprechenden Bedingungen (2.5) genügen und könnten daher zur Prüfung der Komplanarität dienen. Hinsichtlich der Stabmodelle gilt der äquivalente

Satz 2: *Werden vier komplanare Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, mit sechs oder mehr beliebig im Raum verteilten Punkten auf alle möglichen Arten durch starre Stäbe gelenig verbunden, so erhält ein mindestens zweiparametrig deformierbares Stabwerk.*

Daß der abschwächende Zusatz „mindestens“ in Satz 1 und 2 keineswegs entbehrliech ist, beweisen vom Verfasser in [6] untersuchte Gegenbeispiele, bei welchen infolge sehr spezieller Anordnung der Stand- und Zielpunkte der Freiheitsgrad 3 erreicht wird.

3. Drei kollineare Standpunkte

Sind von den vier Standpunkten drei *kollinear*, also einer Geraden angehörend, und bezeichnet man sie mit P_1, P_2 und P_3 , so wird dieser Fall durch die bisher ausgeschlossene Annahme $y_3 = 0$ erfaßt und bedarf also noch der Klärung. Der uninteressante Fall, daß alle vier Stand-

punkte auf einer Geraden liegen, darf außer Betracht bleiben, weil hier die mehrfache Unbestimmtheit auf der Hand liegt: Sämtliche vermessenen Zielpunkte lassen sich ja unabhängig voneinander um die Basisgerade drehen, ohne daß sich die Distanzen ändern. In der Folge sei also $y_4 \neq 0$ vorausgesetzt, überdies natürlich $x_2, x_3 \neq 0$. Unter diesen Umständen reduziert sich die *Verträglichkeitsbedingung* (2.4) auf

$$(r_1^2 - r_2^2 + x_2^2) x_3 - (r_1^2 - r_3^2 + x_3^2) x_2 = 0. \quad (3.1)$$

Die vom Zielpunkt unabhängige *Abstandsrelation* (2.5) lautet nun

$$(\lambda - 1) r_1^2 - \lambda r_2^2 + r_3^2 = e \quad (3.2)$$

mit

$$\lambda = x_3/x_2, \quad e = x_3 (x_3 - x_2). \quad (3.3)$$

Mit der Vorgabe einer solchen Relation (3.2) sind also die Werte x_2 und x_3 auf Grund von (3.3) bereits bestimmt. Die kollinearen Standpunkte P_1, P_2 und P_3 liegen demnach fest, während sich der Punkt P_4 , dessen Koordinaten in (3.1) gar nicht aufscheinen, in der festen, die Basisgerade enthaltenden Grundebene noch frei bewegen kann — von Realitätsgrenzen abgesehen. Es existiert also auch in diesem Sonderfall eine *zweiparametrische Lösungsschar*.

Die Deformation des entsprechenden Stabmodells ist recht trivial: Alle Zielpunkte drehen sich um die Achse $P_1 P_2 P_3$, im Einklang damit, daß aus der ersten Gleichung (2.3) $X = \text{const}$ folgt.

4. Diagrammquadriken

Wie in Abschnitt 2 erkannt wurde, gehören zu jeder Abstandsrelation (2.5) ∞^2 mögliche, untereinander affine Basisvierecke $P_1 P_2 P_3 P_4$, von deren Ecken $P_1(0, 0, 0)$ im Ursprung fest ist, während $P_3(x_3, y_3, 0)$ noch innerhalb gewisser Realitätsgrenzen frei gewählt werden darf; $P_2(x_2, 0, 0)$ und $P_4(x_4, y_4, 0)$ sind dann durch (2.11) bzw. (2.10) bestimmt. Zwecks besserer Übersicht über die Abhängigkeit von den verwendeten Parametern wird

$$x_3 = \xi, \quad y_3 = \eta, \quad x_2 = \zeta \quad (4.1)$$

gesetzt und jedem Basisviereck ein *Bildpunkt* $\mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta)$ im Para-

meterraum zugeordnet. Diese Bildpunkte sind bei kartesischer Deutung der Koordinaten ξ, η, ζ zufolge (2.11) an eine *Quadratik* Ψ

$$\lambda_3(\lambda_3 - 1)(\xi^2 + \eta^2) - 2\lambda_2\lambda_3\xi\zeta + \lambda_2(\lambda_2 + 1)\zeta^2 + d = 0 \quad (4.2)$$

gebunden, die im Ursprung zentriert und zur Ebene $\eta = 0$ orthogonal-symmetrisch ist; sie wird von den Ebenen $\zeta = \text{const}$ im allgemeinen nach Kreisen geschnitten. Im Sonderfall $\lambda_3 = 1$ allerdings, der wegen $y_3 = y_4$ zu durchwegs trapezförmigen Basisvierecken gehört, ist Ψ ein hyperbolischer Zylinder mit geraden Schichtenlinien $\zeta = \text{const}$.

Die ∞^3 Quadriken Ψ (4.2) bilden ein *dreiparametriges lineares System („Gebüsch“)*

$$A(\xi^2 + \eta^2) + 2B\xi\zeta + C\zeta^2 + D = 0. \quad (4.3)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (4.2) lassen sich nämlich aus den Verhältnissen $A : B : C : D$ allemal die maßgebenden Parameter

$$\lambda_2 = \frac{B(B+C)}{A(C-B^2)}, \quad \lambda_3 = \frac{B(A+B)}{B^2-A(C)}, \quad d = \frac{BD(A+B)(B+C)}{(AC-B^2)^2} \quad (4.4)$$

berechnen. Die Klärung des Ausnahmefalles $A C = B^2$ wird sich bei der späteren Diskussion der Gebüschequadriken ergeben. Hier wäre bloß noch zu vermerken, daß die Flächen Ψ (4.3) vier gemeinsame Punkte haben, die paarweise in den absoluten Kreispunkten I und J der Grundebene längs der Minimalgeraden $\xi \pm i\eta = \zeta = 0$ zusammengerückt sind.

Werden die Achsenkreuze ξ, η, ζ und x, y, z identifiziert, so erscheint der Standpunkt P_3 zufolge (4.1) einfach als Grundriß des Diagrammpunktes $\mathfrak{P} \in \Psi$, während dessen Kote ζ die Abszisse x_2 von P_2 angibt. P_1 liegt im Ursprung, und P_4 hängt mit P_3 gemäß (2.10) durch eine zentrische Ähnlichkeit mit dem Faktor λ_3 zusammen; das Ähnlichkeitszentrum L hat die Koordinaten

$$x_0 = \lambda_2 x_2 / (\lambda_3 - 1), \quad y_0 = z_0 = 0, \quad (4.5)$$

liegt also im Schnitt von $P_1 P_2$ mit $P_3 P_4$ (Abb. 1) und stimmt mit dem Grundriß des Mittelpunktes des durch \mathfrak{P} gehenden Schichtenkreises von Ψ überein³. Auf diese Weise ist bei vorgelegter Abstands-

³ Im Sonderfall $\lambda_3 = 1$ tritt an die Stelle der Ähnlichkeit eine Schiebung längs der x -Achse mit der Schiebsstrecke $-\lambda_2 x_2$.

relation (2.5), also bei bekannter Diagrammquadratik Ψ , das Basisviereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ durch seinen Bildpunkt $\mathfrak{P} \in \Psi$ eindeutig bestimmt.

Jede *Verlagerung* $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ auf der Diagrammfläche Ψ bewirkt demnach eine wohlbestimmte „zulässige“ *Verformung* $P_1 P_2 P_3 P_4 \rightarrow P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ des Basisvierecks, d. h. eine solche, welche eine abstandsverhaltende Ortsveränderung $Q \rightarrow Q'$ beliebiger Zielpunkte gestattet. Wandert \mathfrak{P} insbesondere auf einer Schichtenlinie $\zeta = \text{const}$, dann bleibt P_2 fest, während P_3 und P_4 auf konzentrischen Kreisen um L (bzw. auf Normalen zur x -Achse im Fall $\lambda_3 = 1$) laufen.

Einer solchen Verlagerung sind im übrigen gewisse *realitätsbedingte Grenzen* gesetzt. So kann sich \mathfrak{P} nicht unbeschränkt der Symmetrieebene $\eta = 0$ nähern, weil $\eta = y_3 \rightarrow 0$ wegen der zweiten Gleichung (2.3) $Y \rightarrow \infty$ nach sich zieht, was auf Grund von (2.2) mit $Y^2 \leq r_1^2 - X^2$ in Widerspruch geraten würde; der Fall kollinearer Standpunkte von Abschnitt 3 ist mithin im Zuge der Verformung nicht erreichbar, was auch schon wegen der affinen Veränderung des Basisvierecks ausgeschlossen ist. — Eine andere Bewegungsschranke für P_3 stellt überdies der im Grundriß auftretende *Umrißkegelschnitt*

$$\xi^2 + \left(1 - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1}\right) \eta^2 = \frac{1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3} d \quad (4.6)$$

der Quadrik Ψ dar.

Für die ausständige *Diskussion* der Quadriken Ψ sei die Annahme $B = 0$ gleich ausgeschlossen, da sie nur für $\lambda_2 \lambda_3 = 0$ auftreten kann, was zu folge (2.8) kollineare Standpunkttripel bedeutet, die aber außer Betracht bleiben sollen. Die durch Verschwinden der zu (4.3) gehörigen Determinante

$$\Delta = A D (A C - B^2) \quad (4.7)$$

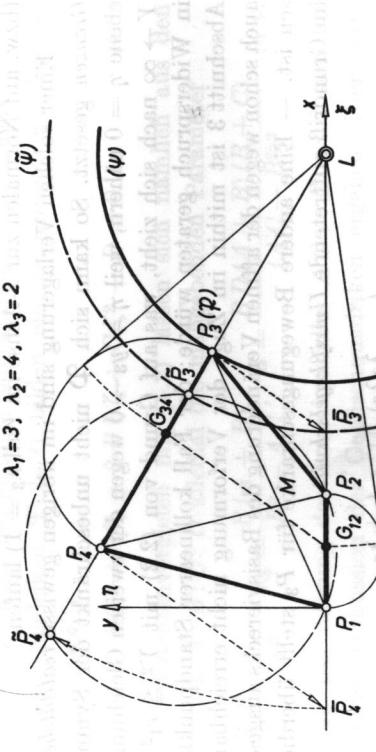
gekennzeichneten *singulären Flächen* Ψ verteilen sich dann im wesentlichen auf zwei Klassen:

- i) $A = 0$. Dieser Fall tritt für $\lambda_3 = 1$ ein und liefert die bereits erwähnten γ -parallelen *hyperbolischen Zylinder*, die zu *Basistrapeten* gehören.
- ii) $D = 0$. Dieser Fall, der vom Ursprung ausstrahlende *Kegel* bedingt, stellt sich für $d = 0$ ein. Dies bedeutet gemäß (2.6) einen

gemeinsamen Wert von

$$\frac{x_3^2 + y_3^2 - x_2 x_3}{y_3} = \frac{x_4^2 + y_4^2 - x_2 x_4}{y_4} = f, \quad (4.8)$$

und das besagt wiederum, daß P_3 und P_4 dem Kreis $x^2 + y^2 = x - t$ angehören, der auch P_1 und P_2 enthält; es liegt also ein Basisviereck mit Umlenkern ("Sehnenviereck") vor.



$$PM:MP = \lambda_1:\lambda_2 = 2:3, \quad PM:MP = 1:\lambda_2 = 1:4$$

$$(P \cdot I_P = \lambda \cdot I_P) \Leftrightarrow P = \lambda \cdot I_P$$

Abb. 1. Konstruktive Festlegung der zu einem Basisviereck gehörigen Diagrammquadrat.

Die dritte Möglichkeit $A C - B^2 = 0$ ist äquivalent zu $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$ und kann mithin bei Ausschluß kollinearer Standpunkttripel nicht

Nach allem hat man nun die Mittel für eine Konstruktion der Quadrik Ψ zu gegebenem Basisviereck $P_1 P_2 P_3 P_4$ in der Hand. Zunächst ist der in der Höhe $\zeta = x_2 = P_1 P_2$ verlaufende Schichtenkreis von Ψ durch den Grundriß $L = P_1 P_2 \cap P_3 P_4$ seines Mittelpunktes und seinen Radius $L P_3$ bekannt. Beachtet man ferner, daß die zu denselben λ_i und verschiedenen \tilde{d} gehörenden Quadriken (4.2) homothetisch sind, also in gleicher Höhe konzentrische Schichtenkreise besitzen, so läßt sich insbesondere für den durch $\tilde{d} = 0$ gekennzeichneten Asym-

piotenkegels $\tilde{\Psi}$ der Schichtenkreis in der Höhe x_2 finden. Man hat lediglich die Punkte P_3 und P_4 derart nach \tilde{P}_3 und \tilde{P}_4 zu verlagern, daß einerseits das Verhältnis $L\tilde{P}_3 : L\tilde{P}_4 = LP_3 : LP_4 = 1 : \lambda_3$ erhalten bleibt, anderseits $P_1 P_2 \tilde{P}_3 \tilde{P}_4$ gemäß ii) zu einem Sehnenviereck wird, das also den Potenzsatz $L\tilde{P}_3 \cdot L\tilde{P}_4 = LP_1 \cdot LP_2$ befriedigt. Zu diesem Zweck wurden in Abb. 1 die geometrischen Mittel $L G_{12}$ von LP_1 und LP_2 sowie $L G_{34}$ von LP_3 und LP_4 konstruiert. Anschließend wurden parallel

zu $G_{34} G_{12}$ die Punkte P_3 und P_4 nach \overline{P}_3 und \overline{P}_4 auf die Gerade $P_1 P_2$ projiziert. Vernehmer derselben um L auf einen halbischen Strahl durch

WILHELM REICHERT, BURGMEISTER, FÜRSTENBERG, 1870-1871.

vierecks. Der Bahnkreis von \bar{P}_3 stellt bereits den gesuchten Schichtenkreis des Asymptotenkegels der Diagrammquadrik Ψ dar, womit dieselbe ausreichend bestimmt ist. — Für ein konkaves Ausgangsviereck wie in Abb. 1 ist die Konstruktion ohne Schwierigkeiten im Reellen ausführbar, wobei manche nur der Erklärung dienenden Linien entbehrlich sind; hier ist Ψ ein (zweischaliges) Hyperboloid. Für überschlagene Vierecke oder solche mit einspringender Ecke sind unter Umständen gewisse Modifikationen vorzunehmen.

Umgekehrt wäre bei vorliegender Diagrammquadratik Ψ unter Heranziehung ihres Asympotenkegels (der für ein Ellipsoid nullteilig ist) die Ermittlung des zu einem Bildpunkt $\mathfrak{P} \in \Psi$ gehörigen Basisvierecks $P_1 P_2 P_3 P_4$ konstruktiv zu bewerkstelligen.

5. Eijf komplanaare Standpunkte

Stehen bei der Vornahme der Distanzmessungen *fünf Standpunkte* P_1, \dots, P_5 einer Ebene zur Verfügung, so geben die beiden Basisvieredde $P_1 P_2 P_3 P_4$ und $P_1 P_2 P_3 P_5$ Anlaß zu zwei Diagrammquadriken Ψ_1 und Ψ_2 aus dem Gebüsch (4.3). Der in Abschnitt 4 eingeführte, nur von P_1, P_2 und P_3 abhängige, also für beide Vierecke gemeinsame Bildpunkt \mathcal{P} (4.1) gehört daher der *Schnittquartik* $q = \Psi_1 \cap \Psi_2$ an und kann nur auf dieser verlagert werden. Bei q handelt es sich um eine zweiteilige Raumkurve 4. Ordnung I. Art, die zur Ebene $\eta = 0$ und bezüglich des Ursprungs symmetrisch ist; sie besitzt die Minimalstrahlen $\xi + i\eta = \zeta = 0$ zu Asymptoten

Dies bedeutet, daß das in Rede stehende Trilaterationsproblem bei $n \geq 5$ angepeilt, beliebig im Raum angeordneten Zielpunkten jetzt im allgemeinen nur mehr zwei einparametrische Lösungsscharen besitzt, die übereinander kongruent sind. Es gilt demnach im Gegensatz zu Satz 1 der

Satz 3: *Werden von fünf komplanaren Standpunkten aus sämtliche Distanzen zu fünf oder mehr beliebig im Raum verteilten Zielpunkten gemessen, so ist das Problem der Rekonstruktion der räumlichen Anordnung aus diesen Entfernungen im allgemeinen einfach unbestimmt.*

In anderer Interpretation hat man gleichzeitig den

Satz 4: *Werden fünf komplanare Punkte mit fünf oder mehr beliebig im Raum verteilten Punkten auf alle möglichen Arten durch starre Stäbe gelenkig verbunden, so entsteht im allgemeinen ein zwangsläufig deformierbares Stabwerk.*

Werden P_1 , die Achse $P_1 P_2$ und die Ebene $P_1 P_2 \dots P_5$ festgehalten, so durchläuft der Punkt P_3 als Grundriß von \mathfrak{P} den Grundriß der Quartik q , also eine doppelsymmetrische monozirkulare Kurve 4. Ordnung; aus Gründen der Gleichberechtigung gilt Analoges auch für die Bahnen von P_4 und P_5 . Eine tiefere Einsicht in die Deformation des Stabwerks wird Abschnitt 8 vermitteln.

6. Sechs komplanare Standpunkte

Bei Verwendung von sechs komplanaren Standpunkten P_1, \dots, P_6 hat man, herrührend von den drei Basisvierecken $P_1 P_2 P_3 P_4$, $P_1 P_2 P_3 P_5$ und $P_1 P_2 P_3 P_6$, drei Diagrammquadriken Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_3 , welche nur mehr eine endliche Anzahl von Punkten \mathfrak{P} gemeinsam haben werden, sofern sie nicht einem Büschel angehören; diesem Sonderfall wird Abschnitt 7 gewidmet sein. Ansonsten werden die drei Quadriken acht Schnittpunkte besitzen, von denen allerdings vier in den absoluten Punkten I und J der Grundebene paarweise zusammengerückt sind (Abschnitt 4). Es kommen also nur vier eigentliche Punkte \mathfrak{P}

in Betracht, die jedoch wegen ihrer bezüglich des Ursprungs und der η -Achse symmetrischen Anordnung im wesentlichen nur auf eine einzige Lösung des Trilaterationsproblems hinsichtlich des Basissechsecks führen, wenn man von Spiegelungen absieht.

Für die analytische Behandlung stehen drei Gleichungen der Bauart (4.3) zur Verfügung, aus welchen sich die Größen $\xi^2 + \eta^2$, $\xi \zeta$ und ζ^2 linear berechnen lassen; aus deren Werten sind dann vier Lösungstriple (ξ, η, ζ) zu gewinnen, die sich bloß durch Vorzeichen unterscheiden. Auf Grund von (4.1) sind damit die Standpunkte P_1, P_2 und P_3 bekannt, worauf die restlichen Standpunkte P_4, P_5 und P_6 mittels der zugehörigen Formeln (2.10) zu ergänzen sind, nachdem die jeweils benötigten Koeffizienten λ_2 und λ_3 gemäß (4.4) ermittelt wurden. Die vier so gefundenen Standpunktsextupel sind untereinander kongruent, da sie durch Spiegelung an der x - und y -Achse ineinander übergehen. — Konstruktiv könnte man so vorgehen, daß man die Durchgangsquartiken $q_{12} = \Psi_1 \cap \Psi_2$ und $q_{13} = \Psi_1 \cap \Psi_3$ normal auf die Symmetrieebene $\eta = 0$ projiziert, wo sie sich als doppelt überdeckte Hyperbeln mit der gemeinsamen Asymptote $\zeta = 0$ abbilden. Diese beiden Hyperbeln besitzen zwei eigentliche, bezüglich des Ursprungs spiegelbildlich liegende Schnittpunkte, die als Aufrisse die vier Diagrammpunkte \mathfrak{P} festlegen.

Wie schon im Anschluß an Satz 1 hervorgehoben wurde, genügen bereits drei Zielpunkte, um die Diagrammquadriken festzulegen, falls die Komplanarität der Standpunkte feststeht. Unter dieser Voraussetzung, die eine zusätzliche Information bedeutet, gilt dann

Satz 5: *Werden vom sechs komplanaren Standpunkten aus die 18 Distanzen zu drei Zielpunkten im Raum gemessen, so besitzt das Problem der Rekonstruktion der Anordnung aller neun Punkte aus diesen Entfernungen nur vier Lösungen, wenn man von Spiegelungen absieht, und erfordert bloß Operationen von höchstens 2 Grad.*

Hierbei bleiben die unendlich vielen zusätzlichen Lösungen, bei welchen die sechs Standpunkte keiner Ebene mehr angehören, außer Betracht. Die angeführte Vierdeutigkeit bezieht sich darauf, daß nach ermitteltem komplanarem Standpunktsextupel die Vorzeichen der Zielpunktskoten gemäß Fußnote 2 theoretisch noch unbestimmt sind.

7. Sechs und mehr Standpunkte auf einem Kegelschnitt

Der vorhin zurückgestellte Sonderfall, daß die drei Quadriken Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 einem *Büschel* angehören, ist durchaus möglich, da die durch Linearkombination zweier Gleichungen (4.3) zu vollziehende Büschelbildung aus dem Gebüsch nicht herausführt. Die drei Quadriken haben dann eine bestimmte *Raumquartik* q gemein, auf welcher der gemeinsame Bildpunkt \mathcal{P} der Basisvierecke $P_1 P_2 P_3 P_4, P_1 P_2 P_3 P_5$ und $P_1 P_2 P_3 P_6$ auf ∞^1 Arten verlagert werden kann. Dies bedeutet, daß wie im Abschnitt 5 eine *gefährliche Annahme* mit einparametrischer Lösungsschar vorliegt.

Zu klären ist nun, unter welchen Umständen der genannte Sonderfall eintritt. Denkt man sich in (4.3) die Gleichungskoeffizienten der beiden Ausgangsquadriken Ψ_1 und Ψ_2 mit den Indizes 1 bzw. 2 vorne, dann hängen die Koeffizienten der Gleichung jeder dem von Ψ_1 und Ψ_2 aufgespannten Flächenbüschel angehörenden Quadrik Ψ' nach dem Muster $A = A_1 + t A_2$ usf. linear von dem bei der Linearkombination verwendeten Büschelparameter t ab. Zufolge (4.4) sind sodann λ_2 und λ_3 quadratisch-gebrochene Funktionen in t mit gemeinsamem Nenner, und Gleiches gilt gemäß (2.10) für die Koordinaten $x = \lambda_3 x_3 - \lambda_2 x_2$ und $y = \lambda_3 y_3$ der vierten Ecke $P(x, y, 0)$ des durch $\mathcal{P} \in \Psi'$ repräsentierten Basisvierecks $P_1 P_2 P_3 P$. Läßt man nun t variieren, dann durchläuft P auf Grund der erwähnten Bauart der Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ einen gewissen *Kegelschnitt* k , von welchem sich nachweisen läßt, daß er auch die Punkte P_1 bis P_5 enthält. So stellt sich unter Beachtung von (4.4) etwa P_1 für jenen Parameterwert t_1 ein, der $B = 0$ macht ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$), P_2 für $A + B = 0$ ($\lambda_3 = 0, \lambda_2 = -1$), P_3 für $B + C = 0$ ($\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$), P_4 für $t_4 = 0$ und P_5 für $t_5 = \infty$.

Das gesuchte *Kriterium* für die gefährliche Anordnung von sechs komplanaren Standpunkten besagt mithin, daß eine solche Anordnung vorliegt, sobald diese Punkte einem *Kegelschnitt* angehören; Anzahl und Verteilung der Zielpunkte sind dabei ohne Belang. Im übrigen können beliebig viele weitere Standpunkte auf dem *Kegelschnitt* hinzugenommen werden, ohne daß die Gefährlichkeit aufgehoben wird.

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch mit Benützung eines Results von Killian und Meissl [3], wenn man im Raum vier nicht

komplanare Zielpunkte Q_j wählt und mit $m \geq 6$ Standpunkten P_i in der Grundebene π die Rolle tauschen läßt, was geometrisch nichts ändert: Gestützt auf das in Abschnitt 1 zitierte Kriterium liegt genau dann eine gefährliche Annahme vor, wenn sämtliche Punkte P_i und Q_j einer *Quadratik* Φ angehören; die Standpunkte P_i müssen dann auf dem *Kegelschnitt* $k = \pi \cap \Phi$ liegen, der offensichtlich auch in ein Geradenpaar zerfallen kann. — Es gilt mithin der

Satz 6: Gehören sämtliche sechs oder mehr Standpunkte einem Kegelschnitt an, dann liegt bei beliebig vielen und beliebig im Raum verteilten Zielpunkten eine gefährliche Annahme mit wenigstens einparametrischer endlicher Unbestimmtheit vor.

Oder in anderer Deutung der

Satz 7: Werden sechs oder mehr Punkte eines Kegelschnittes mit mindestens vier nicht komplanaren Raumpunkten auf alle möglichen Arten durch starre Stäbe gekennzeichnet verbunden, so entsteht ein zwangsläufig deformierbares Stabwerk.

Der Rollentausch von Stand- und Zielpunkten in Satz 6 läßt nebenbei erkennen, daß die Bestimmung des *Bahnkegelschnittes* eines Satelliten durch bloße Entfernungsmessungen von beliebig vielen Stationen aus nicht möglich ist, wenn deren Positionen nicht bekannt sind.

8. Deformation konischer Stabwerke

Zur genaueren Untersuchung der über die Diagrammquartik q wohldefinierten einparametrischen Deformation der in Satz 7 genannten, über einem Kegelschnitt k aufgebauten „konischen“ Stabwerke erweist sich ein Wechsel des Koordinatensystems als vorteilhaft.

Im Falle einer *Basisellipse* k sei dieselbe in Parameterform ange- setzt durch

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad z = 0 \quad \text{mit } a > b > 0. \quad (8.1)$$

Die Entfernung r eines Punktes $P(x, y, 0) \in k$ von einem beliebigen

Raumpunkt $Q(X, Y, Z)$ ergibt sich dann aus der Formel

$$\begin{aligned} r^2 &= (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \\ &\quad - 2aX \cos u - 2bY \sin u + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \cos 2u. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Dieselben Entfernung r , deutbar als Erzeugendenabschnitte eines *Kegels* Γ zwischen seiner Basis k und seiner Spitze Q , treten in gleicher Verteilung $r(u)$ auf insgesamt ∞^1 solchen Kegeln auf, deren fünf Angabestücke a, b, X, Y, Z den vier Bedingungen

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad aX = p, \quad bY = q, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = R^2 \quad (8.3)$$

mit $c, p, q, R = \text{const}$ genügen. Dies bedeutet eine *längentreue Deformierbarkeit* des Erzeugendensystems von Γ , wobei die Basisellipse k eine *konfokale Schar* mit den festen Brennpunkten $(\pm c, 0, 0)$ durchläuft.

Die erste Bedingung (8.3) kann durch den Ansatz

$$a = c \operatorname{ch} v, \quad b = c \operatorname{sh} v \quad (8.4)$$

erfüllt werden, worauf der festgestellte zwangsläufige Verformungsvorgang einfach durch Veränderung von v beschrieben wird. Die Basispunkte $P(u) \in k$ wandern dabei auf den Bahnen

$$x = c \cos u \cdot \operatorname{ch} v, \quad y = c \sin u \cdot \operatorname{sh} v, \quad z = 0 \quad (u = \text{const}), \quad (8.5)$$

in welchen man das zur Schar der Ellipsen k orthogonale System der *konfokalen Hyperbeln* l erkennt. — Zu bemerken ist, daß die Deformation der Punktreihe $k(P)$ unabhängig von der Kegelspitze Q und in *affiner veränderlicher Weise* erfolgt.

Die *Bahn der Kegelspitze* $Q(X, Y, Z)$ im Zuge der Deformation wird auf Grund von (8.3) und (8.4) in Parameterform durch

$$X = \frac{p}{c \operatorname{ch} v}, \quad Y = \frac{q}{c \operatorname{sh} v}, \quad (8.6)$$

$$Z^2 = R^2 - \frac{c^2}{2} \operatorname{ch} 2v - \frac{p^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 v} - \frac{q^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 v} \quad (8.6)$$

beschrieben. Im allgemeinen, d. h. für $p, q \neq 0$, handelt es sich hierbei um eine zu den Koordinatenebenen symmetrische algebraische Raum-

Kurve 8. Ordnung; für $p = 0, q \neq 0$ oder $q = 0, p \neq 0$ hingegen reduziert sich die Spitzbahn auf eine ebene Kurve 4. Ordnung⁴, für $p = q = 0$ auf die z -Achse.

Die Annahme einer *Basishyperbel* k erledigt sich auf ganz ähnliche Weise, nur daß Hyperbelfunktionen anstelle der Kreisfunktionen treten und umgekehrt.

Für den Fall einer *Basisparabel* k eignet sich der Ansatz

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = 0, \quad (8.7)$$

der mit $v = \text{const}$ die konfokale Schar der Basisparabeln k und mit $u = \text{const}$ die Schar der dazu orthogonalen Bahmparabeln l liefert. Für die *Bahn der Kegelspitze* $Q(X, Y, Z)$ ergibt sich über die Distanzformel

$$r^2 = (X + v^2)^2 + Y^2 + Z^2 - 4vY \cdot u - 2(X - v^2)u^2 + u^4 \quad (8.8)$$

die Parameterdarstellung

$$X = v^2 + p, \quad Y = \frac{q}{v}, \quad Z^2 = R^2 - (2v^2 + p)^2 - \frac{q^2}{v^2} \quad (8.9)$$

mit $p, q, R = \text{const}$. Jetzt handelt es sich im allgemeinen, d. h. für $q \neq 0$, um eine auf dem Drehellipsoid $(2X - p)^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$ verlaufende *Raumkurve 6. Ordnung*, die sich im Sonderfall $q = 0$ auf die Meridianellipse $Y = 0$ des Ellipsoids reduziert.

Nachdem in allen Fällen die durch Variation von v erklärte Veränderung des Basiskegelschnitts k unabhängig von der Kegelspitze Q erfolgt, so kann sie auch simultan für mehrere Kegelspitzen vor sich gehen. Damit hat man den

Satz 8: *Werden beliebig viele Punkte eines Kegelschnittes mit beliebig vielen Punkten außerhalb der Kegelschneide auf alle möglichen Arten durch starre Stäbe gelenkig verbunden, so entsteht ein Stabwerk, das eine zwangsläufige Deformation gestattet, bei welcher der Kegelschnitt ein konfokales System durchläuft, während seine Punkte auf den Kegelschnitten der dazu orthogonalen Fokalschar wandern.*

⁴ Solche Quartiken, kinematisch durch zentrische Schubkurbelgetriebe erzeugbar, treten durchwegs als Spitzbahnen im Grenzfall $c = 0$ eines schießen Kreiskegels auf und können zu dessen Verebnung herangezogen werden [7].

Hiermit ist nun ein gewisser Einblick in die Art der Deformation gewonnen, welche die in Satz 4 und Satz 7 angeführten Stabmodelle erfahren, wenn im Fall eines Mittelpunktskegelschnitts dessen Achsen festgehalten werden, oder im Fall einer Parabel deren Ebene, Achse und Brennpunkt.

Wie man umgekehrt aus den selbständigen Entwicklungen dieses letzten Abschnittes die vorhergehenden Ergebnisse herleiten kann, wurde in [8] ausgeführt.

Literatur

- [1] Blāha, G.: Investigations of critical configurations for fundamental range networks. Dept. Geod. Sci., Rep. **150**, Ohio State University (Columbus 1971).
- [2] Bricard, R.: Sur des systèmes articulés. Nouv. Ann. Math. **79** (1920), 395–400.
- [3] Killian, K., und P. Meissl: Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Örter. D. Geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss. A/61 (1969), 65–72.
- [4] Tsimis, E.: Critical configurations (determinantal loci) for range and range-difference satellite networks. Dept. Geod. Sci., Rep. **191**, Ohio State University (Columbus 1973).
- [5] Wunderlich, W.: Gefährliche Annahmen der Trilateration und bewegliche Fachwerke, II. Z. Angew. Math. Mech. **57** (1977), 363–367.
- [6] Wunderlich, W.: Fokalkurvenpaare in orthogonalen Ebenen und bewegliche Stabwerke. Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss. **185** (1976), 275–290.
- [7] Wunderlich, W.: Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels. Elem. Math. **32** (1977), 115–117.
- [8] Wunderlich, W.: Sur une déformation remarquable du système des génératrices d'un cône du second degré et un problème de géodésie. Bull. Inst. Polyt. Jassy (im Druck).

Wunderlich, W., und P. Meissl: Eine geometrische Betrachtung über die
geometrischen Probleme der Trilateration. In: "Trilateration und Raumvermessung". Herausgegeben von H. H. Müller und H. Schmid. Band 1: Geometrische Probleme der Trilateration. Verlag für Verkehrswissenschaften, Berlin 1977.

Wunderlich, W.: Die Abwicklung des schiefen Kreiskegels. In: "Trilateration und Raumvermessung". Herausgegeben von H. H. Müller und H. Schmid. Band 2: Raumvermessung. Verlag für Verkehrswissenschaften, Berlin 1977.